UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Secuencia didáctica: La razón de cambio instantánea desde la variación

TESIS

Para obtener el grado de

Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTA

Hugo Bastián Hernández

DIRECTOR DE TESIS

M.E.S. Roberto Acosta Olea

ASESORES

Dr. Cesar Cristóbal Escalante
Dr. Víctor Hugo de Jesús Soberanis Cruz
M.T.I. Melissa Blanqueto Estrada
Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar

Chetumal Quintana Roo, México, Febrero de 2016

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Trabajo de Tesis elaborado bajo supervisión del Comité de asesoría y aprobada como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas

Comité de Trabajo de Tesis

Director: ______________________
M.E.S. Roberto Acosta Olea

Asesor: ______________________
Dr. César Cristóbal Escalante

Asesor: ______________________
Dr. Víctor Hugo de Jesús Soberanis Cruz

Asesora: ______________________
M.T.I. Melissa Blanqueto Estrada

Asesor: ______________________
Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar

Chetumal, Quintana Roo, México, Febrero de 2016.

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a ti Madre Lucina Hernández Rodríguez y a la memoria de tu esposo Tiburcio Bastián Moctezuma, que esperaron pacientemente la culminación de mi formación profesional.

A mi esposa Jazmín del Rosario Puc Dzul, compañera incondicional, de la cual hemos recibido dos frutos llamados Sofía y Naáyte, por su amor, comprensión, apoyo en cada paso de este etapa de nuestra vida y de este trabajo; el estímulo y muestras de cariño cada vez que era abandonada esta jornada, el amor que recibo cada instante de mi vida y que me fortalece para seguir viviendo plenamente a su lado. Bendigo ese día de febrero que aceptaste ser mi compañera durante todo nuestra existencia.

A mis hermanos Aida, Abel, Tiburcio, Ana Lia, Yadira y Diana, que en todo momento han apoyado y han estado pendiente de los logros y derrotas de nuestra vida, a la familia de mi esposa por su comprensión y apoyo, a lo largo de los últimos años.

AGRADECIMIENTOS

A nuestra Universidad: fundadores, coordinadores, maestros, al Consejo Quintanarroense de ciencia y tecnología (COQCyT) y a la vinculación con la Universidad Autónoma de Sinaloa que hicieron posible la creación del programa de maestría que nos permitió crecer profesionalmente en beneficio de nuestros alumnos.

Al Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, por el apoyo al programa y las facilidades otorgadas a los diferentes maestros durante el proceso a través de su Director General.

A mis maestros y compañeros por su apoyo en cada etapa a lo largo de las actividades curriculares del programa de esta maestría.

A mis asesores: M.E.S. Roberto Acosta Olea, Dr. Cesar Cristóbal Escalante, Dr. Víctor Hugo de Jesús Soberanis Cruz, M.T.I. Melissa Blanqueto Estrada y Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar de los cuales he recibido innumerables horas de su vida dedicadas a la formación de esta primera generación y a la culminación de este documento. M.E.S. Roberto Acosta Olea de Usted he recibido infinidad de apoyos, tolerancia, tiempo y dedicación a este trabajo que dignamente presentamos.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se presentan las actividades de una secuencia didáctica que se preparó con la finalidad de proporcionar al alumno, una forma organizada de abordar el concepto de la razón de cambio, para los estudiantes de nivel bachillerato del quinto semestre. La propuesta y los ejercicios presentados tienen como objetivo apoyar el tratamiento y comprensión de los conceptos de manera numérica, procedimental, geométrica y algebraica, para que el estudiante tenga diferentes formas de construir sus propios conocimientos de la razón de cambio.

En el primer capítulo se abordaron los antecedentes del tema, se plantea la problemática a resolver, se da la justificación y los objetivos de esta investigación.

En el segundo capítulo se documentan los elementos teóricos que servirán para abordar el tema, los antecedentes históricos de la razón de cambio, concepción del cambio, los cambios cualitativo y cuantitativo, variación, razón de cambio promedio e instantánea. Adicionalmente se revisan las teorías de la enseñanza y aprendizaje que servirán como base de construcción de la propuesta; como el aprendizaje significativo de David Ausubel, la taxonomía de Bloom, resolución de problemas Polya, inteligencia múltiple, el modelo educativo de Van Hiele y el modelo de entendimiento de Pirie y Kieren.

En el tercer capítulo se aborda la metodología de cómo se construyó la propuesta, las metas de comprensión, como es que se determina el contenido y la forma de organizarlo, consideraciones de cómo se aprende la razón de cambio, cómo es desarrollan las habilidades y por último se presenta la propuesta de la secuencia.

En el cuarto capítulo se tienen las conclusiones, estas reflejan los pormenores de la investigación que está centrada en diseñar estrategias de enseñanza, que ayuden al estudiante de nivel bachillerato del quinto semestre en la asignatura de cálculo diferencial a comprender con facilidad conceptos de la razón de cambio, para poder resolver distintas problemáticas del ámbito escolar y cotidiano. Con el propósito de sentar las bases del cálculo diferencial, para ello la secuencia empieza con los conceptos necesarios para entender la razón de cambio, se implementaron actividades en un ambiente de resolución de problemas, donde se busca que los alumnos pudieran comprender estos conceptos de forma simultánea al desarrollo de sus habilidades para elaborar tablas, gráfica y expresión algebraica; y de esta manera pudieran interpretar situaciones de la vida cotidiana.

Desafortunadamente no se ha podido implementar este instrumento en el aula de la materia de cálculo diferencial, ya que aún no tenemos la posibilidad de tener un grupo asignado en esta

asignatura, pero se sabe que funcionará, ya que la planeación, técnicas, instrumentos y evaluación por competencia, se han puesto en práctica en el aula en las asignaturas que tenemos asignadas en este momento que son del área de informática.

Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

CAPITULO 1

EL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES

En el bachillerato el aprendizaje del cálculo, en particular la conceptualización de la noción de la razón de cambio, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que conlleva numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Muchos estudiantes aprenden a realizar de forma mecánica cálculos en donde se utiliza la razón de cambio, posteriormente derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, (Artigue, Douady, & Moreno, 1995). Los estudiantes encuentran grandes dificultades para alcanzar una comprensión profunda de los conceptos involucrados, y los profesores carecen de metodologías adecuadas para desarrollar la comprensión matemática de la razón de cambio (Cristóbal Escalante, 2010).

Un fenómeno educativo de la matemática es el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos. Cantoral y Mirón (2000) señalan que esto provoca que una gran cantidad de alumnos no logren dar sentido y significado a los conceptos básicos, de modo que, aún siendo capaces de derivar una función, no pueden reconocer cuándo requieren usar la razón de cambio para resolver problemas.

1.2 PROBLEMA

En este sentido la problemática a abordar es proponer metodologías de instrucción adecuadas para desarrollar la comprensión de los conceptos básicos involucrados en la derivada como son: razón de cambio promedio e instantánea y la obtención de la derivada mediante la razón de cambio instantánea. Por lo que es necesario desarrollar la comprensión y adquisición de los conocimientos necesarios para obtener la derivada, en particular la variación de funciones, la razón de cambio promedio e instantáneo y la derivada como la función que proporciona la razón de cambio instantánea.

El concepto de razón de cambio es fundamental para la comprensión de la derivada. El concepto de variable tiene en su significado la idea de cantidades que están cambiando y el concepto de razón de cambio implica la comparación entre dos cantidades que cambian. Desarrollar una comprensión del cambio y de la razón de cambio en los estudiantes permitiría una mejor comprensión del concepto de la derivada.

Por lo anterior el problema a abordar en esta tesis es de elaborar una secuencia didáctica de actividades de instrucción para que los estudiantes desarrollen su conocimiento sobre la razón de cambio de forma tal, que sepan cuando aplicarla al resolver problemas y analizar situaciones.

1.3 Justificación de la propuesta

Dar respuesta a la problemática antes planteada es importante por las siguientes razones:

Tener un conocimiento de los conceptos matemáticos, en particular de la razón de cambio y de la derivada, de manera que pueda ser utilizada para resolver problemas, es importante porque capacita a los estudiantes para abordar infinidad de problemas en la vida real. La importancia de la razón de cambio y de la derivada para enfrentar problemas reales radica en que en ellas se aborda la forma en que cambian las cosas. En el mundo real todo cambia y saber cómo cambian las cosas permite predecir esos cambios y tomar decisiones respecto a ello.

Dado que los docentes carecen de metodologías para la enseñanza de las matemáticas, en particular de la razón de cambio y de la derivada, la propuesta contribuirá a disponer de nuevas estrategias metodológicas para la instrucción. Además, al describir los criterios empleados para el diseño y selección de las actividades de instrucción, estos pueden ser utilizados por otros docentes para generar sus propias propuestas.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO DE LA TESIS

El objetivo general de la tesis es documentar el proceso de elaboración de una secuencia de actividades de instrucción para que los estudiantes desarrollen su conocimiento sobre la razón de cambio, de forma tal que sepan cuando aplicarla al resolver problemas y analizar situaciones.

1.4.2 Objetivo particular

Los objetivos particulares son:

1.4.2.1 Analizar el concepto de la razón de cambio y de la derivada desde la perspectiva de las matemáticas y de su utilidad para resolver problemas.

1.4.2.2 Analizar propuestas y descripciones de actividades para el aprendizaje profundo de conceptos en particular de conceptos matemáticos.

1.4.2.3 Seleccionar y elaborar problemas y actividades para integrar la secuencia didáctica.

1.5 Alcance de la propuesta

La propuesta fue desarrollada considerando el currículo del nivel bachillerato. Por lo anterior el aprendizaje del concepto de la razón de cambio alcanzada por los estudiantes debe ser pertinente para resolver problemas que involucren este concepto. Se espera que el estudiante adquiera habilidades de solución de problemas del ámbito escolar y cotidiano, ya que los problemas propuestos vienen de su entorno, para que su aprendizaje sea segnificativo.

1.6 Viabilidad de la propuesta

Este trabajo puede ser aplicado en el nivel bachillerato, en cualquier contexto. También puede adecuarse las actividades en el aula si existen limitaciones tecnológicas.

Las condiciones en que se puede llevar a cabo la propuesta son: si el alumno tiene los conocimientos previos de algebra y pre-calculo; y si no puede acceder a recursos tecnológicos, deberá poder investigar en libros, gráficar y tabular de forma manual, por lo que la propuesta se puede adaptar a cualquier salón de clase.

CAPITULO 2

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 La razón de cambio a través de la historia

Desde la antigüedad, el hombre ha tenido la necesidad de entender los cambios percibidos en su entorno para utilizarlos en su favor y trasformar el medio ambiente. Los babilonios y los griegos, tenían una concepción matemática práctica, hace 3,000 años lograron establecer relaciones entre las variaciones de diversas magnitudes, en un principio de forma cualitativa describían cambios de su entorno con relación al universo, posteriormente lo hicieron de forma cuantitativa, registraban valores cambiantes en la construcción, asociadas en la búsqueda de pendientes uniformes en las caras de dichas construcciones, que los llevo al manejo de la relación avance contra subida y en consecuencia al concepto práctico de la variación.

Los griegos empezaron a trabajar la matemática en un sentido intelectual más que práctico, Tales de Mileto realizó estudios sobre las proporciones hacia el año 585 A. C., estudios que contribuyeron a la comprensión de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos. “Aunque es probable que Tales haya basado sus estudios en principios conocidos por los egipcios y babilonios, con estos estudios nacen los conceptos de razón geométrica o comparación entre magnitudes geométricas y de proporción, como herramientas ideales para analizar cuantitativamente relaciones entre magnitudes” (Boyer, 1986).

Al desarrollar su teoría de la semejanza, Tales de Mileto formula que los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales, proposición que permite generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que expresó en términos de razones constantes. La utilidad práctica de su teoría se hizo manifiesta al emplearla en la toma de medidas indirectas cuando se logra calcular la altura de una de las pirámides egipcias comparando su sombra con la de una vara vertical. “En general, Tales buscaba un método indirecto para acceder a aquello que en la práctica no era posible” (Recalde, 1999).

Hacia la primera mitad del siglo XIV, cuando los matemáticos del colegio de Mentón, se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como por ejemplo la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. Estas relaciones entre la matemática y la física dieron origen a una nueva ciencia: la cinemática, que se constituyó en la base del cálculo.

Jordano de Namore (? -1237) fue el fundador de la escuela medieval de mecánica cuya preocupación central era el estudio de relaciones entre magnitudes físicas. A él se le debe la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado: “La fuerza que actúa en la dirección de un camino inclinado es inversamente proporcional a su inclinación, donde la inclinación viene medida por la razón de un segmento dado del camino inclinado al segmento vertical que intercepta esta parte del camino, la razón de trayecto recorrido a la subida realizada” (Boyer, 1986). Se usa así la razón geométrica para explicar la constancia de la razón del cambio entre magnitudes, lo que determina la inclinación del plano.

Utilizando un esquema y la notación algebraica moderna para explicar la formulación de Jordano, se observa en la Figura 1, que él encontró la dependencia entre la fuerza que actúa en la dirección del plano Px y la razón constante referida a la pendiente del plano, o su inclinación (d/h). Esta inclinación se expresa a partir de la razón geométrica entre las medidas de los segmentos respectivos. Se caracteriza así un movimiento de razón de cambio constante, a través de las razones geométricas entre magnitudes.

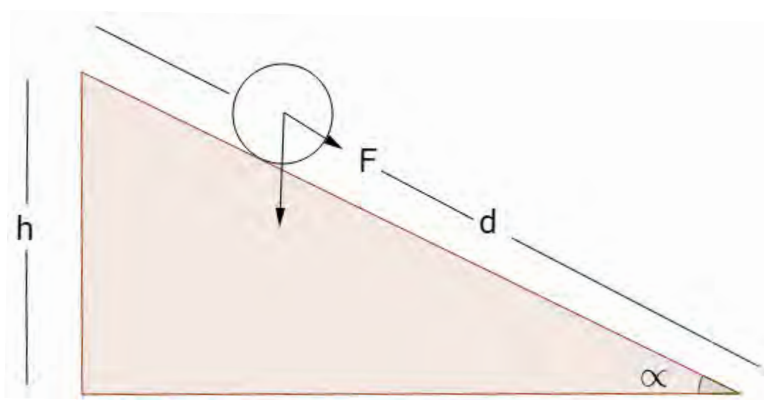


Figura 1: Gráfico explicativo de la ley del plano inclinado.

Por otra parte, Nicolás de Oresme (1320-1382), interesado también en la cuantificación de fenómenos de variación, introdujo las representaciones geométricas para explicar relaciones entre magnitudes variantes. Estudiaba la variación de fenómenos físicos uniformes y no uniformes. Para ello, se ideo la representación de la medida de variables físicas por medio de segmentos y el uso de figuras geométricas para describir la variación de una magnitud. Clasificó los movimientos en uniformemente uniformes, uniformemente diformes o diformemente diformes según la figura geométrica que resultara, fuera un triángulo rectángulo, un trapecio o una figura geométrica con un lado curvo.

En el caso de un cuerpo con movimiento acelerado, Oresme dibujaba una curva de velocidad *versus* tiempo en las que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempo iguales, que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamó latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante. Con argumentos geométricos Oresme mostraba que, para un movimiento uniformemente diforme que parte del reposo, los extremos superiores de todos esos segmentos están en una recta, y la totalidad de los segmentos (velocidades) cubren el área de un triángulo rectángulo. Así, caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante, con respecto al tiempo, como un movimiento de razón constante (Boyer, 1986). Este hecho se traducía, para él, en deducir que su curva tenía pendiente constante. Oresme encontró que la diferencia entre las velocidades $v_2–v_1$ (a la que denominaba, grado de amplitud), representada por él mediante la diferencia en el tamaño de los segmentos, era la misma que la diferencia entre las velocidades $v_3–v_2$, y así sucesivamente (Figura 2). Así, plantea la constancia de las razones entre las diferencias .

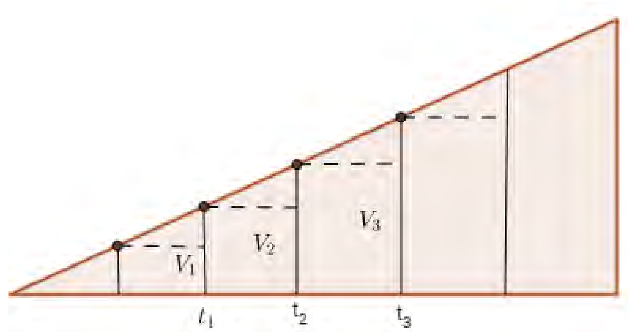


Figura 2: Gráfico explicativo diferencia entre velocidades de Oresme.

La aceptación de las razones de cambio heterogéneas rompió con la manera griega de ver las razones y permitió acceder al estudio de los fenómenos de variación entre magnitudes interdependientes. Cada punto de la curva en el plano se desligó de los segmentos asociados como representantes de dicha magnitud (a la manera de Oresme) y empezó a verse como la asociación de dos valores de magnitudes de diferente especie.

Así surgen, en el contexto de los estudios de las variaciones, las razones heterogéneas. Con el avance del álgebra y la posibilidad de hacer uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes interdependientes, surge la representación de la razones de cambio por medio de razones heterogéneas de diferencias, que se constituyen en la clave para avanzar hacia el cálculo diferencial.

Por otra parte, con el uso de las tangentes para caracterizar curvas se fue gestando el concepto de pendiente en todo el proceso, que dio origen a las razones de cambio instantáneas, pero su conceptualización como objeto de estudio se realizó por un camino distinto al del cálculo, en la geometría analítica.

Con lo anteriormente expuesto, se reconoce la importancia que se le da al concepto de razón de cambio y como éste ha fundamentado el avance de la matemática desde muchos ámbitos.

Galileo Galilei (1564-1642), opta por describir el mundo físico en términos de cantidades medibles como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa. Hace uso de las representaciones geométricas de Oresme para los estudios de velocidades, introduciendo técnicas cuantitativas específicas con las cuales llega a la determinación del teorema de velocidad media, que explica haciendo uso de las razones geométricas (Boyer, 1986).

