UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

Experiencia de aprendizaje sobre el estudio de la parábola con alumnos de bachillerato

Tesis que

para obtener el grado de

Maestro en Enseñanza de las Matemáticas

Presenta

Armando Cruz Cerón

Director de Tesis

Dr. Victor Hugo de Jesús Soberanis Cruz

Codirector de tesis

Dr. Sergio Pérez Elizalde

Asesores

M.E.S. Roberto Acosta Olea

M.T.I. Melissa Blanqueto Estrada

Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar

Chetumal Quintana Roo, México, Julio de 2012.

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

Trabajo de Tésis elaborado bajo supervisión del Comité de Asesoría y aprobada como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Enseñanza de las Matemáticas

Comité de tesis

Dr. Victor Hugo de Jesús Soberanis Cruz
Director de Tesis

Dr. Sergio Pérez Elizalde
Codirector de Tesis

M.E.S. Roberto Acosta Olea
Asesor

M.T.I. Melissa Blanqueto Estrada
Asesor

Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar
Asesor

Chetumal Quintana Roo, México, Julio de 2012.

Agradecimientos

En buena medida el estudio de esta Maestría no hubiera sido posible sin el apoyo de las autoridades del **Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo**, en particular del **Ing. Luis David Albareda Lizama,** director del plantel **Cancún uno,** mi centro de trabajo, por lo que doy mi mayor agradecimiento por el apoyo brindado.

Agradezco también al grupo de compañeros con el cual compartí las vicisitudes de la elaboración de tareas, encabezado por la siempre propositiva e incansable **Alicia Ramón Barrios** y los alegres compadres **Jimmy Noé Kiau Flores e Imber Lázaro de la Cruz.** El **Pacto de Bacalar** de la solidaridad permanente que hicimos en dicho lugar, es una referencia alentadora de la naturaleza humana. Las matemáticas y los viajes desde Cancún a su lado fueron experiencias gratas e inolvidables.

Mi especial agradecimiento al cuerpo docente de la **Universidad de Quintana Roo y de la Universidad Autónoma de Sinaloa,** cuyo talento, conocimientos y capacidad de trabajo son un ejemplo. A todos ellos mi mayor reconocimiento, en particular al **Dr. Víctor Hugo Soberanis Cruz,** quien alguna vez me dijo, cuando lo cuestioné sobre el límite de edad para cursar la maestría: *la edad no importa, queremos personas que tengan ganas de trabajar.* De igual manera, agradezco a la **Dra. Verónica Vargas Alejo** los valiosos y constructivos comentarios que me hizo acerca de este proyecto, su búsqueda de la coherencia es encomiable. Por lo mismo, cualquier contenido del trabajo que no se encuentre a la altura del desempeño académico del cuerpo docente de la Universidad, es de mi total responsabilidad.

Chetumal Q. Roo, Julio de 2012.

Dedicatoria

Si te quiero es porque sos,
mi amor mi cómplice y todo
y en la calle codo a codo,
somos mucho más que dos.
Somos mucho más que dos.
Mario Benedetti

Dedico este trabajo a mi esposa **Gloria,**
compañera infatigable,
quien durante 31 años ha estado a mi lado,
en las buenas circunstancias y en las adversas.
"Andando de tu mano, que fácil es la vida,
andando de tu mano, el mundo es ideal,
amor"

Y, por supuesto, a mis hijos
Armando, Erick y Daniel.
Fuente de inspiración y de permanente amor,
a quienes deseo lo mejor,
en la historia personal que cada uno está
escribiendo.

CONTENIDO

RESUMEN

En este documento se describen los resultados de la implementación de una propuesta diseñada para el estudio de la parábola, tema de Geometría analítica que es parte del contenido de la materia Matemáticas III, del plan de estudios del Colegio de Bachilleres. La propuesta se diseñó e implementó con base en los requerimientos del programa oficial, mismos que se dan a conocer en el capítulo 1. Así como la justificación de la propuesta y los objetivos generales. Todas las consideraciones para la elaboración de la propuesta surgieron a partir del nuevo programa oficial producto de la "Reforma Integral de la Educación Media Superior" (RIEMS) que la Dirección General de Bachillerato (DGB) puso en marcha en el año de 2008. El nuevo programa generó la necesidad de contar con propuestas didácticas relacionadas con las nuevas demandas, de una educación por competencias.

En el capítulo 2 se presenta el marco conceptual, donde se privilegia la corriente didáctica de construir el conocimiento matemático en un contexto que le sea familiar al estudiante y que le permita desarrollar su capacidad de análisis mediante la solución de problemas.