Inicios del cálculo diferencial

Descartes y Fermat desarrollaron el método específico para caracterizar las curvas, haciendo uso, por primera vez, de la idea de que por medio de una ecuación se podía expresar la dependencia entre dos cantidades variables. Usaron también la idea, heredada de los griegos, de la utilidad de la recta tangente, que posteriormente permitió relacionar los valores de una función, para puntos muy próximos, con los valores de las ordenadas de la recta tangente en los puntos respectivos, de donde posteriormente surge la idea del triángulo diferencial. Ellos expresan por primera vez la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente (en puntos próximos) y la diferencia de los valores correspondientes de la magnitud independiente, es decir, la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto del incremento de la magnitud independiente, esto lo lograron haciendo uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes representadas.

En 1696 el marqués de L'Hôpital público un texto, considerado como el primer libro de texto de cálculo, en donde menciona la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de dichas magnitudes. En este texto señala la importancia de lo que llama la diferencia fundamental de una variable continua, que expresa como: en lenguaje moderno, entendida como la diferencia entre los valores de la magnitud dependiente.
Igualmente señala la importancia de estudiar simultáneamente la diferencia entre los valores correspondientes a la magnitud independiente para lograr conocer la variación de otros elementos presentes en la representación gráfica propuesta. La relación entre ambas diferencias da lugar a la razón de cambio entre los incrementos de las magnitudes (Boyer, 1986).
En el campo educativo vale la pena considerar la conceptualización de la razón de cambio, debido a que es un concepto fundamental en el cálculo diferencial y sienta las bases en las matemáticas superiores en las cuales se necesita que el alumno tenga un pensamiento de las variaciones, para comprender los fenómenos relacionados con las ciencias exactas y naturales.

2.2 Concepción del cambio

El mundo actual está en permanente cambio, generando en el hombre la necesidad de determinar las variaciones ocurridas ya sea desde una descripción de las circunstancias o a partir de la medición de las mismas. Las condiciones socioeconómicas y políticas de países o regiones guardan diversas relaciones entre sí, ya sea de similitud, dominación o antagonismo, las cuales pueden favorecer ambientes de cooperación, competencia o incluso conflicto, determinando con ello las dinámicas de cambio propias del mundo contemporáneo. Esta situación conduce a que el cambio se conciba de diferentes forma, es decir desde lo descriptivo o cualitativo y lo numérico o cuantitativo. Por lo que a continuación se detallarán estos conceptos.

2.2.1 El cambio cualitativo

Lo cualitativo es aquello que denota cualidad y puede ser comparada con otra similar o de la misma especie. En muchos casos este análisis depende de la percepción social, cultural o subjetiva que este en juego. Puede afirmarse que lo cualitativo, depende de quien lo mire y, a diferencia de lo cuantitativo, es mucho más difícil de precisar y depende del escenario y la perspectiva individual.

Los cambios cuantitativos, hacen referencia a las relaciones entre factores o componentes que lo producen, es decir, se precisa un antes y un después en la circunstancia respecto a aquellas situaciones que generan la modificación. Este tipo de cambio no se determina numéricamente sino que parte de descripciones, secuencias o instrucciones representados por medio de palabras que permiten definir una respuesta o conclusión sobre algo. Es probable que este tipo de cambios se apoyen en modelos gráficos y expresiones adjetivas, las que inician en forma sencilla para luego ser ampliadas y posteriormente poder incluir todos los factores que en la modificación interviene (Cantoral, 2013).

Se espera que en las descripciones de la situación de cambio cualitativo se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que la otra, tal magnitud disminuye más lentamente que la otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, entre otras.

Teniendo presente lo anteriormente expuesto, el cambio cualitativo se caracteriza por:

- Distinguir las características necesarias para identificar modificaciones de los objetos, situación o acción propias de un contexto.
- Permitir representar una situación con una definición pobre (parcial, incierta o imprecisa), soportando el proceso de solución y proporcionando una interpretación de los resultados.
- Ser la forma más ampliamente utilizada para explicar las modificaciones ocurridas respecto a algo, desde el razonamiento por sentido común.

Para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación se debe disponer de sistemas de representación que sean familiares para el grupo de estudiantes (Grossi, 2010). A continuación se plantean algunos de ellos:

El lenguaje escrito: El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones. Es decir que se deberá producir un texto para describir lo ocurrido.

Pictórica: Los dibujos y gráficos son medios de representación en las situaciones de variación ya que muestran de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos en un comienzo pueden ser muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio. Estos dibujos y gráficos deberán ir acompañados de explicaciones verbales y ayudarán a darle sentido a las gráficas cartesianas de las funciones que describen las situaciones de cambio.

Modelos físicos que simulen la situación: Algunas situaciones de cambio, sobre todo las presentadas por medio de un texto, son susceptibles de ser recreadas mediante maquetas con movimiento lo que permite tener un entendimiento más concreto de la situación de cambio. Hablar sobre los modelos y hacer preguntas sobre los mismos ayudan en la identificación de magnitudes presentes.

2.2.2 El cambio cuantitativo

La noción de medida (valor numérico) viene de la operación cotidiana de comparar conjuntos y no solo se vincula con el número de elementos de un conjunto, sino también con la noción de extensión (longitud).

Desde los inicios elementales de la teoría de los conjuntos y de las topológicas métricas, hay un inmenso camino recorrido para pulir la noción de medida. Se ha desarrollado la teoría de conjuntos, la noción de métrica y de topología y hoy contamos con definiciones rigurosas de lo que es la medida como función definida sobre un conjunto. Esta actividad, que consiste en asignar objetivamente un número a alguna observación, ha sido una actividad propia de las Ciencias Naturales desde siempre (Salett y Hein, 2004).

En muchas situaciones el hombre se ha relacionado no solo con el hecho de medir, sino también con la necesidad de determinar la variación de dichas mediciones. Estas variaciones hacen referencia a los cambios de las medidas, es decir, se relaciona con los cambios cuantitativos. Además pretende definir un número asociado a las modificaciones ocurridas, es decir que, en cualquier circunstancia, sea posible enunciar la cantidad de aumento y/o disminución.

El cambio cuantitativo se describe con base a los factores que lo generan, matemáticamente son llamadas variables, los cuales son tomadas como causas, es decir, como relaciones de dependencia que dan cuenta de lo ocurrido (Carvajal, 2004). Algunas formas que pueden utilizarse para representar este tipo de cambio son las siguientes:

Representación geométrica: Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con longitudes de segmentos. Esta identificación no es una mera forma de representación gráfica sino un reconocimiento del comportamiento de la magnitud en cuestión como el de la longitud de un segmento. Es decir, se reconocen propiedades comunes de comportamiento algebraico y continuidad (el comportamiento algebraico y las propiedades de continuidad comunes a las magnitudes continuas son las que dan origen a la definición formal de número real y a su representación geométrica como punto de un eje numérico).

Representación tabular: Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen.

Representación algebraica: De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en la tabla se pueden establecer expresiones algebraicas que condensen toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio. Por ejemplo, los valores de las variables para los cuales una expresión o formula se anula dan información acerca de los intervalos donde la expresión es positiva o negativa. El estudio de expresiones algebraicas en el contexto de la variación contribuye de manera significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico para extraer información sobre el comportamiento de las variables involucradas en la expresión, contribuirá con la comprensión del fenómeno en estudio y será una herramienta para la solución de problemas. La tabla sirve como herramienta para mostrar los datos gráficamente lo que permite descubrir patrones y hacer predicciones.

Representación gráfica: Se hace mediante la representación en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla. Tradicionalmente, la introducción de las funciones numéricas en el aula de clase se ha hecho desde un principio de acuerdo a la complejidad de su expresión algebraica. Es decir, se estudiaban primero las variaciones lineales, luego las cuadráticas, las cubicas, y así sucesivamente. Quedaba la impresión en muchos estudiantes que las únicas funciones que existían eran las lineales y las cuadráticas, lo que se pretende cambiar con el enfoque que presenta las situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo primero. Esto no quiere decir que a partir de un cierto momento no se haga un acercamiento sistemático al estudio de los fenómenos mediante una clasificación de los modelos de acuerdo a la complejidad de su representación algebraica.
Este tipo de cambio pretende lograr precisión, exactitud y verificación concreta respecto a alguna modificación. El conocimiento gana mucho con estas cualidades porque se hace contable. El procedimiento que desde el avance matemático ha permitido determinar exactamente la modificación consiste en establecer un punto inicial o de referencia y un punto final y contrastarlos a ambos. En la simbología moderna puede expresarse como (Callejas y Jiménez, 2012): $\Delta(x) = x_f - x_i$.
Dependiendo de la situación el cambio cuantitativo, puede ser constante o variable, es decir, puede permanecer igual o generar diferentes resultados numéricos.

2.2.2.1 El cambio constante

Por constante se entiende un valor de tipo permanente, que no puede modificarse, al menos no dentro del contexto o situación para el cual está previsto. Cuando se hace referencia al cambio constante no es posible alejarse de estas ideas pues “El significado coloquial del valor constante le asigna la connotación cuantitativa de no equivocado, y no variabilidad; por consiguiente, se supone que un cambio constante no tiene asignado sino un único valor y tiene un alto grado de certeza y confiabilidad. De esta manera se relaciona lo exacto con la verdad, en oposición a la inexactitud que se define como alejamiento sistemático de la verdad" (García, Serrano y Díaz, 2002).

Desde el punto de vista cultural, lo constante también está relacionado con visiones de la matemática; en éstas, lo exacto, lo preciso, es una acepción del término matemático. Estas acepciones lo relacionan con los criterios de validez propios de la matemática, su carácter universal y general; es decir, a los aspectos teóricos que fundamentan la matemática.
Desde el punto de vista matemático, el cambio constante está asociado a:

1. Una medida reconocida como la asignación de valores de cantidades.
2. Unos sistemas de representación notacional (propiamente numéricos).
3. Unas nociones de precisión y exactitud.

Este tipo de cambio se consigue cuando no se da ninguna modificación de los valores medidos ($\Delta(x) = 0$) o cuando la medida de las diferencias es siempre igual
($\Delta(x) = x_f - x_i =$ constante).

2.2.2.2 El cambio variable

Este tipo de cambio es completamente contrario al anterior, pues desde la definición de variable se reconocen las diferencias. Una variable es “una cantidad susceptible de tomar valores numéricos diferentes, comprendidos o no dentro de un cierto límite" (Callejas y Jiménez, 2012).
La forma de determinar un cambio de esta forma es la misma que se aplica a los cuantitativos, la diferencia radica en el resultado encontrado, pues aunque se calculen varias medicaciones los resultados no serán iguales.

2.2.3 La razón de cambio

El cambio se matematiza mediante el cálculo, que se considera como la rama de las matemáticas que realiza las operaciones necesarias para prever un resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

La razón de cambio se define como un “cociente incremental o de diferencias" (Fuenlabrada de la Vega Trucíos, 2004). El cociente es definido como el cambio o diferencia en el eje Y dividido por el respectivo cambio en el eje X, este cambio se establece hallando la diferencia entre una magnitud final con una inicial. Usando la notación moderna se puede escribir como: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ .Es importante resaltar que en muchas ocasiones la razón de cambio está dotada de un significado contextual, pues plantea relaciones significantes entre las magnitudes que intervienen.

Este cociente en algunos casos siempre dará el mismo resultado, definiéndose como constante y en caso contrario como razón de cambio variable.

2.2.3.1 La razón de cambio constante.

Este tipo de razones al hallar el resultado del cociente, siempre define un mismo resultado. Es decir al calcular la variación de los incrementos se puede obtener siempre un resultado igual a cero o la misma magnitud.

Un ejemplo de este tipo de razones es la velocidad, que se determina como el cociente de incrementos entre la distancia y el tiempo, se puede escribir y definir como (Cuellar Carvajal, 2012):

Si se realiza un registro Gráfico de la situación se obtendrá la Figura 3:

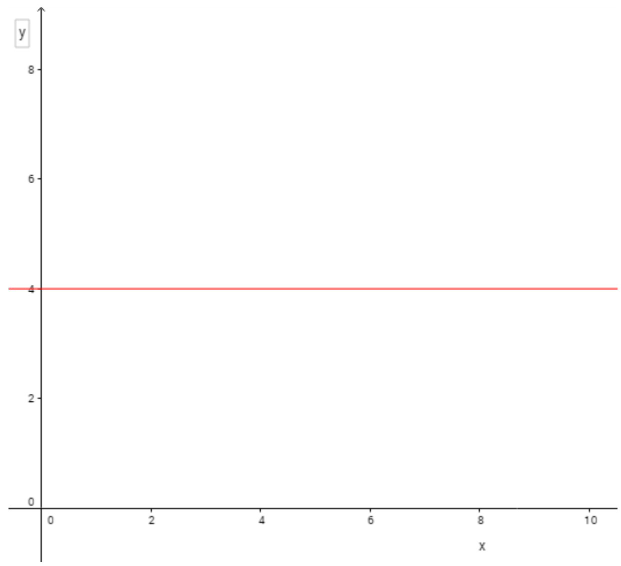


Figura 3: Registro gráfico de la velocidad como razón de cambio constante.

Esta recta indica que no existe ningún tipo de variación, lo conduce a establecer la velocidad como constante. Otra situación matemática que hace uso de este concepto es la pendiente de una recta la cual no tiene variación para cualquier par de coordenadas de este elemento geométrico. Gráficamente esta situación se representa en la Figura 4.

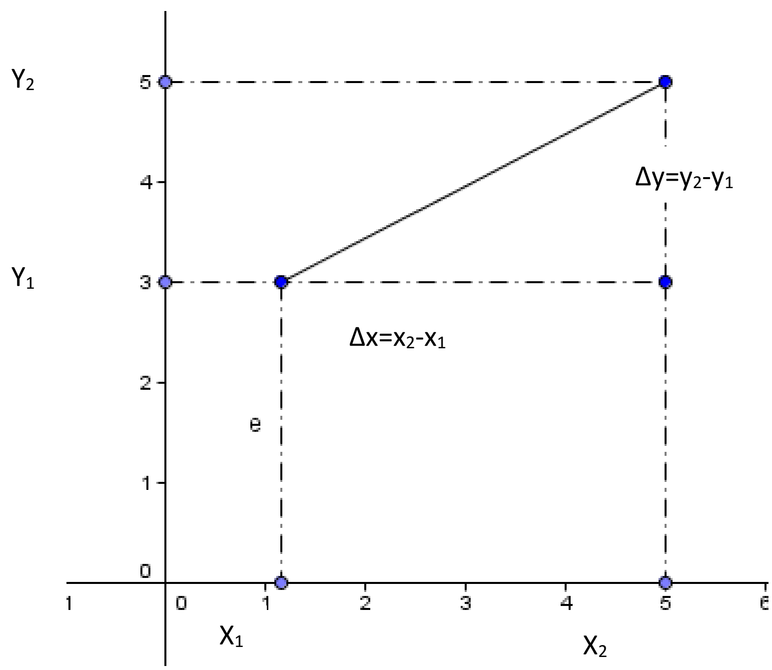


Figura 4: Representación gráfica de la pendiente como razón de cambio constante.

Este tipo de razones dentro del cálculo se reconocen como razón de cambio media o promedio.

2.2.3.2 La razón de cambio variable.

En algunos casos el cambio puede fluctuar durante un intervalo de tiempo, es decir, variar para cada instante donde sea calculado. En este caso se denomina razón de cambio instantánea, considerando variaciones cada vez más pequeñas.

En notación funcional se define como (Dolores C. , 2010):

En el cálculo esta escritura hace directa relación a la pendiente de la recta tangente a una curva en el punto (x; f (x)), que se consideró como uno de los grandes problemas en los que trabajaron los matemáticos europeos del siglo XVII. Puede considerarse que la recta tangente a una curva en un punto dado tendrá variaciones sobre cualquier punto de la curva en la que quiera establecerse, por tanto se consiguen diferentes resultados y es lo que determina la razón de cambio variable. Gráficamente se puede apreciar en la Figura 5 que cada recta tangente a la curva tiene diferente pendiente, lo que permite definir una razón de cambio para cada una de ellas estableciéndose una variación entre las magnitudes halladas.

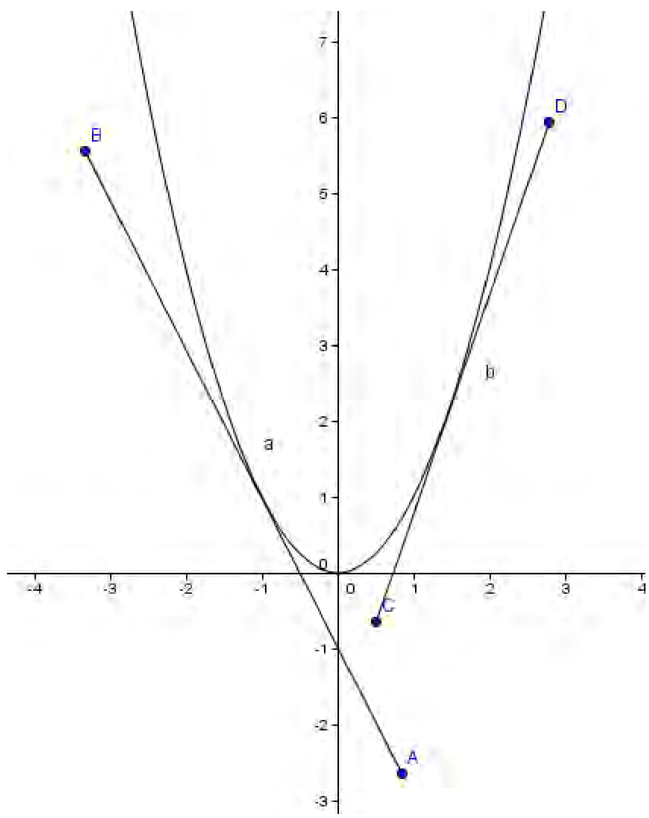


Figura 5: Curva con rectas tangentes

El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir la derivada. Este concepto se encarga de determinar el coeficiente de variación de una función en un punto dado. Es decir, provee una formulación matemática de la noción del coeficiente de cambio. El coeficiente de cambio indica lo rápido que crece o decrece una función en un punto (razón de cambio promedio) respecto del eje X, de un plano cartesiano de dos dimensiones. Pero para cada punto de la curva este coeficiente será diferente, por lo que se determina como razón de cambio variable.

Las concepciones frente al cambio, permiten que este concepto sea visionado en un sentido más general. Se reconoce la importancia que puede tener el cambio cualitativo y cuantitativo en el trabajo del aula para lograr la conceptualización de forma reflexiva que conduce al aprendizaje significativo (Aleksándrov, Kolmogorov, Lavrentiev, & otros, 1985).

2.2.3.3 El pensamiento variacional y la razón de cambio

El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, “puede describirse aproximadamente como una manera de pensamiento dinámico, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (Cantoral Uriza, 2013). Desde esta perspectiva, el contexto se convierte en herramienta que permite el análisis, estudio y modelación de situaciones de variación.
Las circunstancias que permiten el desarrollo de este tipo de pensamiento están vinculadas con la matemática, la ciencia y la actualidad del hombre mismo, entre otros escenarios, iniciando así un desarrollo de procesos de pensamiento matemático ligados al algebra, las funciones y el cálculo.
Una construcción del concepto de variación cognitivamente efectiva presenta dificultades considerables y es, necesariamente lenta, puesto que supone, por una parte, del dominio e integración de distintos campos numéricos y geométricos, números y magnitudes; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, en un caso y todo un mundo de representaciones gráficas para magnitudes continuas, cada una con sus propias especificidades simbólicas, operatorias, estructurales y de

representación, junto con la comprensión en profundidad de procesos específicos complejos, como el paso al límite, la noción de variación y la noción de variable (Cantoral Uriza, 2013).
Este tipo de pensamiento está relacionado con la razón de cambio puesto pretende la búsqueda de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento que implica el conocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio, y por otro lado, se busca la modelación de situaciones a través de funciones como resultado de la cuantificación de la variación (Dolores C. , 1999).

2.2.2.3 Aplicaciones de la razón de cambio

La razón de cambio permite estudiar muchos fenómenos evolutivos como por ejemplo: la velocidad, la aceleración, los flujos, las acumulaciones, entre otros, aplicados en disciplinas como la física y la química; en ciencias sociales y biológicas permiten ver los crecimientos, decrecimientos y tendencias de las poblaciones; en economía permite analizar la tendencia del mercado. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios para el tratamiento de fenómenos físicos, poblacionales, económicos etc., la magnitud o fenómeno debe modelarse mediante una función matemática para poder derivar.
Los cambios que ocurren en la sociedad, economía, naturaleza, en nuestra vida cotidiana, tienen distintos comportamientos. En matemática se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio de esos fenómenos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. En este sentido, el cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento de las variaciones de las funciones, resulta fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y, en consecuencia, para formular dichos modelos (Callejas Tejeda & Jiménez Abud, 2012).

2.3 Teorías del aprendizaje

Aquí se exponen las teorías del aprendizaje y modelos educativos en los cuales se basó el presente trabajo, para ayudar a los alumnos, involucrados en procesos de enseñanza y de aprendizaje, a mejorar la comprensión como una habilidad de pensamiento, bien sea frente a un concepto especifico de una rama del conocimiento o en la forma de resolver problemas asociados a ella.

Es claro que la educación, en especial la educación Matemática, como ciencia, como arte, y como conjunto de acciones tendentes a transformar, necesita apoyarse en algunas teorías psicológicas del aprendizaje. Sin embargo, no puede realizarse una transferencia mecánica desde los principios psicológicos a las determinaciones normativas de su didáctica. Según (Gimeno y Pérez, 1994), la mayoría de las teorías del aprendizaje son modelos explicativos que han sido obtenidos en situaciones experimentales, y hacen referencia a aprendizajes de laboratorio, que solo relativamente pueden explicar el funcionamiento real de los procesos naturales del aprendizaje incidental y del aprendizaje del aula. Estas teorías deberían afrontar estos procesos como elementos de una situación de intercambio, de comunicación, entre el individuo y su entorno físico y sociocultural, donde se establecen relaciones concretas y se producen fenómenos específicos que modifican al sujeto".

Sin embargo, la dificultad de comprender los problemas de aprendizaje del sujeto, no son enfrentados por todas las teorías del aprendizaje con la misma pretensión de aproximación a las situaciones naturales vividas en el aula.

A continuación, se describen algunas de las principales teorías del aprendizaje que se desarrollaron en el siglo XX. Se reconoce en ellas la forma como buscan que el proceso de enseñanza y de aprendizaje se dé comprensivamente, desarrollando esta habilidad de pensamiento en el individuo.

2.3.1 Aprendizaje significativo de David Ausubel

Dentro de la psicología educativa, Ausubel considera que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva. Este autor concibe al alumno como un procesador activo de la información, y al aprendizaje como un proceso sistemático y organizado, pues es un fenómeno complejo que no se reduce a simples asociaciones memorísticas (Ausubel, Novak, & otros, 2009).

Ausubel, resalta que no es factible que todo el aprendizaje significativo que ocurre en el aula sea producto de un descubrimiento, es posible que también sea a causa de un trabajo repetitivo o memorístico.

Si el aprendizaje es significativo, es porque los nuevos conocimientos se incorporan como propios en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos. Para este proceso son importantes los intereses y motivaciones del alumno por aprender.

Según Ausubel (Díaz y Hernández, 2004), el aprendizaje significativo que se da en el aula de clase puede ser de diferentes tipos:

- Recepción repetitiva.
- Recepción significativa.
- Descubrimiento repetitivo.
- Descubrimiento significativo.

Ellos a su vez generan dos dimensiones:

Primera dimensión: La que se re refiere al modo en el que se adquiere el conocimiento.

Primera dimensión	
Modo en el que se adquiere la información	
Recepción	Descubrimiento
El contenido se presenta en su forma final.	El contenido principal a ser aprendido no se da, el alumno tiene que descubrirlo.
El alumno debe internalizarlo en su estructura cognitiva.	Propio de la formación de conceptos y solución de problemas.
No es sinónimo de memorización.	Puede ser significativo o repetitivo.
Propio de etapas avanzadas del desarrollo cognitivo en la forma de aprendizaje verbal hipotético son referentes concretos (pensamiento formal).	Propio de las etapas iniciales del desarrollo cognitivo en el aprendizaje de conceptos y proposiciones.
Útil en campos establecidos del conocimiento.	Útil en campos del conocimiento donde no hay respuestas univocas.
Ejemplo: Se pide al alumno que estudie fenómenos de la difracción en su libro de texto de Física, capítulo 8.	Ejemplo: el alumno, a partir de una serie de actividades experimentales (reales y concretas) induce principios que subyacen al fenómeno de la combustión.

Tabla 1: Situaciones de aprendizaje y la forma de adquirir la información

Segunda dimensión: La relativa a la forma en que el conocimiento es subsecuentemente incorporado en la estructura de conocimientos o estructura cognitiva del aprendiz.

Segunda dimensión	
Forma en que el conocimiento se incorpora en la estructura cognitiva del aprendiz	
Significativo	Repetitivo
La información nueva se relaciona con la ya existente en la estructura cognitiva de forma sustantiva, no arbitraria ni al pie de la letra.	Consta de asociaciones arbitrarias, al pie de la letra.
El alumno debe tener una disposición o actitud favorable para extraer el significado	El alumno manifiesta una actitud de memorizar la información.
El alumno posee conocimientos previos o conceptos de anclaje pertinentes.	El alumno no tiene conocimientos previos pertinentes o no los “encuentra".
Se puede construir un entramado o red conceptual.	Se puede construir una plataforma o base de conocimientos factuales.
Condiciones: Material: significado lógico. Alumno: significado psicológico	Se establece una relación arbitraria con la estructura cognitiva.
Puede promoverse mediante estrategias apropiadas (por ejemplo, los organizadores anticipados y los mapas conceptuales).	Ejemplo: aprendizaje mecánico de símbolos, convenciones, algoritmos.

Tabla 2: Situaciones de aprendizaje y la estructura cognitiva

Desde esta perspectiva, el aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes. Si se logra este tipificación es posible que:

- La información retenida se más duradera.
- Los nuevos conocimientos sean adquiridos con mayor facilidad y se relacionen con los anteriores de forma significativa.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, sea guardada en la memoria a largo plazo.

Para lograr el desarrollo de esta teoría del aprendizaje en las prácticas pedagógicas se hace necesario que el maestro conozca los conocimientos previos del alumno, es decir, se debe asegurar que el contenido que se vaya a trabajar pueda relacionarse con las ideas previas, ya que al conocer lo que sabe el alumno ayuda a la hora de planear. Así mismo es necesario organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no solo importa el contenido sino la forma en que se presenta a los alumnos. Es importante considerar la motivación como un factor fundamental para que el alumno se interese por aprender, ya que el hecho de que el alumno se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender y por último el maestro debe utilizar ejemplos, por medio de dibujos, diagramas o fotografías, para enseñar los conceptos.

2.3.2 Taxonomía de Bloom

La taxonomía cognitiva de este autor, (Bloom, 1956) se basa en la idea de que las operaciones cognitivas pueden clasificarse en seis niveles de complejidad creciente. Lo que tiene de taxonómico esta teoría, es que cada nivel depende de la capacidad del alumno para desempeñarse en el nivel o los niveles precedentes. La taxonomía no es un solo esquema de clasificación, sino un intento de ordenar jerárquicamente los procesos cognitivos.

Esta teoría, en relación al campo cognoscitivo, abarca seis áreas del conocimiento relacionadas con la memorización, la comprensión, la aplicación, el análisis, la evaluación y la creación. Las tres primeras se denominan de bajo nivel por la inmediatez con que son usadas por los estudiantes. Las tres siguientes, consideradas de alto nivel por los esfuerzos cognitivos que debe desempeñar un estudiante para implementarlas. A continuación se explica brevemente cada una de ellas:

Memorizar: Implica conocimiento de hechos específicos y conocimientos de formas y medios de tratar con los mismos, conocimientos de lo universal y de las abstracciones específicas de un determinado campo del saber. Son de modo general, elementos que deben memorizarse.

Comprender: El conocimiento de la compresión concierne el aspecto más simple del entendimiento que consiste en captar el sentido directo de una comunicación o de un fenómeno, como la comprensión de una orden escrita u oral, o la percepción de lo que ocurrió en cualquier hecho particular.

Aplicar: El conocimiento de aplicación es el que concierne a la interrelación de principios y generalizaciones con casos particulares o prácticos.

Analizar: El análisis implica la división de un todo en sus partes y la percepción del significado de las mismas en relación con el conjunto. El análisis comprende el análisis de elementos, de relaciones, etc.

Evaluar: Este tipo de conocimiento comprende una actitud crítica ante los hechos. La evaluación puede estar en relación con juicios relativos a la evidencia interna y con juicios relativos a la evidencia externa.

Crear: la creación concierne la comprobación de la unión de los elementos que forman un todo. Puede consistir en la producción de una comunicación, un plan de operaciones o la derivación de una serie de relaciones abstractas.

La contribución de Bloom a la educación va más allá de su taxonomía. Estaba interesado fundamentalmente en el pensamiento y en su desarrollo. Lo que Bloom pretendía develar era en que pensaban los alumnos mientras enseñaban los profesores, porque reconocía que, en definitiva, lo importante era lo que ellos estaban experimentando. La utilización de protocolos de pensamiento en voz alta proporciono una base importante, para comprender mejor que sucedía en la mente de los alumnos.

2.3.3 Resolución de problemas de Polya

Este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, entendiendo la distinción entre “ejercicio" y “problema". Para resolver un ejercicio, se aplican procedimientos rutinarios que llevan a la respuesta. Para resolver un problema, es necesario hacer una pausa, reflexionar y hasta puede que se ejecuten pasos originales que no se habían ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución.

Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas, pues ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos, los cuales se aplican al desarrollar la tarea de resolver problemas. La más grande contribución del autor (Polya, 1965) en la enseñanza de las matemáticas es su método de cuatro pasos para resolver problemas. A continuación se presentan estos pasos de una forma general:

1. Comprensión del problema. En esta fase del problema se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema.

2. Configurar un plan. En esta fase se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la que se quiere resolver y asi establecer un plan de resolución.

3. Ejecución del plan. En esta fase se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema.

4. Visión retrospectiva. La idea fundamental, de esta fase es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida.

Aunque las ideas de Polya, se comenzaron a implementar a partir de 1980, las estrategias heurísticas como dibujar programas, buscar metas, considerar casos particulares y resolver problemas mas simples que se consideran como parte esencial de la instrucción matemática, muestran todavía una diferencia notable en el aprovechamiento matemático de los alumnos, esta idea, según Polya (Polya, 1965), se ve reflejada en el siguiente párrafo:

“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel".

Desde esta idea, se evidencia la importancia de tener un método y apropiarse de una forma de trabajo adecuada en la resolución de problemas matemáticos, debido a que esto debe convertirse en una experiencia significativa en el trabajo de aula.

2.3.4 Inteligencias Múltiples

La teoría de las inteligencias múltiples es un modelo propuesto por Howard Gardner (Gardner, 2001) en el que la inteligencia no es vista como algo unitario, que agrupa diferentes capacidades específicas con distinto nivel de generalidad, sino como un conjunto de inteligencias múltiples, distintas e independientes. Gardner define la inteligencia como “una competencia intelectual humana que debe dominar un conjunto de habilidades para la solución de problemas, permitiendo al individuo resolver los problemas genuinos o las dificultades que encuentre y, cuando sea apropiado, crear un producto efectivo y también debe dominar la potencia para encontrar o crear problemas estableciendo con ello las bases para la adquisición de nuevo conocimiento".

Añade que así como hay muchos tipos de problemas que resolver, también hay muchos tipos de inteligencia. Hasta la fecha Howard Gardner y su equipo de la Universidad de Harvard han identificado ocho tipos distintos:

Inteligencia lingüística: la capacidad para usar palabras de manera efectiva, sea en forma oral o de manera escrita. Esta inteligencia incluye la habilidad para manipular la sintaxis o significados del lenguaje o usos prácticos del lenguaje.

Inteligencia lógica matemática: la capacidad para usar los números de manera efectiva y razonar adecuadamente. Esta inteligencia incluye la sensibilidad a los esquemas y relaciones lógicas, las afirmaciones y las proposiciones, las funciones y las abstracciones. Los tipos de procesos que se usan al servicio de esta inteligencia incluyen: la categorización, la clasificación, la inferencia, la generalización, el cálculo y la demostración de la hipótesis.

Inteligencia espacial: la habilidad para percibir de manera exacta el mundo visual espacial y de ejecutar transformaciones sobre esas percepciones. Esta inteligencia incluye la sensibilidad al color, la línea, la forma, el espacio y las relaciones que existen entre estos elementos. Incluye la capacidad de visualizar, de representar de manera gráfica ideas visuales o espaciales.

Inteligencia musical: la capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. Esta inteligencia incluye la sensibilidad al ritmo, el tono, la melodía, el timbre o el color tonal de una pieza musical.

Inteligencia cenestésico Corporal: la capacidad para usar todo el cuerpo para expresar ideas y sentimientos y la facilidad en el uso de las propias manos para producir o transformar cosas. Esta inteligencia incluye habilidades físicas como la coordinación, el equilibrio, la destreza, la fuerza, la flexibilidad y la velocidad, además de las capacidades auto perceptivas, las táctiles y la percepción de medidas y volúmenes.

Inteligencia intrapersonal: el conocimiento de si mismo y la habilidad para adaptar las propias maneras de actuar a partir de ese conocimiento. Esta inteligencia incluye tener una imagen precisa de uno mismo, tener conciencia de los estados de ánimo interiores, las intenciones, las motivaciones, los temperamentos y los deseos, y la capacidad para la autodisciplina, la auto comprensión y la autoestima.

Inteligencia interpersonal: la capacidad de percibir y establecer distinciones en los estados de ánimo, las intenciones, las motivaciones, y los sentimientos de otras personas. Esto puede incluir la sensibilidad a las expresiones faciales, la voz y los gestos, la capacidad para discriminar entre diferentes clases de señales y la habilidad para responder de manera efectiva a estas señales en la práctica.

Este autor, en primer lugar, amplia el campo de lo que es la inteligencia y reconoce que la brillantez académica no lo es todo. Inicia una diferenciación entre las personas con capacidad intelectual pero incapacidad para desarrollarse en otros situaciones, por ejemplo, desempeñarse bien académicamente pero tener dificultades para elegir a sus amigo. Para desempeñarse bien se requiere ser inteligente, pero en cada campo se utiliza un tipo de inteligencia distinto.

En segundo lugar, Gardner define la inteligencia como una capacidad, lo que rompió con paradigmas, pues se consideraba algo innato e inamovible. Se nacía inteligente o no, y la educación no podía cambiar ese hecho. A partir de la posibilidad planteada por Gardner, la escuela replantea sus intervenciones y genera mayores niveles de inclusión a alumnos con dificultades de aprendizaje.

Según esta teoría, todos los seres humanos poseen todos los tipos de inteligencia en mayor o menor medida. Gardner enfatiza el hecho de que todas las inteligencias son igualmente importantes, lo que fundamenta proyectos educativos para la enseñanza y el aprendizaje a través de actividades que promueven una diversidad de inteligencias, asumiendo que los alumnos poseen diferente nivel de desarrollo de ellas y por lo tanto es necesario que todos las pongan en práctica, preparándose para vivir en un mundo cada vez más complejo.

2.3.5 Modelo educativo de Van Hiele

Este modelo educativo, surge debido a los problemas que tienen los niños para comprender las tareas y actividades propuestas por sus profesores, pues estas son propuestas en un lenguaje que en general no es comprendido por los aprendices. El estudio de los esposos Van Hiele, ha generado nuevas alternativas metodológicas, las cuales ayudan a comprender de una mejor forma el razonamiento exhibido por los alumnos frente al concepto objeto de estudio.