En el capítulo 3 Se presenta el método de trabajo, la secuencia de actividades para la fase piloto y el tipo de problemas que los estudiantes deben resolver al final de la aplicación. Lo innovador de la propuesta es el proceso de construcción de la curva, familiarizando a los alumnos con un lenguaje que identifica los elementos del lugar geométrico, sin necesidad de partir de definiciones previas que conducen a un aprendizaje memorístico.

En el capítulo 4 se hace un reporte de lo ocurrido en la fase piloto, donde el aspecto conceptual derivado de la innovación en el trazo, resultó atractivo para los alumnos, lo que facilitó el tránsito al manejo de las ecuaciones.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y las observaciones al proceso, donde se evidencia el peso del contexto institucional en los resultados académicos.

Capítulo 1

Preliminares

> Para Vico, (Giambattista Vico) conocer algo, conocerlo de verdad y no solo percibirlo, requiere que el conocimiento mismo cree lo que quiere conocer. Sólo conocemos verdaderamente lo que nosotros mismos hemos creado. Las matemáticas cumplen esta condición: "Demostramos la geometría porque la hacemos", escribe Vico. La literatura la cumple. Y la historia también.
>
> Carlos Fuentes
>
> (Fuentes, 1997) [4]

1.1 Antecedentes

Esta propuesta, ***"Experiencia de aprendizaje sobre el estudio de la parábola con alumnos de bachillerato"*** trata sobre un conjunto de actividades para abordar el estudio de la parábola, tema del área de matemáticas denominada Geometría Analítica, y está orientada hacia la búsqueda de procedimientos que permitan superar la dificultad de construir una relación algebraica-geométrica, es decir, interpretar en un símbolo algebraico una gráfica, problema de desarrollo de abstracción que se presenta en los alumnos de bachillerato. Estas actividades no pueden ser ajenas a un contexto institucional, por lo tanto, se integra con base en las demandas contenidas en los programas oficiales de la Dirección General de Bachillerato, (DGB) que, de acuerdo a la **Reforma Integral de la Educación Media Superior,** (RIEMS) se encuentran divididas en bloques. En el caso particular de matemáticas III, en el tema de la parábola, estas demandas se encuentran enunciadas en términos de **competencias** en los **bloques VII y VIII**. Como se muestra en las tablas 1.1.1 y 1.1.2, del presente capítulo.

El Colegio de Bachilleres del estado Quintana Roo, COBAQROO utiliza los planes y programas de estudio de la DGB, los cuales fueron objeto de una reforma en el año 2008 para orientar el aprendizaje a la construcción y desarrollo de competencias.

En el área del conocimiento matemático, en los primeros cuatro semestres, los alumnos cursan los programas denominados: Matemáticas I, Matemáticas II, Matemáticas III y Matemáticas IV. Los programas están divididos en bloques, (anteriormente se llamaban unidades) el curso de Matemáticas III contiene 10 bloques, los bloques VII y VIII corresponden al estudio de la parábola.

El siguiente texto contiene la introducción oficial al programa de "MATEMÁTICAS III" y las tablas 1.1.1 y 1.1.2 contienen las competencias disciplinares básicas y las unidades de competencia del conocimiento matemático en bachillerato, así como los atributos de las competencias genéricas. Fue tomado del documento: "MATEMÁTICAS III" Serie programas de estudio. "Vivir mejor" de la Secretaría de Educación Pública. DGB/DCA/2009-11. Pág 3, 27, 28, 29, 30 y 31. (Pública, 2009) [10]

A partir del Ciclo Escolar 2009-2010 la Dirección General de Bachillerato incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) cuyos propósitos son fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo en todas sus modalidades y subsistemas; proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las escuelas.

Para el logro de las finalidades anteriores, uno de los ejes principales de la Reforma es la definición de un **Marco Curricular Común,** que compartirán todas las instituciones de bachillerato, basado en un enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.