Está constituido por tres partes: 1) La percepción (insight), 2) Los niveles de pensamiento, y 3) Las fases de aprendizaje, que según Van Hiele, citado por (Esteban Duarte, 2007), tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las matemáticas.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
3. Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.
4. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que este se haga de un modo rápido y eficaz.

A continuación, se presenta en breve una descripción de cada una de las partes que lo conforma.

El Insight

Esta parte de este modelo educativo, hace referencia a “los cambios que presenta un alumno en su forma de razonamiento, frente a un concepto específico, a lo largo de una intervención pedagógica, se puede observar y analizar a través del aumento progresivo en el lenguaje empleado por él, y a su vez, en la forma como manifiesta, analiza y emplea el nuevo conocimiento adquirido en nuevas situaciones" (Esteban Duarte, 2007).

Según Van y Hiele, se denomina Insight y lo define como comprensión y aunque no realiza una definición propia, pues se propone estudiar la comprensión tal y como existe en la enseñanza de las matemáticas. Intenta en lo posible ceñirse al contenido conceptual que se ha venido dando a la “comprensión" en ese contexto. Es por ello que “desiste de la metodología que resulta más eficaz en matemáticas: elaborar una definición de comprensión para obtener un contenido conceptual con el que trabajar cómodamente".

Para este autor, se logra la comprensión cuando una persona “actúa adecuadamente" en una “nueva situación" (Esteban Duarte, 2007). Esta idea fundamenta este trabajo investigativo, puesto que son las circunstancias no vividas las que ponen en manifiesto las capacidades que posee el estudiante para resolver problemas de manera favorable. Las actividades rutinarias impiden las relaciones con otros contextos y por ende los aprendizajes comprensivos.

Los niveles de razonamiento

Los niveles de razonamiento, también llamados la parte descriptiva del modelo, permiten ubicar a un alumno en alguno de ellos, de acuerdo con la comprensión que tenga frente a un concepto matemático.

van Hiele definió cinco, y son una forma de estructurar un concepto matemático en su red de relaciones, a continuación se muestra un ejemplo describiéndolos para la geometría.

Nivel 0, Predescriptivo: Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global, pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras. El estudiante en este nivel reconoce los triángulos por sus tres lados, pero no los clasifica.

Nivel 1, Visualización o Reconocimiento: En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares. Este nivel puede identificarse cuando un estudiante reconoce paralelogramos en un conjunto de figuras, ángulos y triángulos en diferentes posiciones.

Nivel 2, Análisis: El estudiante logra percibir propiedades de los objetos geométricos. Describen los objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras. Es el caso, cuando los estudiantes reconocen que un cuadrado tiene lados y ángulos iguales.

Nivel 3, Ordenación o clasificación: Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias. Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales. En este nivel, los estudiantes son capaces de reconocer que en un paralelogramo, los lados opuestos son iguales e implican lados opuestos paralelos y que los lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

Nivel 4, Deducción Formal: En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática y los estudiantes demuestran de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Debe tenerse presente que estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- No se puede alcanzar el nivel *n* sin haber pasado por el nivel anterior *n-1*, o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es invariante.
- En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito, en el nivel siguiente se vuelve explícito.
- Cada nivel tiene su lenguaje utilizado (símbolos lingüísticos) y su significado de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado).
- Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse.

Para poder realizar una clasificación de un grupo de estudiantes en los diferentes niveles, se necesitan los descriptores de los niveles de razonamiento y según Esteban (Esteban Duarte, 2007) (Gutiérrez Rodríguez, 1994), se definen como las principales características que permiten reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático, a partir de la actividad de los estudiantes. Para cada nivel, se pueden clasificar en descriptores de detección y separación, que son respectivamente, los que permiten establecer que criterios debe cumplir un alumno para ser inscrito en un nivel de razonamiento determinado y cuales debe superar para que sea promovido al nivel inmediatamente superior.

Las fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje tienen como fin, ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, y básicamente constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Las fases de aprendizaje son cinco (5) y se describen, según Gutiérrez (Gutiérrez Rodríguez, 1994), de la siguiente forma:

1.- Información: Se trata de toma de contacto; el profesor debe informar a los alumnos sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, que tipo de problemas se van a plantear, que materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para el trabajo matemático propiamente dicho.

2.- Orientación directa: Los alumnos empiezan a explorar el campo de estudio por medio de las investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los alumnos descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, figuras, etc., principales en el área que se está estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

3.- Explicitación: Los alumnos intercambian sus experiencias, comentan las regularidades observadas, explican cómo han resuelto las actividades. Además, se debe prestar gran atención a las diferencias en los puntos de vista, ya que el intento de cada alumno por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas, ordenarlas y expresarlas con claridad. Es importante recalcar que esta fase, no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones, de practica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

4.- Orientación libre: Los estudiantes aplican los conocimientos y el lenguaje adquirido en otras actividades (investigaciones) diferentes a las anteriores. El campo de estudio que es en gran parte conocido por los alumnos, debe ser perfeccionado, esto se consigue mediante el

planteamiento de actividades, que preferiblemente puedan desarrollarse de diversas formas o que impliquen diferentes soluciones.
En estas actividades se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores. Este tipo de actividades es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan relaciones más complejas y más importantes.

5.- Integración: Se refuerza la visión general sobre los contenidos, relacionando los conocimientos adquiridos con otros campos ya estudiados, pero no aportando ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante, esta solo debe ser una acumulación, comparación e integración de cosas que ya conoce.
Completadas esta cinco fases, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior, complementándola y reformulándola, y a partir de ese momento, el alumno ha progresado a un nuevo nivel de razonamiento.

2.3.6 Modelo de entendimiento de Pirie y Kieren.

La teoría de aprendizaje desarrollada por Pirie y Kieren en 1994, define el entendimiento matemático de la siguiente forma:

- El entendimiento matemático puede caracterizarse por niveles pero no en forma lineal.
- Es un fenómeno recursivo, y la recursión ocurre cuando el pensamiento se mueve entre niveles sofisticados.
- Cada nivel de entendimiento está contenido en los niveles siguientes.
- Cualquier nivel en su interior es dependiente de las formas y los procesos y además está condicionado por los niveles externos.

Usando esta definición, concibieron su modelo de entendimiento matemático compuesto por ocho niveles potenciales:

“Conocimiento primitivo", “Creación de la imagen", “Estableciendo imagen", “Deducción de propiedades", ”Formalización", ”Observación", “Estructuración"
y “Creación o Invención", la figura 2 muestra la concepción del modelo de entendimiento matemático, el cual comienza por el primer nivel potencial Conocimiento primitivo (Primitive Knowing o PK).

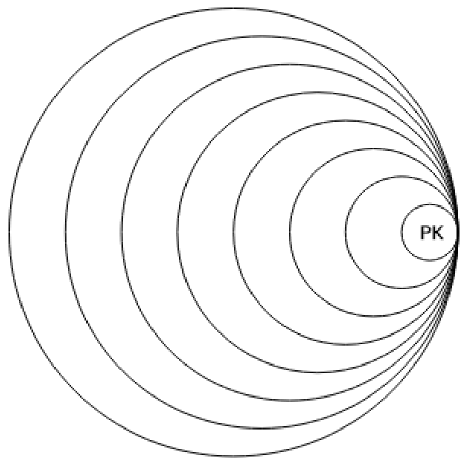


Figura 6: Concepción del modelo de Entendimiento Matemático de Pirie y Kieren, compuesto por ocho niveles potenciales.

Características del modelo de Pirie y Kieren

Este modelo es dinámico, ya que capta la esencia del cambio del entendimiento de un concepto en todo momento. Hay una característica fractal en el modelo, el nivel de “conocimiento primitivo" comprende muchos tópicos, cada uno entendido en su propio nivel. La característica más crítica del modelo es el desdoblamiento, que ocurre cuando se experimenta una nueva situación y el entendimiento presente no satisface las exigencias cognitivas del problema. El aprendiz, vuelve a examinar los niveles anteriores de entendimiento a la luz de la parte que no encaja y entonces reorganiza el nivel interno para acomodar la nueva información. Otra característica del modelo, es el complemento de un proceso y una acción de forma orientada. Para cada nivel, Pirie y Kieren creen que se deben exhibir algunas acciones y verbalizaciones con el fin de considerar que se está operando en el nivel particular respectivo. La descripción anterior caracteriza un concepto particular; las acciones específicas y verbalizaciones serian trazadas a la luz del modelo general. Si el aprendiz no demuestra tal complemento en el proceso y en la acción de forma orientada, se considera que no ha alcanzado el nivel de comprensión.

Una vez que se ha revisado la literatura de las teorías del aprendizaje y consultado los principales estilos de aprendizaje, técnicas, teorías en torno de la matemática y la enseñanza en general, el paso siguiente es diseñar la metodología de la construcción de nuestra propuesta, que se presenta en siguiente capítulo.

CAPITULO 3

METODOLOGÍA

3.1 Introducción

El diseño de esta secuencia didáctica para la comprensión de la razón de cambio fue basada en las teorías del aprendizaje descritas en el capítulo dos. Es claro que el cambio, para la mayoría de las personas, es la alteración de algo, pero matemáticamente, ¿Qué sentido tiene?, ¿Que conceptualizaciones permite realizar?, ¿Cómo puede ser medido? Este tipo de preguntas conducen a explorar la forma de presentar a los alumnos el hilo conductor, que los lleve a reflexionar sobre la importancia del tema y les permita determinar formas de medirlo, en los casos cuando sea posible, y así lograr la motivación para investigar situaciones reales en las que se perciban incrementos o disminuciones.

Teniendo presente que la comprensión que puede alcanzar un estudiante no es única ni definitiva, sino que depende del trabajo investigativo realizado por el mismo, con la dirección de un profesor o con la interacción con sus compañeros, y del nivel de apropiación que vaya alcanzando a partir de los resultados obtenidos en el transcurso del tiempo, el hilo conductor se formuló de la siguiente manera:
Los estudiantes comprenderán a partir de incrementos o disminuciones en diversas situaciones de la vida diaria la razón de cambio.
En el grado de escolaridad en el que se encuentran los estudiantes, lo tangible es lo más importante para lograr procesos de conceptualización y comprensión. Visualizar a partir de situaciones que normalmente perciben en su alrededor permite avanzar en la comprensión del concepto estudiado, por ello se buscó la comprensión del concepto en diversas situaciones asociadas al cambio en el contexto.

Los tópicos definidos para el proceso de enseñanza y de aprendizaje del concepto estudiado, permiten que el estudiante indague en el contexto sobre la percepción del cambio desde lo social y cultural para determinar tipos de cambio, se debe pensar en estrategias para la medición de estos cambios. La respuesta dadas a diferentes preguntas parten de la motivación para que los alumnos integren el contexto con el aprendizaje de las matemáticas.

Los siguientes son los tópicos generativos definidos:

1. En situaciones de la vida diaria, ¿Cómo sé que ha ocurrido un cambio?

Con este tópico se pretende hacer consciente a los estudiantes de la forma en que el acontecer diario varia y nada permanece constante, todo lo que transcurre permite que se generen cambios ya sea cualitativos, que solo pueden describirse o cuantitativos, que pueden medirse tomando como base una unidad de medida.

2. ¿Cómo puedo realizar la medición de un cambio? En general, no se tiene necesidad de medir lo que cambia, como determinar una variación ocurrida en cualquier situación de la vida o si se realiza es por un asunto lógico, pero en general no hay claridad sobre el procedimiento algorítmico que hay inmerso en este hecho. Estableciendo diferencias entre el resultado final e inicial de un suceso se pretende llegar a comprender como medirlo.

3. ¿Porque es importante medir los cambios? El trabajo con este tópico es consecuencia del anterior, ya que si se dota de sentido la forma de realizar la medición de un cambio es porque se hace consciente la matemática que hay en este proceso, lo que conduce a pensar en la importancia de la razón de cambio y de todo lo que implica su matematización.

4. ¿Cómo puede interpretarse la división entre dos cambios? La respuesta a esta pregunta busca que el estudiante encuentre relaciones entre dos situaciones que cambian y le dé sentido a la nueva relación obtenida, denominada matemáticamente “razón de cambio".

Los cuatro tópicos generativos indican el proceso paulatino desarrollado con los estudiantes, iniciando con la conceptualización sobre cambio hasta llegar a la medición de ellos y como su cociente define la razón de cambio. Este elemento metodológico es clave para determinar las metas y desempeños de comprensión, ya que de estos conceptos fundamentales, se debe partir para definir las metas de comprensión que se deben alcanzar.

3.2 Metas de Comprensión

El propósito de las metas de comprensión en el trabajo investigativo responden a la necesidad de hacer explicitas las acciones que permiten que los estudiantes se mantengan enfocados en el desarrollo de las actividades propuestas y que apuntan a la profundización del concepto estudiado. A continuación se presentan las metas formuladas para la razón de cambio:

1. Comprenderán la diferencia entre variaciones de tipo cualitativo y cuantitativo. Con ello se busca que diferencien los tipos de variaciones que transcurren en el entorno, unas ligadas con las descripciones sociales, personales, emocionales, entre otras, asociadas a lo cualitativo. Otras que pueden describirse con números, como el cambio en el peso de un bebe, el cambio en la estatura, entre otras, definidas como cuantitativas.

2. Reconocerán que las variaciones de tipo cuantitativo indican incrementos o disminuciones de las magnitudes medidas. Esta meta de comprensión es consecuencia de la claridad que alcanza un estudiante en determinar que la variación observada es cualitativa y que por lo tanto se le puede asociar un número, logrando percibir si se produce un aumento, una disminución o permanece igual.

3. Utilizaran registros tabulares y gráficos de diversas situaciones de la vida diaria para determinar los incrementos o disminuciones de las variables asociadas. Estas herramientas de sistematización permiten que los aspectos relacionados con la variación se perciban más fácilmente, pues de alguna forma se induce al estudiante a pensar matemáticamente en asuntos relacionados con el cambio.

4. Identificaran razones de cambio a partir de los registros tabulares y gráficos. De esta forma la sistematización contribuye a la matematización del concepto objeto de estudio alcanzando niveles de comprensión cada vez más altos.

5. Comprenderán la simbolización asociada a razones de cambio. Se pretende que los símbolos asociados a este concepto adquieran sentido práctico para los alumnos. De esta manera se definen actividades personales y colectivas en las que los estudiantes pueden alcanzar los conocimientos que van adquiriendo a lo largo del proceso para mejorar su compresión del concepto objeto de estudio.

Las metas de comprensión se diseñaron para que tuvieran una estrecha relación con el contexto.

3.3 Consideraciones de la construcción de la propuesta

Para contribuir a que el estudiante tenga actividades planeadas que le ayuden a comprender los conceptos que involucran la razón de cambio, se elaboró esta secuencia de actividades de instrucción para desarrollar habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación. El trabajo se realizó con base a la revisión de varios investigadores en el área matemática y de la didáctica. Además de las dificultades y errores observados en trabajos de los alumnos en nuestros años de experiencia como docentes en el área matemática y las experiencias de nuestros compañeros de la maestría en *la Enseñanza de las matemáticas*.
La propuesta se basa en una introducción intuitiva e informal al cálculo diferencial. Con la resolución de los problemas se busca desarrollar ideas de variaciones que lleven a la comprensión de los conceptos fundamentales.

Las actividades se presentan en diferentes representaciones (coloquial, algebraico, gráfico y numérico) y requieren las conversiones entre los mismos. Las tablas, gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí. Como expresa Carabús (2002), las tablas contemplan los aspectos numéricos y cuantitativos, las representaciones gráficas potencian las posibilidades de la visualización, las expresiones algebraicas se relacionan con la capacidad simbólica, el lenguaje coloquial se vincula con la capacidad lingüística y es importante para interpretar y relacionar todas las representaciones. La secuencia está conformada por tres bloques. El primer bloque de actividades está dedicado a las razones de cambio, el segundo bloque contempla la razón de cambio instantánea y en tercer bloque se obtiene la derivada por medio de la razón de cambio instantánea, las actividades requieren de conocimientos previos como el manejo de los conceptos de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas. El alumno debe alcanzar los siguientes conocimientos y habilidades: representar variables, evaluar y gráficar funciones, cuantificar cambios por medios numéricos, geométricos o analíticos y analizar el comportamiento de esos cambio, habilidades para calcular cambios relativos (velocidad media y velocidad instantánea), interpretar la velocidad promedio como la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.

3.4 Consideraciones para la Enseñanza-aprendizaje de la razón de cambio.

Aspectos a considerar para obtener la propuesta.

Esto implica realizar un análisis el concepto y de los aprendizajes que se desean desarrollen los estudiantes:

Ya que se revisaron los antecedentes conceptuales necesarios para este trabajo, las teorías de como aprende el alumno y la metodología de que se utilizara para la propuesta, el siguiente paso es explorar los antecedentes de cómo se enseña y aprende el concepto de Razón de cambio, así de como también se usa y por último que es una secuencia didáctica.

Aprendizajes de los estudiantes para poder entenderla y usarla la razón de cambio.

Los estudiantes para entender la derivada necesitan conocimientos previos como el concepto de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas, pendiente de la recta y recta secante, recta tangente, límite de una función, razón de cambio promedio e instantánea. Su resolución requiere de habilidades como representar variables, evaluar y gráficar funciones, cuantificar cambios por medios numéricos, geométricos o analíticos y analizar el comportamiento de esos cambios, análisis e interpretación gráfica de funciones, análisis e interpretación del comportamiento de una situación en un intervalo muy pequeño, modelación de funciones como recurso para resolver problemas cotidianos y la concepción de la velocidad y la aceleración, la velocidad promedio como la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.
Para usarla se necesita la habilidad de relacionarla con los diferentes procesos de cambio instantáneo de los fenómenos físicos y sociales, en la industria por ejemplo es necesario relacionarla con la maximización y minimización de procesos de fabricación.

Forma de aprendizaje de la razón de cambio

El aprendizaje de la derivada, se da como todo concepto matemático, hay diferentes corrientes entre las que destacan que el conocimiento matemático se da cuando se logra entender los conceptos desde diferentes representaciones, Duval (1998) expresa que el uso de distintas representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a comprender un concepto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (Rico, 2000, D´Amore, 2002).

Otros investigadores como (Cristóbal Escalante, 2010), documentan los avances en la conceptualización matemática y expresan que la compresión profunda solo se da cuando se logra aplicarla fuera del ámbito escolar, también nos muestra diferentes enfoques en los cuales nos menciona que la actividad matemática debe de entenderse como un proceso social y que además los conceptos matemáticos solo se logran cuando se utilizan diferentes representaciones, se destaca el uso de las nuevas tecnologías como herramientas para la comprensión matemática.

Se alcanza una "competencia matemática", si muestra: comprensión conceptual, es decir comprensión de conceptos, operaciones y relaciones matemáticas. Por lo que se deduce que la derivada se aprende cuando se logran entender los conocimientos previos involucrados como variable, función, variación, razón de cambio instantáneo, limite, pendiente, secante, tangente y sus representación gráfica, numérica y la algebraica, su relación y su aplicación fuera del salón de clase.

Consideraciones de cómo se desarrollan las habilidades

Las habilidades se desarrollan aplicando los conceptos y metodologías matemáticas a problemáticas reales (Cristóbal Escalante, 2010), entonces para desarrollar habilidades en la derivada, primero deberá aplicar cada uno de los conceptos con los cuales comprendió dicho concepto, esto es resolver problemáticas reales con variaciones, razón de cambio instantánea, pendiente, limite etc., y la relación que guardan, con ello deberá alcanzar la habilidad de transferir el concepto de la derivada a problemáticas reales y significativas. Por otro lado los estudiantes deberán también aprender a trabajar en equipo y discutir sus conjeturas con otros estudiantes sobre problemáticas similares que involucren los mismos conceptos, solo así podrán tener una habilidad matemática (Cristóbal Escalante, 2010; García Oliveros, Serrano de Plazas, & Díaz Rojas, 2002).

Definición de la secuencia didáctica

Según Obaya (2000) se entiende como secuencia didáctica una propuesta flexible de actividades instruccionales que puede y debe, adaptarse a la realidad concreta a la que intenta servir, de manera que sea susceptible a un cierto grado de estructuración del proceso enseñanza-aprendizaje con objeto de evitar la improvisación constante y la dispersión, mediante un proceso reflexivo en el que participan los estudiantes, los profesores, los contenidos de la asignatura y el contexto. Es también una herramienta que permite analizar e investigar la práctica educativa.

Por otro lado la secuencia didáctica contiene una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí. Esta serie de actividades, que pretende enseñar un conjunto determinado de contenidos. Según las características de las actividades y la función que desempeñan, se puede identificar diversas fases en una secuencia didáctica: presentación, comprensión, práctica y transferencia.

La fase de presentación tiene diversos propósitos, como despertar en los alumnos el interés o la necesidad de aprenderlos contenidos que se pretenden enseñar en la lección.

En la fase de comprensión se propone que el alumno procese información, comprenda y obtenga información sobre un tema que necesitará en actividades posteriores.

Las actividades de la fase de ejercitación proponen a los alumnos que practiquen las distintas destrezas para resolver los ejercicios de esta fase son de producción, aunque el grado de creatividad que pueden demandar al alumno puede ser variable.

La fase de transferencia consiste en una o varias actividades que representan el punto culminante de una secuencia y por tanto, suponen el estadio final de un proceso de preparación y desarrollo. Se trata de actividades comunicativas y de respuesta abierta que demandan al alumno un importante componente de creatividad. Son actividades de aplicación de lo aprendido del tipo juego teatral, narraciones, encuestas, debates, resolución de problemas, elaboración de informes, etc.

Después de revisar la literatura de la razón de cambio y los conceptos preliminares para su comprensión, la metodología que se utilizará para la propuesta, las teorías de cómo se aprende de forma general y también como se aprende la razón de cambio. Nos corresponde redactar nuestra propuesta de forma detallada, esta secuencia deberá contener los datos de identificación, inicio, desarrollo y fin de cada actividad, recursos, materiales y los elementos con los cuales se evaluaran el grado de desempeño del alumno al concluir cada una de las etapas.

3.5 Propuesta de la secuencia didáctica de la razón de cambio desde la variación.

Las fases de la secuencia didáctica son tres:

1. Razón de cambio.
2. Razón de cambio promedio.
3. Razón de cambio instantánea.

La primera parte de actividades está dedicada a la razón de cambio, puesto que en las actividades humanas es necesario saber cómo cambian los procesos, las cantidades, las poblaciones y las distintas percepciones del mundo que nos rodea, los cambios de algún parámetro pueden estar relacionados con otros cambios; demanda del estudiante, el manejo de los conceptos de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas, pendiente de la recta y recta secante. Su resolución requiere de habilidades como representar variables, evaluar y gráficar funciones, cuantificar cambios por medios numéricos, geométricos o analíticos y analizar el comportamiento de esos cambios.

La segunda parte corresponde a la razón de cambio promedio, cada día nos enfrenta a diversas razones de cambio de situaciones sociales, económicas y naturales, entre otras, en las cuales deseamos saber cuál es el valor más grande o el más pequeño (el máximo y el mínimo, respectivamente), su crecimiento o su disminución en un período de tiempo determinado. Se trata de problemas en los cuales se estudian fenómenos relacionados con la variación de una magnitud que depende de otra, por lo cual es necesaria una descripción y una cuantificación de dichos cambios por medio de gráficas, tablas y modelos matemáticos. Así como en el ejemplo del coche que recorre 100 kilómetros en dos horas, los problemas que llevan a calcular la razón de cambio promedio arrojan resultados en los cuales se determina una variación que no necesariamente existe en la realidad a cada momento; en otras palabras, no se sabe si el coche ha mantenido esta velocidad a lo largo de las dos horas, sino que se estima el promedio de unidades de distancia al cual debió avanzar para completar dicho recorrido.

La tercera parte se centra en el tratamiento de los cambios instantáneos; estos cambios también pueden tener relación con cambios instantáneos de otras situaciones; demanda del estudiante el manejo de razón de cambio, razón de cambio promedio, recta secante, pendiente, recta tangente, límite de funciones; requiere de habilidades de análisis e interpretación gráfica de funciones, análisis e interpretación del comportamiento de una situación en un intervalo muy pequeño, para ello las actividades contemplan la utilización de la razón de cambio modelación de funciones como recurso para resolver problemas cotidianos y la concepción de la velocidad y la aceleración.

Después de describir el contenido de la secuencia, los tres temas se presentan en un formato que es utilizado en el Colegio de Bachilleres de Estado de Quintana Roo.

<table>
<tr><th colspan="3">Secuencia didáctica de la razón de cambio instantánea desde la variación</th></tr>
<tr><td colspan="3">Tema 1: Razón de cambio</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito:
➢ Conceptualizar cambios, variaciones y la relación entre cambios.
➢ Lograr entender y expresar la razón de cambio.
➢ Lograr entender y expresar los cambios de la gráfica función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizajes esperados:
➢ Reconocer, expresar y calcular razón de cambio
➢ Asociar la razón de cambio con los fenómenos naturales y sociales de su entorno.
➢ expresar los cambios de la gráfica.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Inicio</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo: 2 sesiones (100 min)</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>Recursos didácticos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Evaluación diagnóstica</td><td>Evaluación diagnóstica</td><td>Evaluación diagnóstica.</td></tr>
<tr><td>Mediante una lluvia de ideas grupal indagar el grado de conocimientos de los alumnos a cerca del tema:
• ¿Qué es un cambio?
• ¿Qué es una variación?
• ¿Qué es una razón de cambio?
• ¿Qué conceptos están involucrados?
• ¿Cuál es su importancia?
• ¿su aplicación?</td><td>• Lluvia de ideas
• Pizarrón
• Gises o marcadores
• Libreta de apuntes del alumno
• Libros
• Internet</td><td>Responder un cuestionario</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo: 2 sesiones (100 min)</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>Recursos didácticos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>• Mediante presentación el docente expone la razón de cambio.
• El alumno deberá investigar para conceptualizar la razón de cambio e identificar cambios cualitativos y cuantitativos, también se le presenta la forma de calcular la razón de</td><td>• Anexo 1
• Libreta de apuntes del alumno
• Libros</td><td>Mediante ejercicios logre entender los cambios y la razón de cambio y esbozar la gráfica de una función mediante la razón de cambio.</td></tr>
</table>

cambio y expresarla mediante incrementos de variables. Esto esta presentado en los ejercicios 1 al 5 del anexo 1.		
Cierre		
Tiempo: 1 sesiones (50 min)		
Actividades	***Recursos didácticos***	***Evaluación***
• Se proponer ejercicios complementarios para gráficar funciones y calcular los cambios de las variables y la relación que guarda entre sí.	• Anexo 1 • Libreta de apuntes del alumno • Libros	Mediante ejercicios calcule los puntos críticos de la gráfica de la función.

<table>
<tr><td colspan="3">Secuencia didáctica de la razón de cambio instantánea desde la variación</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tema 2: Razón de cambio promedio</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito:
➢ Lograr entender y expresar la razón de cambio promedio.
➢ Lograr entender y expresar los cambios de la gráfica función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizajes esperados:
➢ Reconocer, expresar y calcular razón de cambio promedio
➢ asociar la razón de cambio promedio con la pendiente de la recta secante
➢ expresar los cambios de la gráfica de la función por medio de la pendiente de la recta secante</td></tr>
<tr><td colspan="3">Inicio</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo: 2 sesiones (100 min)</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>Recursos didácticos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Evaluación diagnóstica</td><td>Evaluación diagnóstica</td><td>Evaluación diagnóstica</td></tr>
<tr><td>Mediante una lluvia de ideas grupal indagar el grado de conocimientos de los alumnos a cerca del tema:
• ¿Qué es una razón de cambio promedio?
• ¿Qué conceptos están involucrados?
• ¿Cuál es su importancia?
• ¿su aplicación?</td><td>• Lluvia de ideas
• Pizarrón
• Gises o marcadores
• Libreta de apuntes del alumno
• Libros
• Internet</td><td>Responder un cuestionario</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo: 2 sesiones (100 min)</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>Recursos didácticos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>• Mediante presentación el docente expone la razón de cambio promedio.
• Se presenta al alumno la forma de calcular la razón de cambio promedio y expresarla mediante incrementos de variables en los ejercicios 1 y 2 del anexo 2
• El alumno debe asociar la razón de cambio promedio con la</td><td>• Anexo 1
• Libreta de apuntes del alumno
• Libros</td><td>Mediante ejercicios logre calcular razones de cambio promedio y esbozar la gráfica de una función mediante la razón de cambio.</td></tr>
</table>

pendiente de la recta secante y además identificar los cambios de la función mediante la pendiente de la recta secante entre 2 puntos. Para ello deberá resolver el ejercicio 3 del anexo 2.		
Cierre		
Tiempo: 1 sesiones (50 min)		
Actividades	***Recursos didácticos***	***Evaluación***
• Proponer ejercicios complementarios para gráficar funciones y calcular las pendientes de la recta secante en los puntos críticos.	• Anexo 1 • Libreta de apuntes del alumno • Libros	Mediante ejercicios calcule los puntos críticos de la gráfica de la función.

Secuencia didáctica de la razón de cambio instantánea desde la variación		
Tema 3: Razón de cambio instantánea		
Propósito: ➢ Entender cambios instantáneos mediante la razón de cambio promedio para intervalos diminutos. ➢ Lograr entender y expresar la razón de cambio instantánea mediante el límite de la razón de cambio promedio.		
Aprendizajes esperados: ➢ Reconocer, expresar y calcular razón de cambio instantánea. ➢ asociar el límite de la razón de cambio promedio con la razón de cambio instantánea. ➢ Calcular razón de cambio instantánea de funciones.		
Inicio		
Tiempo: 2 sesiones (100 min)		
Actividades	***Recursos didácticos***	***Evaluación***
Evaluación diagnóstica	Evaluación diagnóstica	Evaluación diagnóstica
Mediante una lluvia de ideas grupal indagar el grado de conocimientos de los alumnos a cerca del tema: • ¿Qué es una razón de cambio instantánea? • ¿Qué conceptos están involucrados? • ¿Cuál su importancia? • ¿Cuál es su aplicación?	• Lluvia de ideas • Pizarrón • Gises o marcadores • Libreta de apuntes del alumno • Libros • Internet	Mediante cuestionario responda a los cuestionamientos
Desarrollo		
Tiempo: 2 sesiones (100 min)		
Actividades	***Recursos didácticos***	***Evaluación***
• Mediante presentación el docente expone la razón de cambio instantanea. • Para que el alumno comprenda la razón de cambio instantánea, se le presenta calcular la razón de cambio promedio con intervalos cada vez mas pequeños en el ejercio 1 del anexo 3. • Resolver el ejercicio 2	• Anexo 2 • Libreta de apuntes del alumno • Libros	Mediante ejercicios logre calcular razones de cambio instantánea y esbozar la gráfica de una función mediante la razón de cambio instantánea.

del anexo 3 para calcular razón de cambio instantánea mediante el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ y asociarla con la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la función.		
Cierre		
Tiempo: 1 sesiones (50 min)		
Actividades	***Recursos didácticos***	***Evaluación***
• Proponer ejercicios complementarios para gráficar funciones y calcular la recta tangente en un punto dado de la función para poder describir cambios en la gráfica.	• Libreta de apuntes del alumno • Libros	Mediante ejercicios calcule los puntos críticos de la gráfica de la función.

Se cuenta con tres anexos: El primero tiene ejercicios de conceptualización y cambios, variaciones y razón de cambio; el segundo contempla la razón de cambio promedio y el tercero comprende la razón de cambio instantánea, los objetivos y los ejercicios se planificaron de acuerdo al programa de bachillerato, en el caso del número de ejercicios se espera que sean pertinentes para entender y no para que esta sea una propuesta inalcanzable. Adicionalmente se agrego el anexo 4, en el cual se presenta la obtención de la derivada mediante la razón de cambio instantánea.

CAPITULO 4

Conclusiones

En la educación basada en competencias, la planeación y la evaluación están estrechamente relacionadas, porque se evalúa lo que se planea y de acuerdo a los resultados obtenidos se retroalimenta para replantear el proceso de enseñanza–aprendizaje. Dentro de la evaluación los componentes de la competencia contempla: evaluación de los componentes declarativos, evaluación de los componentes procedimentales y actitudinales. El propósito de la evaluación es obtener información, retroalimentar el proceso e informar al alumno de su propio progreso. Los momentos de la evaluación son: la evaluación inicial o diagnóstica, la evaluación formativa o de proceso y la evaluación final o sumativa.

Entonces el alumno tiene que aprender a hacer las cosas (labor formativa); para después generar su propio conocimiento; con el que finalmente pueda expresar con argumentos válidos y sustentables, sus propias percepciones sobre alguna temática abordada.

Por ello la importancia de la planeación, tener instrumentos que nos sirvan de base en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La secuencia didáctica contiene una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí, que guían la enseñanza de un contenido, según las características de las actividades y la función que desempeñan.

Se identifican diversas fases en una secuencia didáctica: **presentación, comprensión, práctica y transferencia.**

La fase de **presentación** tiene diversos propósitos, como despertar en los alumnos el interés o la necesidad de aprenderlos contenidos que se pretenden enseñar en la lección.

En la fase de **comprensión** se propone que el alumno procese información, comprenda y obtenga información sobre un tema que necesitará en actividades posteriores.

Las actividades de la fase de **ejercitación** proponen a los alumnos que practiquen las distintas destrezas para resolver los ejercicios planteados. Esta fase es de producción y el grado de creatividad que se demanda del alumno es muy variable.

La fase de **transferencia** consiste en una o varias actividades que representan el punto culminante de una secuencia y por tanto, suponen el estadío final de un proceso de preparación y desarrollo. Se trata de actividades comunicativas y de respuesta abierta que demandan al alumno un importante componente de creatividad. Son actividades de aplicación de lo aprendido del tipo juego teatral, narraciones, encuestas, debates, resolución de problemas, elaboración de informes, etc.

Esta investigación está centrada en diseñar un instrumento que sirva para apoyar al estudiante de nivel bachillerato del quinto semestre en la asignatura de cálculo diferencial a comprender con facilidad conceptos de la razón de cambio, para poder resolver distintas problemáticas del ámbito escolar y cotidiano. Lo anterior con el propósito de comprender y obtener la razón de cambio promedio e instantánea y sentar las bases del cálculo diferencial, para ello la secuencia empieza con conceptos necesarios para entender la razón de cambio, se implementaron actividades en un ambiente de resolución de problemas, donde se busca que los alumnos comprendieran estos conceptos de forma simultánea al desarrollo de sus habilidades para elaborar tablas, gráfica y expresión algebraica; y de esta manera pudieran interpretarán situaciones de la vida cotidiana.

Desafortunadamente no se realizó la implementar este instrumento en el aula de la materia de cálculo diferencial, pero se tiene la certeza que funcionara, ya que la planeación, técnicas, instrumentos y evaluación por competencia, se han puesto en práctica en el aula en otras asignaturas del mismo colegio.

La actualización docente constante en los nuevos rumbos de la educación nos han servido para mejorar nuestra labor en el aula en beneficio de los estudiantes y este programa de maestría en enseñanza de las matemáticas con docentes altamente calificados implementada por la Universidad de Quintana Roo nos ha dado la oportunidad de conocer la planeación, estrategias, nuevas tecnologías, instrumentos, teorías de aprendizaje, etc., que nos permiten tener una visión diferente del proceso de enseñanza-aprendizaje y aprender que la planeación es constante y se retroalimenta en cualquier momento del proceso, todo ello con el fin de adecuar de manera particular a cada aula y a cada estudiante.