A través del **Marco Curricular Común** se reconoce que el bachillerato debe orientarse hacia:

- El desarrollo personal y social de los futuros ciudadanos, a través de las **competencias genéricas,** cuya aplicación se extiende a diversos contextos (personal, social, académico y laboral) y su impacto se proyecta más allá de cualquier disciplina o asignatura que curse un estudiante. Estas competencias constituyen el *perfil de egreso* de los estudiantes de Educación Media Superior, se desarrollan de manera transversal en todas las asignaturas y desarrolla las capacidades básicas que les serán de utilidad a lo largo de la vida en aspectos tales como realización personal, convivencia social y preparación para una actividad laboral.
- El desarrollo de capacidades académicas que posibilite a los estudiantes participar en la sociedad del conocimiento y continuar sus estudios superiores, por medio del desarrollo de **competencias disciplinares.**
- El desarrollo de capacidades específicas que favorezcan la inserción en el mercado laboral mediante las **competencias profesionales.**

1.1.1. Contenidos del bloque VII

Emplea la ecuación de la parábola con vértice en el origen

BLOQUE VII	EMPLEA LA ECUACIÓN DELA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN	TIEMPO ASIGNADO 8 horas
COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS		
— Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. — Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. — Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. — Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. — Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. — Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. — Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia. — Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.		
UNIDADES DE COMPETENCIA		
— Construye e interpreta modelos sobre la parábola como lugar geométrico al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas. — Interpreta tablas, gráficas y expresiones simbólicas en distintas representaciones de la parábola.		
Durante el presente bloque se busca desarrollar los siguientes atributos de las competencias genéricas: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad. 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos. 8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.		
SABERES REQUERIDOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS		
CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES Y VALORES
• Reconoce a la parábola como lugar geométrico. • Identifica los elementos asociados a la parábola. • Comprende la existencia de una parábola específica conocidos: ✓ Su vértice, foco y directriz. • Reconoce la ecuación de parábolas horizontales y verticales con vértice en el origen. • Identifica los elementos de una parábola con vértice en el origen a partir de su ecuación.	• Determina las condiciones necesarias para trazar una parábola. • Integra los elementos necesarios para el trazado de una parábola en la escritura de su ecuación con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje x o y. • Obtiene los elementos de una parábola horizontal o vertical con vértice en el origen a partir de su ecuación. • Resuelve problemas que implican la determinación o el análisis de la ecuación de parábolas horizontales o verticales con vértice en el origen.	• Participa activamente en la realización de ejercicios como en la resolución de problemas en los que se pone en juego el uso de parábolas. • Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas. • Propone maneras creativas de solucionar problemas matemáticos

EJEMPLOS DE INDICADORES DE DESEMPEÑO	SUGERENCIAS DE EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE
— Reconoce los elementos de la parábola como lugar geométrico. — Traza parábolas por medio de distintos métodos. — Determina la ecuación de una parábola vertical u horizontal con vértice en el origen. — Determina el vértice, foco, directriz, etc., asociados a una parábola a partir de su ecuación. — Modela situaciones en las que intervienen parábolas verticales u horizontales con centro en el origen.	— Escribe la ecuación de una parábola a partir de los elementos mínimos necesarios. — Traza la gráfica de una parábola a partir de su ecuación. — Resuelve problemas en los que interviene el uso de la ecuación y gráfica de parábolas.

1.1.2 Contenidos del bloque VIII

Utiliza distintas ecuaciones de la parábola

<table>
<tr><td>BLOQUE VIII</td><td>UTILIZA DISTINTAS ECUACIONES DE LA PARÁBOLA</td><td>TIEMPO ASIGNADO
8 horas</td></tr>
<tr><td colspan="3">COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS</td></tr>
<tr><td colspan="3">— Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
— Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
— Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
— Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
— Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
— Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
— Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
— Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
UNIDADES DE COMPETENCIA
— Construye e interpreta modelos auxiliándose de distintas formas de la ecuación de la parábola al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
— Interpreta tablas, gráficas y expresiones simbólicas relacionadas con distintas formas de la ecuación de la parábola.
— Argumenta la pertinencia de utilizar una forma específica de la ecuación de la parábola dependiendo de la naturaleza de la tarea que tenga que realizar.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Durante el presente bloque se busca desarrollar los siguientes atributos de las competencias genéricas:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">SABERES REQUERIDOS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS</td></tr>
<tr><td>CONOCIMIENTOS</td><td>HABILIDADES</td><td>ACTITUDES Y VALORES</td></tr>
<tr><td>• Reconoce la ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.
• Identifica los elementos de una parábola con vértice fuera del origen a partir de su ecuación ordinaria.
• Reconoce la influencia de los parámetros h, k y p de la ecuación ordinaria de la parábola en el comportamiento gráfico de la misma.
• Reconoce la forma general de la ecuación de la parábola.
• Relaciona las formas ordinaria y general de la parábola</td><td>• Determina la ecuación ordinaria de parábolas horizontales o verticales con vértice fuera del origen.
• Obtiene los elementos de parábolas horizontales o verticales con vértice fuera del origen a partir de su ecuación.
• Explica la influencia de los parámetros h, k y p de la ecuación de la parábola en el comportamiento gráfico de la misma.
• Desarrolla la ecuación general de
la parábola a partir de la forma</td><td>• Participa activamente en la realización de ejercicios como en la resolución de problemas en los que se pone en juego el uso de parábolas.

• Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.

• Propone maneras creativas de solucionar problemas matemáticos</td></tr>
</table>

	ordinaria de la misma. • Transita entre las formas ordinaria y general de la parábola. • Realiza ejercicios y/o resuelve problemas que le permitan determinar la forma más adecuada de representación de la parábola dependiendo de la situación. • Aplica las formas de la ecuación de la parábola como un modelo simbólico en la realización de ejercicios y resolución de problemas.	

EJEMPLOS DE INDICADORES DE DESEMPEÑO	SUGERENCIAS DE EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE
— Reconoce las características de una parábola horizontal o vertical con vértice fuera del origen. — Traza las gráficas de parábolas verticales u horizontales a partir de su ecuación. — Determina la ecuación de una parábola vertical u horizontal con vértice en fuera del origen. — Determina el vértice, foco, directriz, etc., asociados a una parábola a partir de su ecuación. — Modela situaciones en las que intervienen parábolas verticales u horizontales con centro fuera del origen.	— Escribe la ecuación de una parábola horizontal o vertical con vértice fuera del origen a partir de los elementos mínimos necesarios. — Advierte los efectos gráficos que sufre una parábola al variar los parámetros h, k y p en su ecuación. — Transita entre los registros algebraicos de las formas general y ordinaria de la parábola por medio de transformaciones algebraicas. — Resuelve problemas en los que interviene el uso de la ecuación y gráficas de parábolas.

A partir de las demandas del programa oficial vigente de la DGB: Matemáticas III, bloque VII "Emplea la ecuación de la parábola con vértice en el origen" y bloque VIII "Utiliza distintas ecuaciones de la parábola" se observa la necesidad de desarrollar una propuesta didáctica mediante la cual se construyan las competencias disciplinares básicas en términos de conocimientos, habilidades, actitudes y valores, así como los atributos de las competencias genéricas.

1.2. Justificación

El aprendizaje de la Geometría Analítica requiere el desarrollo de la capacidad de abstracción. La mayoría de las personas no ve en la ecuación: $x^2+y^2=25$, una *circunferencia con centro en el origen y radio igual a cinco*, en ocasiones aunque hayan estudiado bachillerato, hayan usado el compás desde la primaria y la curva se observe en muchos objetos cotidianos. Con una curva menos familiar como la parábola, la dificultad del aprendizaje es mayor.

La propuesta didáctica diseñada para esta tesis utiliza un procedimiento alternativo que permite al estudiante familiarizarse con las características de la curva de una forma no convencional, es decir, trazar sin emplear una relación *(x, y)*; recortar la curva, tocarla palparla; nombrar sus elementos por su uso sin establecer una relación formal: foco, directriz y lado recto.

En los procesos educativos tradicionales, el profesor muestra la ecuación y con base en ejercicios de construcción de gráficas, el alumno va desarrollando la relación entre la gráfica y la ecuación para aprender a leer de ésta los elementos que la caracterizan.

En este trabajo se presentan algunas ideas para que el alumno manipule y construya el significado de la ecuación, previamente a la presentación formal de ésta y así se construya una relación curva-ecuación con base en el manejo de las características de la curva y sus elementos.

La idea de la propuesta es contar con una práctica didáctica alternativa que satisfaga las demandas enunciadas en la RIEMS, se aplique en el contexto para el cual fue diseñada y, con base en los resultados, enriquecer o modificar su contenido. Su importancia radica en el hecho de que las actividades propuestas, diseñadas específicamente con el tiempo de clase dispuesto en el programado oficial, permiten desarrollar los conocimientos, habilidades, actitudes y valores requeridos en dicho programa. Así, se beneficia el profesor de la asignatura, porque cuenta con esta secuencia de actividades, se beneficia la institución educativa porque enriquece su acervo académico y se benefician los alumnos porque pueden apreciar las matemáticas de otra manera.