Esta maestría nos proporcionó conocimiento pedagógico para aquellos que no teníamos formación docente, si tomamos este programa de maestría, fue porque en esos momentos participaba como docente en la universidad de Quintana Roo en las asignaturas de matemáticas, circuitos eléctricos e instrumentación electrónica y veíamos la necesidad de entender mejor como el estudiante aprende matemáticas y calculo, se necesitaba adquirir los nuevos rumbos educativos.

Aprendimos nuevas técnicas de aprendizaje y nos mostró que la planeación es un proceso constante, que el aprendizaje debe centrarse en el alumno y además que este también debe participar en el proceso de planeación para conocer sus expectativas, lo que piensa y lo que le gustaría aprender, el alumno nos debe proporcionar información que nos ayude a planear de acuerdo a sus necesidades.

He tenido la fortuna de comprobar que los conocimientos adquiridos en esta maestría, han proporcionado mejor aprovechamiento por parte de los alumnos, dado que los resultados actuales en los exámenes semestrales a nivel estatal en el plantel al cual pertenecemos, están por encima de la media estatal. También nos ha proporcionado una forma más eficiente de organizar nuestras actividades diarias y con menor esfuerzo que antes podemos desempeñar mejor nuestro quehacer docente en beneficio de nuestros estudiantes.

Anexo 1 Ejemplos de la razón de cambio

Analizaremos fenómenos con magnitudes variables tales como: velocidad, temperatura, costos o algunos otros. Independientemente de la situación, lo importante es que puedas contar con los elementos que te permitan realizar dicho análisis para culminarlo con la obtención de la derivada, concepto que es la representación matemática de la razón de cambio.

La estrategia a seguir es modelar el fenómeno o situación con una función real de variable real, para que con su representación tabular, gráfica o algebraica puedas comprender los conceptos y procedimientos involucrados en tu análisis.

En esta primera fase permitirá al alumno conceptualizar los términos de cambio, variación y razón de cambio.

Ejercicio 1: Conceptualización.

En equipo de 3 personas investigue en 5 fuentes distintas los conceptos de cambio, variación y razón de cambio y formule su propio concepto de estos términos y hacer un mapa conceptual.

Ejercicio 2: Cambios cualitativos

En equipo de 3 personas deberán conseguir 2 pinturas liquidas de diferente tamaño y un recipiente pequeño para poder trabajar.

Procedimiento: primeramente ponga una cantidad de pintura en el recipiente, en seguida vierta unas cuantas gotas de la segunda pintura y agite anotando lo sucedido, posteriormente agregar más pintura anotando sus apreciaciones, esta operación de agregar pintura la deberá realizar 5 veces sin olvidar anotar lo sucedido.

Al final de esta actividad darán sus conclusiones para expresar en sus propias palabras el fenómeno en cuestión.

Ejercicio 3: Cambio climático

Se solicita a los alumnos te deberán tomar la temperatura ambiente de su comunidad por espacio de 8 días y registren los datos en una tabla.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatura								

Posteriormente concluya de forma verbal el fenómeno, anote cuanto aumenta la temperatura por unidad de tiempo, grafique los datos y concluya los cambios que observo.

Ejercicio 4: Relación de temperatura contra el tiempo.

En equipo de 3 personas deberá realizar en sus domicilios esta actividad, por lo que necesitaran poner a calentar agua en un recipiente y tomar la temperatura del agua en diferentes tiempos y registrar sus datos en una tabla.

Tiempo	2 min	4 min	6 min	8 min	10 min	12 min	14 min	16 min
Temperatura								

Posteriormente concluya de forma verbal el fenómeno, anote cuanto aumenta la temperatura por unidad de tiempo, grafique sus datos y busque la relación que guardan.

Anexo 2 Ejemplos de la razón de cambio promedio.

En la vida diaria se determinan razones de cambio de diversas situaciones de tipo natural, Económico, Social. Situaciones en las que nos interesa conocer cuál es el más pequeño (mínimo) o más grande (máximo) valor, como aumenta (crece) o disminuye (decrece) ese valor, en un intervalo de tiempo específico, en general problemas donde se estudian fenómenos relativos a la variación de una cantidad que depende de otra, por lo que se hace necesario describir y cuantificar estos cambios a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas.

Ejercicios de razón de cambio promedio

Ejercicio 1: Por muchos años las carreras de caballos en México han sido una tradición desde la época colonial, se sabe que hay animales que alcanzan los 20 metros por segundo y para detenerlos se necesitan hasta 15 metros. La figura 18, muestra la distancia en metros necesaria para detener un caballo dependiendo de la velocidad en metros por segundo, para entender este fenómeno se proponen unas preguntas.

Si el caballo galopa a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocada una barda a 14.0 metros frente a él, al intentar detenerlo y frenarlo ¿choca el caballo contra la barda? ¿Porque?

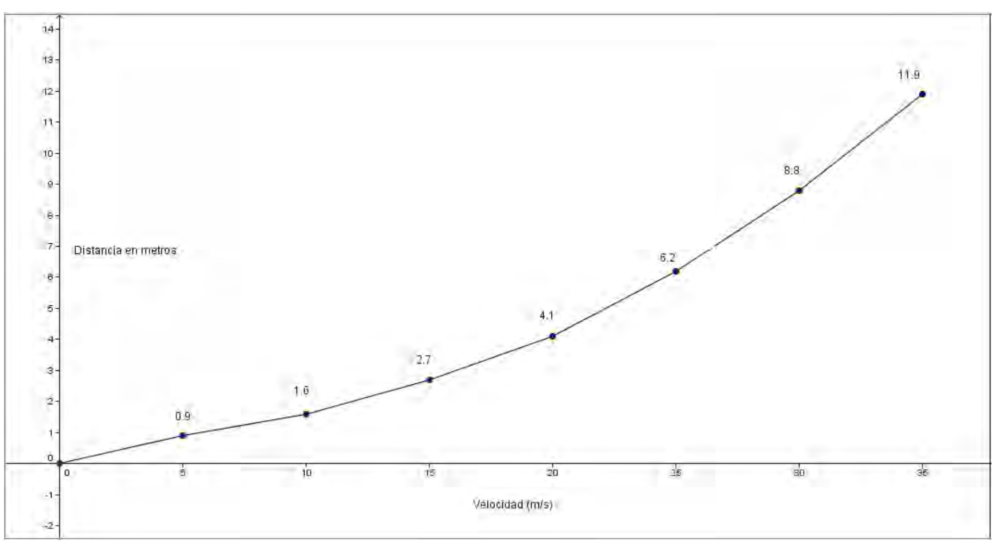


Figura 7: Gráfica de la distancia de frenado de un caballo en relación con la velocidad de galope

I. Para comprender este fenómeno primero debe completar la siguiente tabla.

Velocidad (m/s)	0	5	10	15	20	22.5	25	30	35
Distancia de parada (m)	0		1.6		4.1			8.8	

Tabla 3: Tabulación de la distancia de frenado de un caballo en relación con la velocidad de galope

II. ¿Cuál es el tiempo promedio de frenado para valores comprendidos entre los 20 y 30 m/s y de 30 a 35 m/s?

El tiempo promedio de frenado, es el aumento de parada para cada cambio en la velocidad, es decir, la razón de cambio en distancia, al cambio en velocidad. Por ejemplo, la razón de cambio de frenado de los 10 a los 20 m/s es:

$$\frac{cambio\ en\ distancia}{cambio\ en\ velocidad} = \frac{4.1 - 1.6}{20 - 10} = \frac{2.5}{10} = 0.25\ s$$

Ahora contesta lo siguiente
De 20 a 30 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 30 a 35 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________

III. Calcula el tiempo promedio de frenado para puntos consecutivos e indica para qué velocidad el tiempo promedio de frenado fue mayor y cuál fue.

$$\frac{cambio\ en\ distancia}{cambio\ en\ velocidad} = \frac{0.6 - 0}{5 - 0} = \frac{0.6}{5} = 0.12\ s$$

Ahora contesta lo siguiente

De 5 a 10 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 10 a 15 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 15 a 20 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 20 a 25 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 25 a 30 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________
De 30 a 35 m/s el tiempo promedio de frenado es:______________

¿Choca el caballo contra la barda? ¿Porque? Como puedes observar conforme aumenta la velocidad aumenta la distancia de frenado del caballo, con lo que el tiempo promedio de frenado también va aumentando y por lo tanto debe ser mayor para cuando V = 40 m/s que para las velocidades anteriores. Al calcular el tiempo promedio de frenado de un animal que viaja a 40 m/s y cuya distancia de parada es de 14.0 metros obtenemos:

$$\frac{cambio\ en\ distancia}{cambio\ en\ velocidad} = \frac{14 - 11.9}{40 - 35} = \frac{2.1}{5} = 0.42\ s$$

Y como el tiempo promedio de frenado para un animal que viaja a 35 m/s es 0.62, entonces el tiempo necesario para el caballo que viaja a 40 m/s **no le es suficiente la distancia de 14 metros para frenar, por lo que, el animal irremediablemente chocaría contra la barda.**

Resumiendo en **cálculo** se utiliza la letra griega Δ (delta) para denotar el cambio o la diferencia, entonces Δd es el cambio en distancia y Δv el cambio en velocidad por lo que:

$$\boldsymbol{\frac{cambio\ en\ distancia}{cambio\ en\ velocidad} = \frac{d_2 - d_1}{v_2 - v_1} = \frac{\Delta \mathrm{d}}{\Delta \mathrm{v}}}$$

En general a la diferencia en las coordenadas x de los puntos de la gráfica de una función f se le llama incremento de x, se le denota mediante Δx que es igual a x2 – x1 es decir, Δx = x2 – x1 asimismo, Δy = y2 – y1 al formar el cociente de cambio en **y** con los cambios en **x** podemos escribir:

$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ En donde a este cociente le llamamos “Razón de cambio promedio”

Ejercicio 2: En el EMSad coba se tiene un programa de recolección y separación de desechos inorgánicos para su reciclado, la tabla muestra la cantidad en kilogramos de PEP generados durante la semana.

	inicio	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
Días (x)	0	1	2	3	4	5
Kg. PEP (y)	0	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5

Tabla 4: tabulación de kilogramos de PEP generados durante la semana

Si gráficamos los puntos (x,y) en el plano cartesiano y los unes te queda una gráfica como la siguiente:

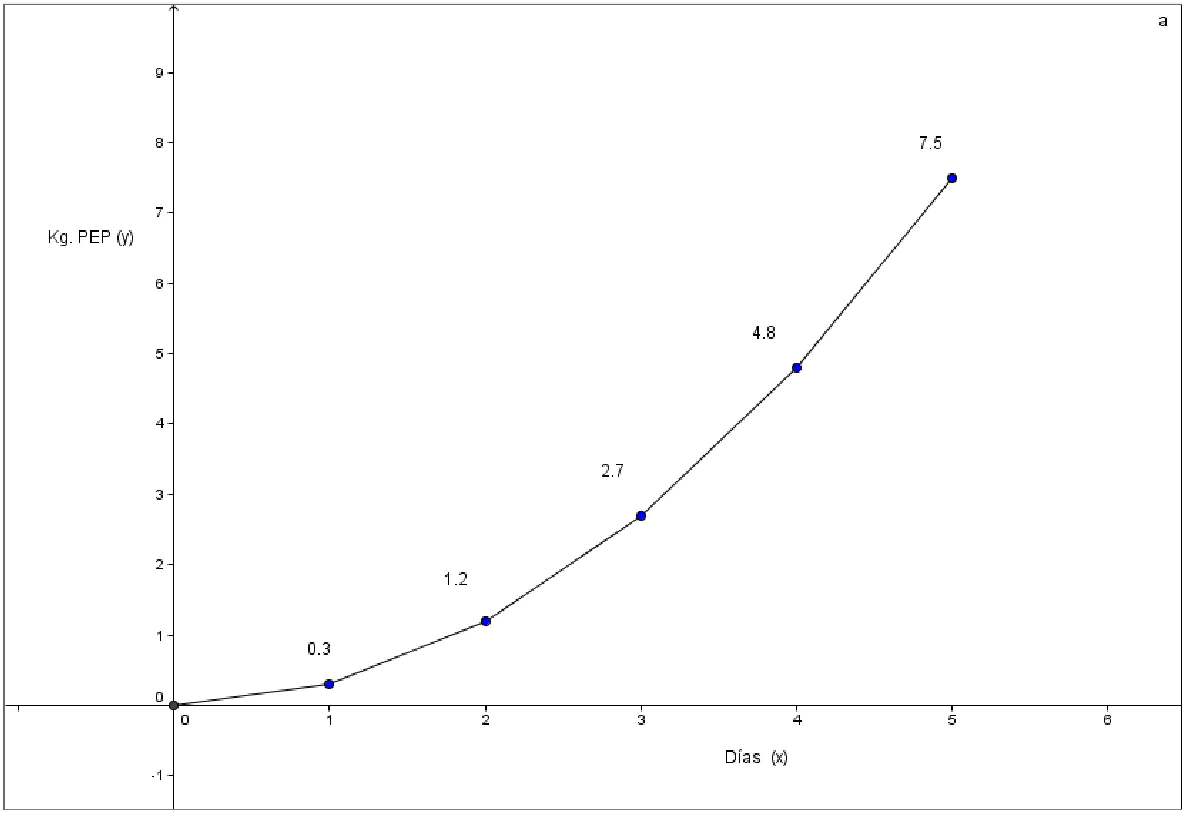
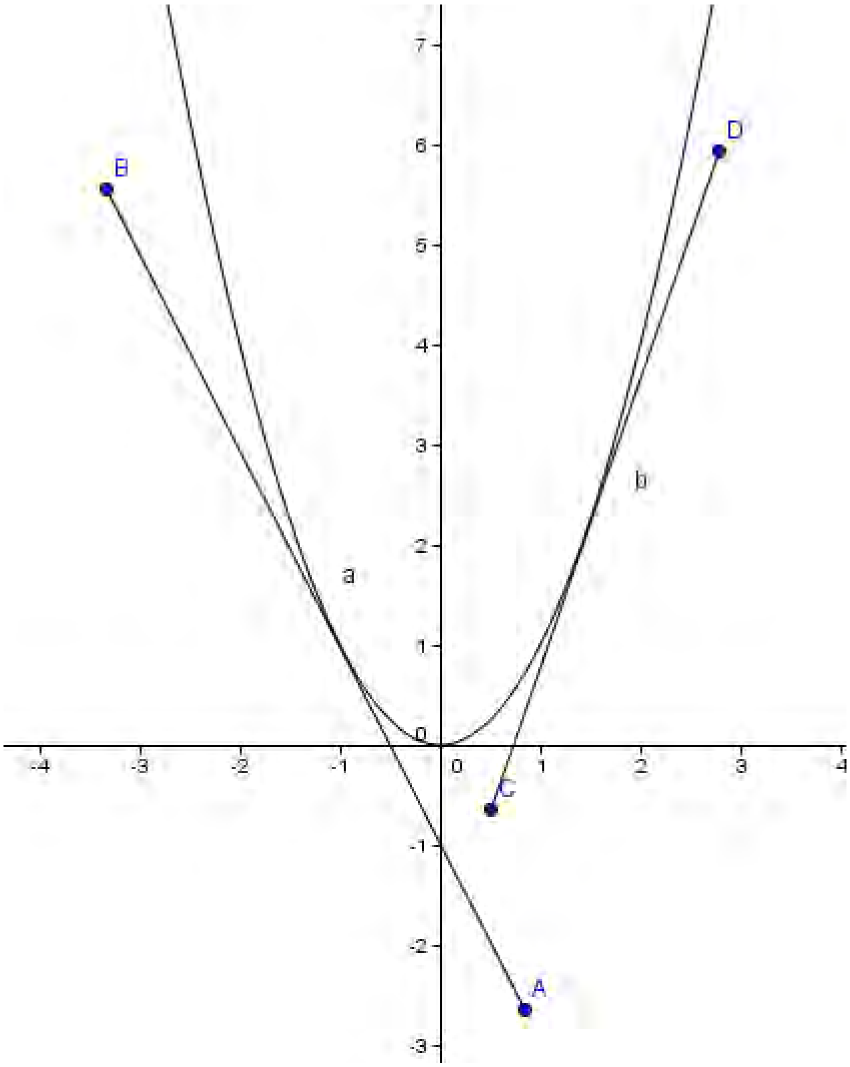


Figura 8: Gráfica de la recolección de PEP durante la semana

¿Cuál es la razón de cambio promedio de PEP recolectado entre lunes y martes?
Aplicando el concepto de razón de cambio promedio

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.2 - 0.3}{2 - 1} = \frac{0.9}{1} = 0.9$$

Como ya se había comentado siempre que se desea obtener la “razón de cambio promedio para cualquier pareja de puntos tiene que utilizarse el cociente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$



$x_2 - x_1$

Y recordando conceptos de tu curso de matemáticas te podrás dar cuenta que: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta

Si tomamos a escala una parte de la gráfica y los puntos para los cuales se calculó la razón de cambio promedio (pendiente) entre lunes y martes, puedes observar claramente que la razón de cambio promedio es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) es(Figura 20):

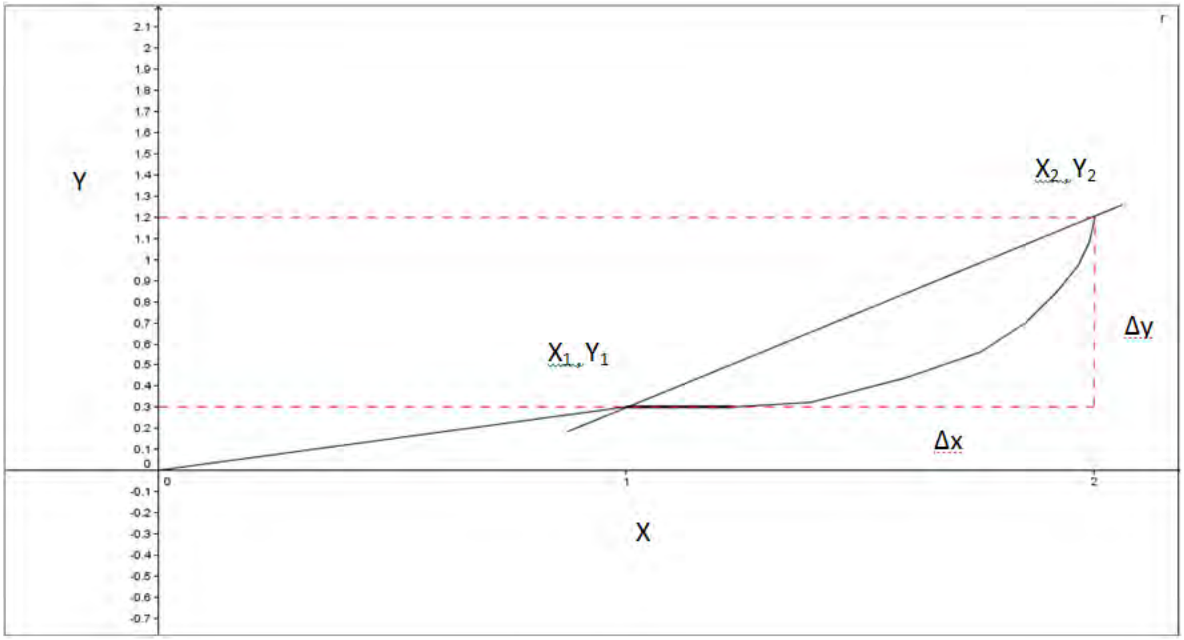


Figura 9: Gráfica de la recta secante entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

Se puede asegurar que cuando se realizan los cálculos de razones de cambio promedio, al mismo tiempo se está calculando la pendiente de rectas secantes (para cada pareja de puntos).

Calcula las razones de cambio promedio (pendientes de rectas secantes) para días consecutivos.

Lunes a martes $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.9$ martes a miércoles $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Miércoles a jueves $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ jueves a viernes $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para este ejemplo puedes concluir que al calcular las pendientes de las rectas secantes (razones de cambio promedio) todas resultaron positivas (ángulo de inclinación con respecto al eje x menor de 90º) ahora contesta las preguntas: ¿Qué pendiente fue mayor? ¿Cuál es la razón de cambio promedio de lunes a viernes?

Ejercicio 3: Un estudiante en un partido de futbol da un pase a su compañero, la pelota sigue una trayectoria de acuerdo con la siguiente función: $f(x)= -x^2 +3x$ donde x es el tiempo en segundos.

Vamos a construir una tabla calculando valores para x desde 0 a 3 y tomando intervalos de tamaño 0.2 entonces.

$f (0.2) = -(0.2)^2 + 3(0.2) = 0.56$ $f (0.4) = -(0.4)^2 + 3(0.4) = 1.04$

$f (0.6)= -(0.6)^2 + 3(0.6) = 1.40$ $f (0.8) = -(0.8)^2 + 3(0.8) = 1.76$

Ahora calcula el valor numérico de f(0), f (1), f (1.2), f (1.4), f (1.6), f (1.8), f (2) , f (2.2), f (2.4), f (2.6), f (2.8), Y f (3); anota los resultados obtenidos en una tabla y comprueba que son los siguientes:

Tiempo X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
Altura f(x)	0	0.56	1.04	1.4	1.76	2	2.16	2.24	2.24	2.16	2	1.76	1.44	1.04	0.56	0

Tabla 5: Tabulación de la trayectoria del balón en el intervalo [0,3]

Al gráficar estos puntos en el plano cartesiano obtenemos la siguiente gráfica (Figura 21):

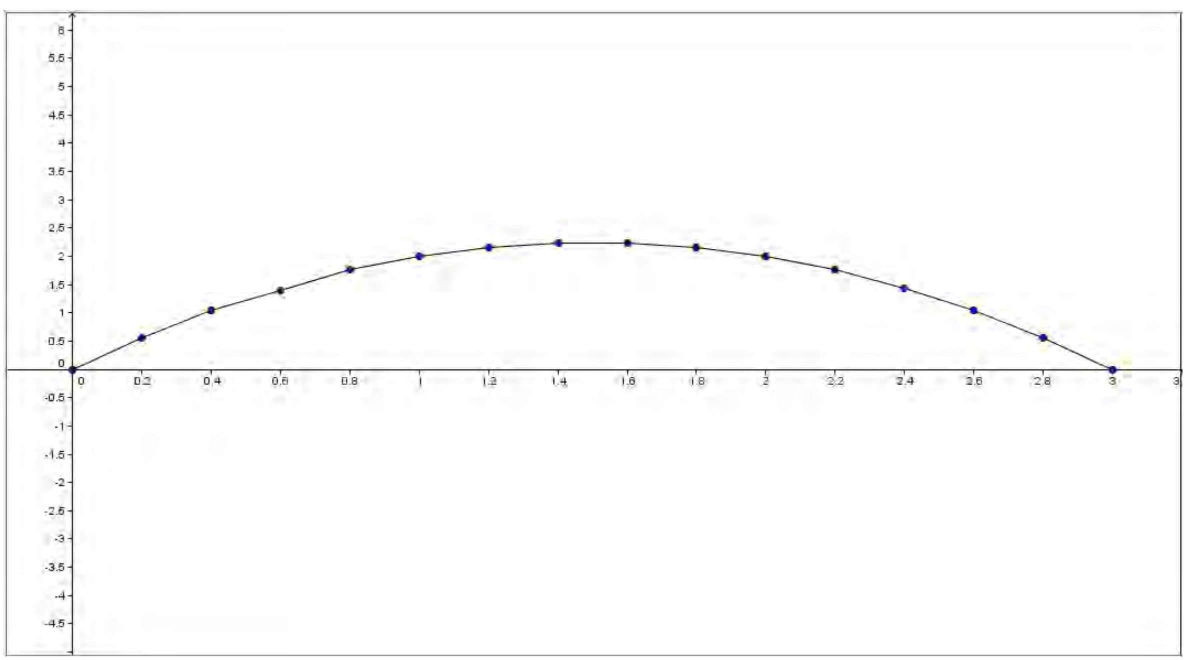


Figura 10: Gráfica de la función $f(x)= -x^2 +3x$ en el intervalo de [0,3]

Ahora calculemos las pendientes de las rectas secantes (razones de cambio promedio) para puntos sucesivos.

Para los puntos (0,0) y (0.2, 0.56) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.56-0}{0.2-0} = \frac{0.56}{0.2} = 2.8$

Para los puntos (0.2, 0.56) y (0.4, 1.04) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.04-0.56}{0.4-0.2} = \frac{0.48}{0.2} = 2.4$

Para los puntos (0.4, 1.04) y (0.6, 1.4) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (0.6, 1.4) y (0.8, 1.76) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (0.8, 1.76) y (1, 2) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (1, 2) y (1.2, 2.16) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (1.2, 2.16) y (1.4, 2.24) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (1.4, 2.24) y (1.6, 2.24) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

....

Para los puntos (2.8, 0.56) y (3,0) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

También vamos a calcular las pendientes de las rectas secantes para parejas de puntos que se encuentran a la misma altura.

Para los puntos (1.4, 2.24) y (1.6, 2.24) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.24-2.24}{1.6-1.4} = \frac{0.0}{0.2} = 0$

Para los puntos (1.4, 2.24) y (1.6, 2.24) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (1.2, 2.16) y (1.8, 2.16) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (1, 2) y (2, 2) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para los puntos (0.8, 1.76) y (2.2, 1.76) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Con los cálculos realizados puedes asegurar lo siguiente: Las pendientes de las rectas secantes cuando la función es creciente son positivas, las pendientes de las rectas secantes horizontales (paralelas al eje x) valen cero y las pendientes de las rectas secantes cuando la función decrece son negativas (ver Figura 22).

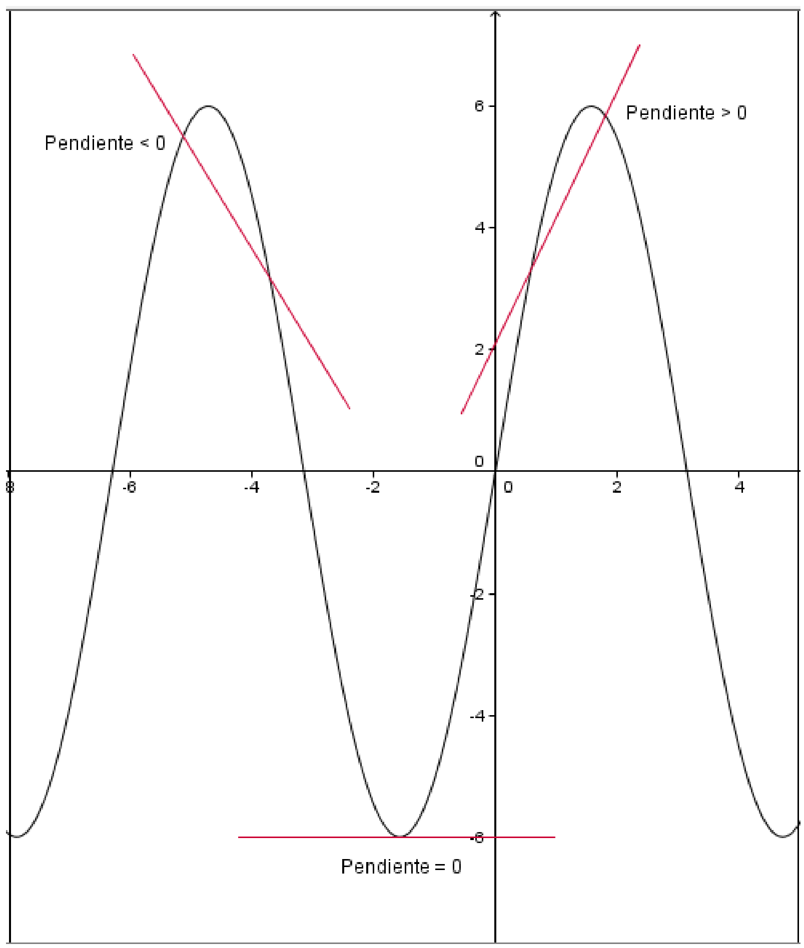


Figura 11: gráfica de las pendientes de las rectas secantes cuando la función crece y decrece

Anexo 3 Ejemplos de la razón de cambio instantánea.

Uno de los objetivos principales de esta sección, es analizar e interpretar la razón de cambio de una función, es decir, la velocidad con que cambian las cantidades que están involucradas en una situación. Por ejemplo, si se observa a un automóvil que se mueve por una carretera recta, se puede calcular la velocidad promedio que éste lleva en un intervalo de tiempo. Si se deseara conocer su velocidad en un preciso instante, se necesitaría tener un sensor de movimiento, pero si la persona que observa el movimiento conduce el automóvil, con sólo observar el velocímetro tiene la velocidad instantánea.

Ejercicio 1: La preparación de la tierra para el cultivo se lleva de muchas maneras en el país, especialmente en Quintana Roo, se practica hasta la fecha la tumba, rosa y quema, en la época previa a la siembra se queman una gran cantidad de áreas para el cultivo del maíz, esto produce contaminación ambienta la cual sigue un modelo matemático que simula las toneladas de Dióxido de carbono vertidas a la atmosfera, esta ecuación esta expresada por: $f(x) = 0.2x^2 + 2x$, donde x es el tiempo en horas y f(x) son las toneladas de contaminantes.

Primero debemos contestar algunas preguntas: ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de contaminantes desde que se empiezan a quemar?

¿Entre las 0 y las 2 horas?
Primeramente completa la tabla de valores para valores de x entre 0 y 18 con incremento de 2, para ello calculamos:
$f(2)= 0.2(2)^2 + 2(2)= 4.8$ y así sucesivamente(Tabla 18).

Tiempo en Horas	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
F(x) toneladas	0	4.8		19.2		40		67.2		

Tabla 6: Tabulación de valores de la función $f(x) = 0.2X^2 + 2X$

Para los puntos (0, 0) y (2, 4.8) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.8-0}{2-0} = \frac{4.8}{2} = 2.4$ Ton/h

¿Entre las 2 y las 4 horas?

Para los puntos (2, 4.8) y (4, 11.2) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11.2-4.8}{4-2} = \frac{6.4}{2} = 3.2$ Ton/h

¿Entre las 12 y las 14 horas?

Para los puntos (12,52.8) y (14,67.2) tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11.2-4.8}{4-2} = \frac{6.4}{2} = 3.2$ Ton/h

Al realizar el esbozo de la gráfica tenemos (Figura 23):

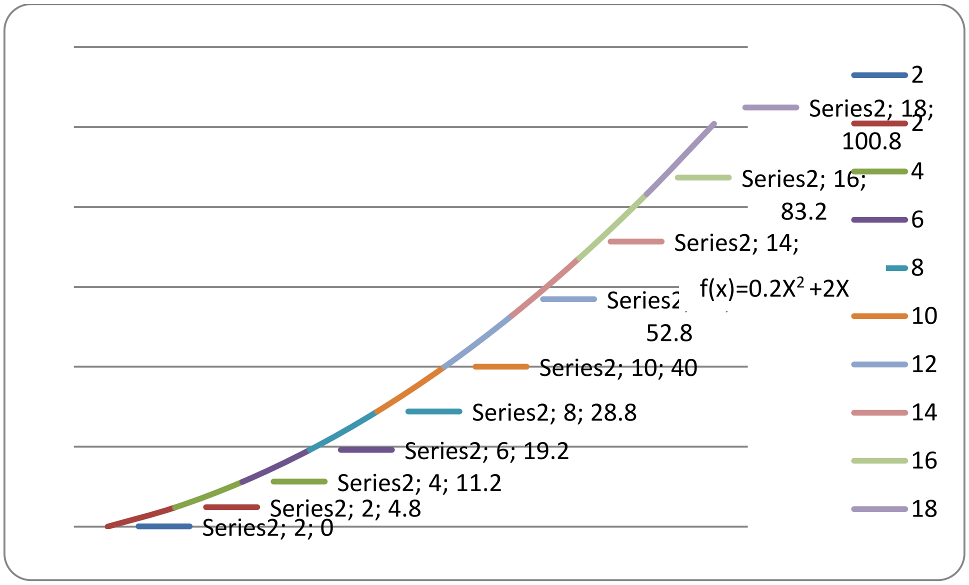


Figura 12: Gráfica de la función $f(x)= 0.2X^2 +2X$ en el intervalo de [0,18]

¿Cuál es la liberación de cambio instantánea de toneladas de contaminantes exactamente 8 horas después?

Para determinar este valor tenemos que calcular la razón de cambio promedio para intervalos de tiempo cada vez más y más pequeños, estos intervalos deben iniciar en el "tiempo" que deseamos analizar, así para un tiempo de 8 horas se han liberado:

Primeramente calculamos los valores y tabulamos (Tabla 19):

Tiempo en horas	8	8.5	8.1	8.01	8.001
f(x) en toneladas	28.8	31.5	29.3	28.9	28.805

Tabla 7: Tabulación de valores de la función $f(x) = 0.2X^2 + 2X$

Ahora calculamos la razón de cambio promedio para estos valores:

De 8 a 8.5 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{31.5-28.8}{8.5-8} = \frac{2.65}{0.5} = 5.3$ Toneladas/h

De 8 a 8.1 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29.3-28.8}{8.1-8} = \frac{0.522}{0.1} = 5.22$ Toneladas/h

De 8 a 8.01 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{31.5-28.8}{8.01-8} = \frac{0.05202}{0.01} = 5.202$ Toneladas/h

De 8 a 8.001 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{28.8052002-28.8}{8.001-8} = \frac{0.0052002}{0.001} = 5.2002$ Toneladas/h

Analizando el proceso de cálculo y los resultados que se van obteniendo y si tomáramos intervalos de tiempo "demasiado pequeños" concluimos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende o está muy, pero muy "cerca" del valor 5.2 toneladas y podemos tomar este valor como la liberación de cambio instantánea, con lo cual contestamos la pregunta planteada.

Ejercicio 2: Un globo asciende verticalmente, después de x horas su distancia f de la tierra medida en kilómetros. Está determinada por la función $f(x)=-2x^2+4x$, contesta lo siguiente:

1. Realiza un esbozo de la gráfica de la función y contesta la siguiente pregunta ¿sube indefinidamente el globo? ¿Por qué?
2. ¿Cuál es la velocidad instantánea exactamente 1/2 hora después que inició su ascenso el globo?

Aplicando el método anterior, tomamos intervalos de tiempo cada vez más y más "pequeños" y que inicien en un tiempo de 0.5 horas, tabulamos (Tabla 20).

Tiempo en Horas	0.5	0.51	0.501	0.5001
F(x) en kilómetros	1.5	1.5198	1.501998	1.50019998

Tabla 8: Tabulación de valores de la función $f(x)=-2X^2+4x$

De 0.5 horas a 0.51 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.5198-1.5}{0.51-0.5}=\frac{0.0198}{0.01}=1.98$ Km/h

De 0.5 horas a 0.501 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.501998-1.5}{0.501-0.5}=\frac{0.001998}{0.001}=1.998$ Km/h

De 0.5 horas a 0.5001 horas. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.50019998-1.5}{0.5001-0.5}=\frac{0.0001998}{0.0001}=1.9998$ Km/h

Si continuamos tomando intervalos más y cada vez más "pequeños", es decir, si $\Delta x \to 0$ podemos concluir que el valor "límite" o la' velocidad instantánea cuando x=1/2 horas es **2** km/h.
Haciendo un análisis de los dos problemas estudiados, para poder calcular la razón de cambio instantánea tomamos el incremento $(\Delta x = x_2 - x_1)$ cada vez más y más pequeño, es decir, Δx tendiendo a cero que expresamos así $\Delta x \to 0$ y observamos que en los dos casos obtuvimos un valor "limite". A este proceso lo podemos enunciar como "límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ que matemáticamente se escribe (figura 24):

$$\boldsymbol{Raz\acute{o}n\ de\ cambio\ inst\acute{a}ntanea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 13: Razón de cambio instantánea

A continuación se muestra gráficamente el proceso Δx →0, la recta secante se convierte en recta tangente (Figura 25).