1.3. Objetivos

El objetivo de la tesis es el desarrollo de una propuesta didáctica con base en las demandas del programa oficial vigente de la DGB: Matemáticas III, bloque VII "Emplea la ecuación de la parábola con vértice en el origen" y bloque VIII "Utiliza distintas ecuaciones de la parábola"

En el bloque VII se enuncian los "Saberes requeridos para el desarrollo de competencias disciplinares básicas":

Conocimientos:

- Reconoce a la parábola como lugar geométrico.
- Identifica los elementos asociados a la parábola.
- Comprende la existencia de una parábola específica conocidos: Su vértice, foco y directriz.
- Reconoce la ecuación de parábolas horizontales y verticales con vértice en el origen.
- Identifica los elementos de una parábola con vértice en el origen a partir de su ecuación.

Habilidades:

- Determina las condiciones necesarias para trazar una parábola.
- Integra los elementos necesarios para el trazado de una parábola en la escritura de su ecuación con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje x o y.
- Obtiene los elementos de una parábola horizontal o vertical con vértice en el origen a partir de su ecuación.
- Resuelve problemas que implican la determinación o el análisis de la ecuación de parábolas horizontales o verticales con vértice en el origen.

Actitudes y valores

- Participa activamente en la realización de ejercicios como en la resolución de problemas en los que se pone en juego el uso de parábolas.
- Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.
- Propone maneras creativas de solucionar problemas matemáticos

En el bloque VIII, los saberes requeridos son:

Conocimientos

- Reconoce la ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.
- Identifica los elementos de una parábola con vértice fuera del origen a partir de su ecuación ordinaria.
- Reconoce la influencia de los parámetros h, k y p de la ecuación ordinaria de la parábola en el comportamiento gráfico de la misma.
- Reconoce la forma general de la ecuación de la parábola.
- Relaciona las formas ordinaria y general de la parábola

Habilidades

- Determina la ecuación ordinaria de parábolas horizontales o verticales con vértice fuera del origen.
- Obtiene los elementos de parábolas horizontales o verticales con vértice fuera del origen a partir de su ecuación.
- Explica la influencia de los parámetros h, k y p de la ecuación de la parábola en el comportamiento gráfico de la misma.
- Desarrolla la ecuación general de la parábola a partir de la forma ordinaria de la misma.
- Transita entre las formas ordinaria y general de la parábola.
- Realiza ejercicios y/o resuelve problemas que le permitan determinar la forma más adecuada de representación de la parábola dependiendo de la situación.
- Aplica las formas de la ecuación de la parábola como un modelo simbólico en la realización de ejercicios y resolución de problemas.

Actitudes y Valores

- Participa activamente en la realización de ejercicios como en la resolución de problemas en los que se pone en juego el uso de parábolas.
- Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.
- Propone maneras creativas de solucionar problemas matemáticos

De estos "saberes requeridos" es importante resaltar los verbos: reconocer, identificar, comprender, relacionar, determinar, integrar, obtener, explicar, desarrollar, transitar, realizar, aplicar, resolver, participar, aportar y proponer; ya que éstos constituyen las bases sobre las cuales se diseña la propuesta didáctica.

Además del desarrollo de la propuesta, parte fundamental del objetivo es probarla en el aula con un grupo piloto. El proceso de aplicación se relata en el capítulo 4 y los resultados en el capítulo 5.

1.4 Alcances del proyecto:

La propuesta didáctica documentada en esta tesis está orientada a cubrir las demandas de los bloques VII y VIII del programa oficial de la DGB de la materia: Matemáticas III, Estudio de la parábola. Se pretende que el concepto de este lugar geométrico se construya con actividades lúdicas y físicas que permitan al alumno familiarizarse con la curva sin la presión del manejo del símbolo. Se puede implementar en ambiente de lápiz y papel, y con herramientas que los docentes siempre tienen al alcance en sus escuelas: pizarrón, marcadores, hojas cuadriculadas. Va más allá de una memorización de procedimientos y ejercitación. El ambiente de aprendizaje que se propone, permite que los estudiantes desarrollen hábitos, habilidades y actitudes a la vez que profundicen en conocimientos, es decir, posibilita el desarrollo de competencias con relación al concepto de parábola mediante el manejo de tablas, gráficas y símbolos.

A partir de esto, los alcances están expresados en los "saberes requeridos" que se enunciaron en el apartado 1.3

Limitantes: se restringe al aprendizaje de solo dos bloques de los diez que integran el programa de estudio de matemáticas III, es decir, la quinta parte del contenido.