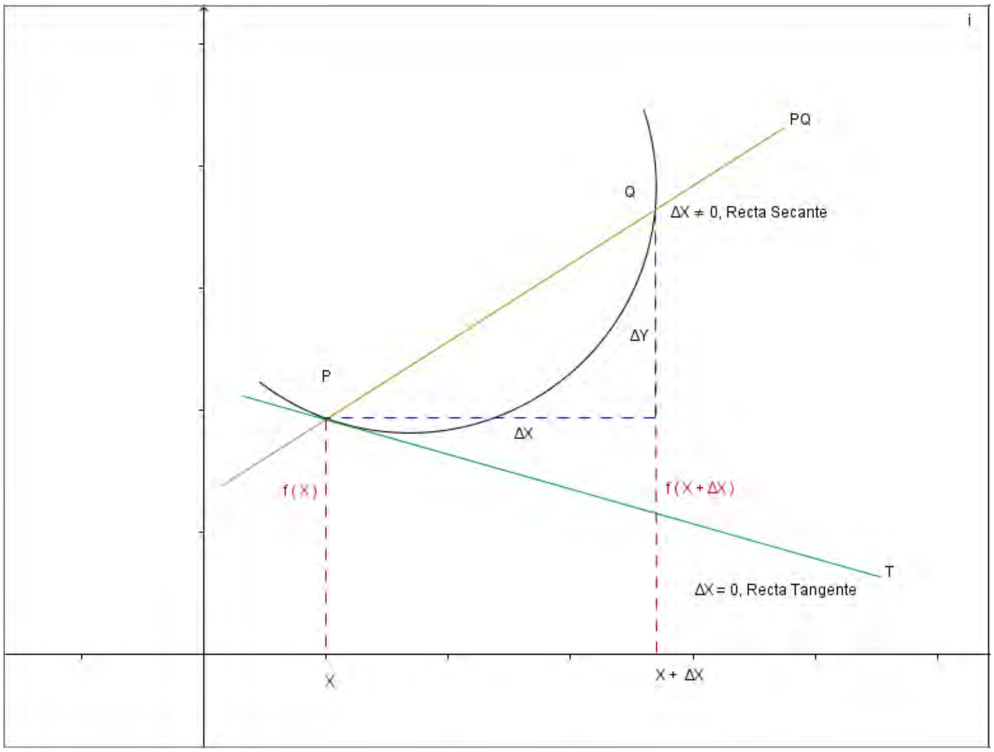


Figura 14: Gráfica que muestra el proceso de la recta secante convertida en recta tangente cuando Δx →0

La secante PQ y la recta tangente T prácticamente están en la misma posición cuando Δx →0, es decir, la razón de cambio instantánea numéricamente vale lo mismo que la pendiente de la recta tangente T (secante PQ) o mejor dicho (Figura 26):

$$\boldsymbol{Pendiente\ de\ la\ recta\ tangente = La\ raz\acute{o}n\ de\ cambio\ instant\acute{a}nea\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Figura 15: Fórmula para calcular la razón de cambio instantánea

Si **y_1= f(x)**, y_2= f(x+Δx) entonces y_2-y_1 = **Δy = f(x+Δx) – f(x)**, y Podemos utilizar también la notación para calcular la razón de cambio instantánea como (Figura 27):

$$\boldsymbol{Raz\acute{o}n\ de\ cambio\ instant\acute{a}nea\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Figura 16: Fórmula para calcular la razón de cambio instantánea

Anexo 4 Ejemplo de la obtención de la derivada a través de la razón de cambio instantánea.

Este anexo es adicional y se explicará que este trabajo es preliminar a la derivada y se muestra la obtención de esta a través de la razón de cambio.

Es así que $x_2 - x_1 = \Delta x$ El Δ (delta) representa la diferencia entre las coordenadas, así que se lo denomina **"diferencial"**, en este caso es el diferencial x. Del mismo modo, la diferencia entre las segundas coordenadas serán llamadas Δ f(x), **diferencial f(x)** (o directamente Δy). Como $x_2 - x_1 = \Delta x$, podemos despejar $x_2 = x_1 + \Delta x$. Así que $f(x_2)$ puede escribirse como: $f(x + \Delta x)$. Escribimos la definición de derivada como un límite donde Δx es cada vez más pequeña, tiende a cero. Es decir la razón de cambio instantánea en un punto dado, también es conocida como la derivada de la función en ese punto la cual escribiremos matemáticamente como (figura 28):

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Figura 17: definición de la derivada de una función

También podemos escribir (Figura 29)

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad \text{Ó} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Figura 18: definición de la derivada de una función

Para calcular la derivada de las funciones y simplificaremos el álgebra en la obtención de resultados cambiamos la notación haciendo Δx = h, entonces podemos escribir matemáticamente la definición de la derivada como (Figura 30)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Figura 19: definición de la derivada de una función

Con esta definición ya podemos calcular las derivadas de funciones elementales.

Calculo de la derivada de funciones lineales por medio de la definición

Ejercicio 1: Calcular la derivada de la función f(x) = 2
De esta forma calculamos f(x+h)= 2, ahora escribimos la fórmula para obtener la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \mathbf{0}$$

Podemos concluir que una función constante no tiene recta tangente o su pendiente es cero, entonces la derivada de funciones contantes es cero. **Si f(x) = constante, entonces f'(x)= 0, matemáticamente escribimos** (Figura 31).

$$\boxed{\text{Si } f(x) = C, \text{ entonces } f'(x)=0}$$

Figura 20: derivada de una función constante

Ejercicio 2: Calcular la derivada de la función f(x) = x
De esta forma calculamos f(x+h)= x+h
Ahora escribimos la fórmula para obtener la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{x}+\mathrm{h}-\mathrm{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{h}}{h} = 1$$

Podemos concluir que la derivada de la función identidad es uno, también lo podemos deducir del concepto de razón de cambio instantánea la cual calcula la pendiente de la recta tangente, en caso la pendiente de la recta, matemáticamente escribimos (Figura 32).

$$\boxed{\text{Si } f(x) = x, \text{ entonces } f'(x)=1}$$

Figura 21: derivada de la función identidad

Ejercicio 3: Calcular la derivada de la función f(x) = 2x

De esta forma calculamos f(x+h)= 2(x+h)
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - 2\mathrm{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{1} \qquad \boldsymbol{f'(x) = 2}$$

Ejercicio 4: Calcular la derivada de la función f(x) = 5x
De esta forma calculamos: f(x+h)= 5(x+h)
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(\mathrm{x+h})-5\mathrm{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5x+5h-5x}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{5}{1} \qquad\qquad \boldsymbol{f'(x) = 5}$$

Ejercicio 5: Calcular la derivada de la función f(x)= 7x

Entonces escribimos f(x+h) = _____ , complete los cálculos para obtener el resultado=7

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h} = \_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 6: Calcular la derivada de la función f(x)= 21x

Entonces escribimos f(x+h) = ________, complete los cálculos para obtener el resultado

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Concluyendo las derivadas de funciones de la forma **f(x)=ax,** se muestran en (Tabla 21):

f(x)	$f'(x)$
x	1
2x	2
5x	5

Tabla 9: Derivadas de funciones f(x) = ax

Como se podrá notar la derivada de una función de este tipo tiene un valor igual al coeficiente de la función (Figura 33):

Si f(x) = CX, entonces f '(x)=C

Figura 22: derivada de la función identidad multiplicada por una constante

Por otro lado sabemos que la derivada de la función identidad es uno, luego entonces se deduce que si una constante multiplica a una función su derivada será la contante por la derivada de la función, pero también entonces esta regla también funciona para límites y podemos escribir esta fórmula como (Figura 23):

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}cx = c\frac{d}{dx}x = c}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x)}{h}$$

Figura 23: derivada de la función identidad multiplicada por una constante

Ejercicio 7: Calcular la derivada de la función f(x)=2x+4

De esta forma calculamos f(x+h)= 2(x+h) +4
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f(x+h) - f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(\mathrm{x+h}) + 4 - 2\mathrm{x} - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + 2h + 4 - 2x - 4}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{1}, \qquad \boldsymbol{f'(x) = 2}$$

Ejercicio 8: Calcular la derivada de la función f(x)=5x+4

De esta forma calculamos f(x+h)= 5(x+h) +4
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f(x+h) - f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(\mathrm{x+h}) + 4 - 5\mathrm{x} - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5x + 5h + 4 - 5x - 4}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{1}, \qquad \boldsymbol{f'(x) = 5}$$

Ejercicio 9: Calcular la derivada de la función f(x)=7x+4
Complete los cálculos para obtener el resultado=7

De esta forma calculamos f(x+h)=__________________
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f(x+h) - f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\quad}{1} = \_\_\_\_$$

Tenemos en la tabla siguiente que las funciones “ax+b” y “ax” tienen la misma pendiente (derivada), igual al valor de “a”, entonces la derivada de una función solo depende de los valores de “x” y sus coeficientes, pero no de la suma de valores constantes (tabla 22).

Función	derivada
f(x) = 2x	2
f(x) = 2x + 4	2
f(x) = 5x	5
f(x) = 5x+4	5

Comparten la misma derivada 2

Comparten la misma derivada 5

Tabla 10: Comparación de derivadas de funciones lineales

Notamos que tanto la función f(x)=ax y la función f(x)=ax+b tienen la misma derivada Por otro lado sabemos que si f(x) = C, entonces f ’(x)=0, con estos dos conceptos y la regla de la Figura 34, podríamos deducir la manera de calcular la derivada de las funciones de la forma f(x)=ax+b, en como lo muestra (Figura 35):

$$\boxed{\frac{d}{dx}(ax+b) = a\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}b = (a+0) = a}$$

Figura 24: derivación de funciones lineales

Resumiendo las derivadas de funciones lineales y verificando que una función lineal compuesta por sumas tendrá como derivada (Figura 37):

Si f(x) = ax, entonces = a

Si f(x) = ax+b, entonces = a

Figura 25: Reglas de derivación de funciones lineales

Ejercicios 10: Calcular la derivada de las siguientes funciones (Tabla 23)

f(x)	$f'(x)$
12x+4	
15x+10	
X+1	

Tabla 11: ejercicios propuestos de derivada de funciones lineales

Calculo de la derivada de funciones de segundo grado.

Ejercicio 11: Calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$

De esta forma calculamos $f(x+h) = (x+h)^2 = \mathbf{x^2 + 2xh + h^2}$
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{2x + h}{1}, \qquad \boldsymbol{f'(x) = 2x}$$

Ejercicio 12: Calcular la derivada de la función $f(x)=2x^2$

De esta forma calculamos $f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2(x^2 + 2xh + h^2)$

Si utilizamos el concepto para límites de la figura 34 podemos escribir:

$f(x+h)-f(x)= 2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2 = 2(x^2 + 2xh + h^2 - 2x^2)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2\lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2\lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = 2\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = 2\lim_{h\to 0}\frac{2x + h}{1}, \qquad \boldsymbol{f'(x) = 4x}$$

Ejercicio 13: Calcular la derivada de la función $f(x)=5x^2$

De esta forma calculamos $f(x+h) = 5(x+h)^2 =$ __________________
Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h} = 5\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}$$

Eliminando los términos comunes tenemos:

$$f'(x) = 5\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 5\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{1}, \qquad \boldsymbol{f'(x) = 10x}$$

Resumiendo las derivadas de las funciones $f(x)=ax^2$ (tabla 24)

f(x)	$f'(x)$
x^2	2x
$2\ x^2$	4x
$5\ x^2$	10x

Tabla 12: resumen de derivadas de funciones de segundo grado

Ejercicio 14: Deducir la regla de derivación para funciones $f(x)=ax^2$, apoyándose en la tabla 24.

Si $f(x) = ax^2$, entonces =______________

Figura 26: regla de derivación para funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Ejercicio 15: Calcular la derivada de la función $f(x)=x^2 +x +1$

De esta forma calculamos $f(x+h) = (x+h)^2+(x+h)+1 =$ ***(x² +2xh + h²) +(x+h)+1***

Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1) - (x^2 + x + 1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1 - x^2 - x - 1)}{h}$$

Eliminando los términos comunes:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2 + h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x + h + 1)}{\cancel{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(2x + h + 1)}{1}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x + 1}$$

Ejercicio 16: Calcular la derivada de la función $f(x)=2x^2 +2x +2$

De esta forma calculamos $f(x+h) = 2(x+h)^2+2(x+h)+2$

$$f(x+h)= (2x^2 +4xh + 2h^2) +(2x+2h)+2$$

Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 2) - (2x^2 + 2x + 2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 2 - 2x^2 - 2x - 2)}{h}$$

Eliminando los términos comunes:

$$f'(x) = 2\lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + h)}{h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h + 1)}{\cancel{h}} = 2\lim_{h\to 0} \frac{(2x + h + 1)}{1}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 4x + 2}$$

Ejercicio 17: Calcular la derivada de la función $f(x)=5x^2 +5x +5$

De esta forma calculamos f(x+h) = $5(x+h)^2+5(x+h)+5$

f(x+h) = ____________________

Por lo que escribiremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5x^2 + 10xh + 5h^2 + 5x + 5h + 5) - (5x^2 + 5x + 5)}{h}$$

$$f'(x) = 5\lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h}$$

Eliminando los términos comunes:

$$f'(x) = 5\lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = 5\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h + 1)}{\cancel{h}} = 5\lim_{h\to 0} \frac{\qquad}{1}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 10x + 5}$$

Resumiendo las derivadas de las funciones $f(x)=ax^2 + bx + c$ (tabla 25)

f(x)	$f'(x)$
$x^2 + x +1$	$2x + 1$
$2x^2 + 2x + 2$	$4x + 2$

$5x^2 + 5x + 5$	$10x+5$

Tabla 13: resumen de derivadas de funciones de la forma $ax^2 + bx + c$

Ejercicio 18: Deducir la regla de derivación para funciones f(x)= $ax^2 + bx + c$, apoyándose en la tabla 25.

Si f(x) = $ax^2 + bx + c$, entonces =_____________

Figura 27: regla de derivación para funciones de la forma f(x) = $ax^2 + bx + c$

Podemos verificar esta regla que se obtuvo (figura 38), que la derivada de las funciones de la forma f(x)= $ax^2 + bx + c$, es una ecuación lineal, por otro lado las funciones de segundo grado están construidas por una suma de términos, si derivamos por separado cada término obtendremos la derivada de la función cuadrática esto es (Figura 39):

Si f(x) = $ax^2 + bx + c$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = a\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}bx + \frac{d}{dx}c$$

Pero $a\frac{d}{dx}x^2 = 2ax$, $b\frac{d}{dx}x = b$ y $\frac{d}{dx}c=0$

Entonces: $f'(x) = 2a\,x + b$

Figura 28: Regla general para derivar funciones de segundo grado

Ejercicio 19: Calcular la derivada de la f(x)= $2x^2$, con la regla de la Figura 39

$$\frac{d}{dx}(2x^2) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 20: Calcular la derivada de la f(x)= $2x^2 + 2x + 2$, con la regla de la Figura 39

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 2) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Como puede verificar los resultados son los mismos que se obtuvieron con la razón de cambio instantánea.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksándrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Lavrentiev, M. A., & otros. (1985). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza.

Artigue, M. (Diciembre de 2004). Educación matemática. Santillana.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Iberoamérica.

Ausubel, D. P., Novak, J., & otros. (2009). *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo.* Mexico: Trillas.

Azcárate Giménez, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Bloom, B. (1956). *Taxonomy of educational objectives.* Nueva York.: David McKay and Co.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* New York: Alianza editorial.

Callejas Tejeda, L., & Jiménez Abud, A. Y. (2012). *Cálculo Diferencial.* México D.F.: Saber Creativo.

Cantoral Uriza, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje varicional.* Mexico: SEP.

Cristóbal Escalante, C. (Septiembre de 2010). Notas sobre Aprendizaje y Aprendizaje de las matemáticas. Chetumal, Quintana Roo, México.

Cuellar Carvajal, J. A. (2012). *Matemáticas IV.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a travéz de la variación.* Mexico: Iberoamericano.

Dolores, C. (2010). *La variación y la derivada.* Mexico: Díaz de Santos.

Esteban Duarte, P. V. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 77-95.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, S. (2004). *Cálculo Diferencial.* Mexico D.F.: Mc Graw Hill.

García Oliveros, G., Serrano de Plazas, C., & Díaz Rojas, H. (2002). *APROXIMACION UNA NOCION BASICA EN EL CALCULO.UN ESTUDIO EN LA EDUCACION BASICA.* Bogota: Universidad Pedagogica Nacional.

Gardner, H. (2001). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples.* Colombia: Fondo de cultura ecónomica.

Grossi, R. O. (2010). *Cálculo de variaciones .* Salta Argentina: CIMNE.

Gutiérrez Rodríguez, A. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría basada en la enseñanza de la geometría basada en el modelo del razonamiento de van Helen. *Centro de publicaciones del ministerio de educación, Madrid (CIDE)*, 14-25.

Larson , R. E., Hostetler, R. P., & Edwards, B. H. (1999). *Cálculo.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Pimienta Prieto, J. H. (2008). *Constructivismo, Estrategias para aprender a aprender.* Naucalpan de Juárez: Prentice Hall.

Pimienta Prieto, J. H. (2008). *Evaluación de los aprendizajes.* Naucalpan de Juárez: Prentice Hall.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Recalde, L. C. (1999). Las concepciones sobre la matematica. *Enseñanza universitaria ERM*, 74-94.

Salett Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 105-125.

Silva Ochoa, J. M., & Lazo de Sánchez, A. (2006). *Fundamentos de Matemáticas.* Mexico D.F.: Limusa.

Stewart, J. (2012). *Cálculo.* México D.F.: Thomson Learning.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (11 de 07 de 2011). Una propuesta para la introducción del concepto de la derivada. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argetina.