1.5. Viabilidad de la Propuesta

La implementación en el aula de esta propuesta, no requiere de gran infraestructura, pues puede llevarse a cabo en un aula normal de cualquier escuela. El ambiente para el cual se diseñó fue de lápiz y papel, no se consideró el uso de tecnología. Para obtener resultados similares a los obtenidos en este documento se sugiere que se aplique en condiciones similares a las descritas en el Capítulo 3 de esta tesis, por ejemplo, en cuanto a recursos didácticos, ambiente de trabajo en el aula y papel del docente. La población de estudiantes debe estar cursando los Bloques VII y VIII del programa de estudios "Matemáticas III" de bachillerato.

Capítulo 2

Marco conceptual

> ¿Habrá príncipe más desgraciado que yo? ¡y para esto he vivido recluido bajo la vigilancia de un filosofo! **¿De qué me sirven el álgebra y la filosofía en materias de amor?** ¡Ay, Ebben Bonabben!, ¿por qué no te has cuidado en instruirme en el manejo de las armas?
>
> Ahmed Al Kamel
> "Leyendas de la alhambra"
> (Irving, 1981) [6]

2.1. ¿Qué se pretende lograr con la propuesta?

Que el estudiante reconozca la vinculación entre la ecuación (símbolo) y la representación gráfica, que aprenda a "leer" la ecuación de tal manera que identifique los elementos de la curva en la expresión, (abstracción), que desarrolle el manejo algebraico de acuerdo a los requerimientos del programa oficial y que aplique este conocimiento en la resolución de problemas.

Es claro que esto se logra como resultado de un proceso que conlleva, definiciones y sustento geométrico y algebraico.

Etapas de la propuesta: Reconocimiento de la curva, análisis de sus elementos, elementos mínimos para su construcción, aplicación. Se establece una relación con el modelo de van Hiele que divide la construcción del pensamiento geométrico en niveles: 1) Visualización o reconocimiento. 2) Análisis. 3) Deducción informal o clasificación. 4) Deducción formal. 5) Rigor.

A continuación se da cuenta de una síntesis de distintos materiales consultados sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, que dan sustento a la propuesta didáctica que fue diseñada.

2.2. ¿Para qué se estudian las matemáticas?

Cesar Cristóbal (Escalante, 2010) [3] dice: La meta central del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos es que los estudiantes logren un aprendizaje de las matemáticas que les son enseñadas, de manera que las puedan utilizar en actividades fuera de la escuela. Es decir, que desarrollen una comprensión profunda de los conceptos y métodos matemáticos.

Alejandro Garciadiego (Garciadiego, 2008) [5] dice: "Las matemáticas bien enseñadas nos deben mostrar que a través de ellas aprendemos a razonar, pues esencialmente implican la solución de problemas. Por la enseñanza que recibimos estamos acostumbrados a pensar que esos problemas solo tienen que ver con números y con cálculos, sin embargo, muchas de las dificultades a las que nos enfrentamos en la vida real y el razonamiento que seguimos para solucionarlas, nos lo inculcó la matemática y no nos damos cuenta porque no aplicamos cálculos concretos."

Roberto Markarian (2002) dice: Necesitamos un verdadero entendimiento generalizado del papel que la matemática ha jugado y juega en la sociedad en que vivimos. Tratamos de reivindicar el contenido cultural de la matemática y la presentación de la matemática como la profunda historia y creación humana que en realidad es. Los profesores deberían saber cómo se han formado las ideas matemáticas para:

- Comprender las dificultades que la humanidad tuvo para elaborarlas;
- Relacionar unas ideas con otras, relaciones que muchas veces aparecen oscurecidas o incomprensibles en su formulación actual;
- Utilizar estos conocimientos como referencia en sus formas de enseñar.

Por otra parte, los profesores de todos los niveles deberíamos saber aprovechar las muchas facetas de la disciplina, no sólo para entusiasmar a nuestros alumnos sino para darle sus auténticas dimensiones. Recapitularemos a continuación algunas de esas facetas que se agregan y complementan con los aspectos históricos y culturales antes anotados.

1. Es como un arte en que el enlace entre sus distintas partes y teorías, o entre proposiciones aparentemente desligadas, así como la elegancia y limpidez de sus razonamientos, la brevedad y elocuencia y, a veces, la sorpresa de sus resultados, son gratos al espíritu, a nuestro modo de pensar. Incluso estos aspectos muchas veces satisfacen nuestro sentido estético.

2. Es un lenguaje preciso y eficaz. En realidad una de las razones principales para la existencia y uso de la matemática es la elaboración de un lenguaje que permita resumir la presentación de otras ciencias y disciplinas. Más aún, el análisis sistemático u ordenado de muchos problemas técnicos o prácticos es frecuentemente imposible sin una buena presentación matemática, sin hacer un modelo formal.

3. Es un eficaz instrumento para resolver cuestiones de la vida cotidiana o de la más sofisticada tecnología. Debidamente formalizado un problema es resoluble utilizando

herramientas matemáticas que van de la simple suma, si se trata de saber las deudas que tenemos, hasta difíciles procesos del cálculo numérico si se quiere saber cuán cerca pasará un cometa (hacemos referencia a estos asuntos de cálculo por no poder explicar aquí cuestiones relacionadas con consecuencias derivadas directamente de teorías matemáticas: mecánica cuántica, teoría de la relatividad, etcétera).

2.3. ¿Cómo se logra el aprendizaje matemático?

En la propuesta didáctica de este trabajo, para el caso de la parábola, se procuró diseñar etapas que fueran fundamentando en primer lugar un lenguaje y una familiarización.

En esta vertiente Carlos Fuentes (Fuentes, 1997) [4] apunta: Para Vico, (Giambattista Vico) conocer algo, conocerlo de verdad y no solo percibirlo, requiere que el conocimiento mismo cree lo que quiere conocer. Sólo conocemos verdaderamente lo que nosotros mismos hemos creado. Las matemáticas cumplen esta condición: "Demostramos la geometría porque la hacemos", escribe Vico. La literatura la cumple. Y la historia también.

Santos (Trigo, 1997) [11] dice: Un aspecto importante en la instrucción matemática es la identificación de diversas fases que describen acciones importantes en el proceso de aprendizaje del estudiante. Por ejemplo, se puede identificar inicialmente en la instrucción una fase de familiarización donde el estudiante conoce aspectos generales del campo que se estudia y un vocabulario de trabajo. Una segunda fase incluye actividades donde el maestro guía al estudiante con situaciones o problemas que le ayudan a explorar una red de relaciones que se forman en el área de estudio. En una tercera fase, el estudiante intenta verbalizar explícitamente las relaciones que ha observado en la fase guía y así aprender eficientemente el lenguaje técnico del dominio. La siguiente fase se identifica cuando el estudiante aprende a resolver problemas que involucran varios pasos o métodos de solución. Éstos sirven de vehículo para que el estudiante encuentre su propio camino en la red de relaciones vinculadas al proceso de resolución. Finalmente, existe la fase de integración donde el estudiante construye una estructura de lo que ha aprendido del área de estudio donde se identifica una red de relaciones nuevas que pueden trasladarse o aplicarse en otros dominios. El papel del instructor en el salón de clases incluye:

a. Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuenta que un problema es un problema hasta que el estudiante muestre algún interés por resolverlos.
b. Construir una atmósfera que le dé confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.
c. Permitir que los estudiantes (y motivarlos) seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando ésta sea necesaria.

2.3.1. Modelo de Van Hiele

La **Teoría de van Hiele** o **Modelo de van Hiele** o **Niveles van Hiele** es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría, diseñado por el matrimonio holandés van Hiele. El modelo tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de *Dina van Hiele-Geldof* y *Pierre van Hiele* en la Universidad de Utirecht, Holanda. El libro original donde se desarrolla la teoría es *Structure and Insight : A theory of mathematics education.*

La idea básica del modelo, expresado en forma sencilla es:

El aprendizaje de la Geometría se hace pasando por niveles de pensamiento.

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- No se puede alcanzar el nivel *n* sin haber pasado por nivel anterior *n-1*, o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es invariante.
- En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito, en el nivel siguiente se vuelve explicito.
- Cada nivel tiene su lenguaje utilizado (símbolos lingüísticos) y su significatividad de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado).
- Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse.

Los niveles van Hiele son cinco, se suelen nombrar con números del 1 a 5, siendo esta notación la más utilizada; aunque también existe la notación del 0 al 4.

Nivel 1: Visualización o Reconocimiento

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Ordenación o clasificación

Nivel 4: Deducción Formal

Nivel 5: Rigor

Nivel 1

En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades.

Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares.

Ejemplo: identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.

Nivel 2

Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras.

Ejemplo: un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales

Nivel 3

Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales.

Ejemplo: en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

Nivel 4

En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.

Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática

Ejemplo: demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Nivel 5

Se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar.

Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido. (Wikipedia la enciclopedia libre, 2010) [12]

2.4. Fundamentos de las matemáticas y la resolución de problemas

Santos (Trigo, 1997) [11] destaca: Una idea fundamental es considerar a la resolución de problemas como forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas. Es decir, los estudiantes tienen que problematizar el estudio de la disciplina. En este contexto, el término problema (que se identifica como un componente fundamental en la propuesta) se vincula no solamente a situaciones específicas rutinarias o no rutinarias donde el estudiante intenta encontrar solución o soluciones, sino que también incluye tener que aprender algún concepto matemático. Es decir, tanto al resolver un problema o al aprender un contenido, el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas, y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver, o entender esa situación o problema. Así, la resolución de problemas se relaciona no solamente con el uso y desarrollo de habilidades para que el estudiante tenga acceso y utilice diversos recursos; sino también con estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones.

2.4.1. El instructor como un modelo del comportamiento metacognitivo

En la presentación de problemas a los estudiantes, es común que el maestro presente sólo las ideas que lo ayuden a encontrar la solución. Aún cuando en la presentación de ciertos ejemplos (problemas) el maestro se haya enfrentado a varias dificultades, en la presentación generalmente se muestra un producto pulido que obscurece el proceso que condujo a la solución. Además, se da la impresión de que el problema se puede resolver fácilmente. Schoenfeld afirma que es importante que el estudiante conozca todas las dificultades que se presentan al intentar resolver un problema. Es decir, los comienzos falsos, las recuperaciones y, en general, la selección y cambio de estrategias vinculadas a la solución. Santos (Trigo, 1997) [11]

2.4.2. Tendencias en la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas.

Algunas características que dominaban los enfoques de la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas incluyen: Santos (Trigo, 1997) [11] i)) La existencia de un apartado ubicado al final de una unidad o de un curso que se identificaba como "resolución de problemas". En esta parte se generaba una discusión explícita de algunas estrategias y su papel en la resolución de problemas.

ii)) La presentación de los contenidos a los estudiantes con la posterior selección de un problema donde se aplicarían los contenidos estudiados. En la resolución de este problema se discutían los pasos identificados en el modelo de Polya.

iii)) Los maestros decidían iniciar el estudio de determinado contenido matemático a través de la resolución de algún problema. Es decir, encontrar la solución del problema justificaba la necesidad de estudiar el contenido matemático.

iv)) La resolución de problemas se presentaba como un arte que daba lugar a que los estudiantes discutieran una variedad de problemas incluyendo los no rutinarios. Es decir, aquí los estudiantes tenían que discutir sus propias ideas, hacer conjeturas, usar ejemplos y contraejemplos, y proponer diversos métodos para encontrar la solución de un problema. Esta era una actividad permanente en el desarrollo del curso.

2.5. Las representaciones en el aprendizaje.

El aprendizaje de un concepto, no es solo la memorización de una definición, sino algo más complejo. Para Dóriga (1986) un concepto es la representación mental de un objeto, es la interiorización en la mente de la persona de un número determinado de rasgos o características que le son útiles para distinguir ese objeto de otros objetos disímiles. Su utilidad se encuentra en la medida en que se conocen las relaciones que guarda con otros conceptos. Citado por Cesar Cristóbal Escalante (Escalante, 2010) [3]

El proceso de aprendizaje, es un proceso de asimilación - acomodación de las estructuras cognoscitivas del sujeto. El conocimiento que el individuo posee, en cada momento, es resultado de un proceso constructivo que él realiza a partir de los conocimientos previos, es decir de sus estructuras cognoscitivas. El conocimiento producido es siempre contextual. En el marco social, el sujeto le otorga una serie de significaciones que van determinando conceptualmente el objeto. (Moreno, 1995)

Al interaccionar con su ambiente, las personas construyen representaciones de los objetos y procesos que ocurren a su alrededor. Estas representaciones tienen varias funciones, entre ellas, una asociada al sistema cognitivo, que es la función simbólica. Simbolizar es la capacidad para concebir que algo tome el lugar de otra cosa. El conjunto de representaciones, mediadas por las convenciones sociales, es utilizado como parte del lenguaje. Durante el proceso de formación de un concepto en la mente del individuo este utiliza varias representaciones (icónica, simbólica, lenguaje natural). En la construcción de las estructuras cognoscitivas el individuo construye representaciones del concepto, que tienen una función simbólica, en el sentido de que son utilizadas para sustituir el concepto. Pero no solo eso, las operaciones sobre las representaciones, son las acciones que se realizan sobre los objetos, lo que permite la construcción de esquemas de acción que también forman parte de las estructuras cognitivas antes mencionadas. La coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para la aprehensión conceptual de los objetos. (Moreno, Ibíd.).

Arteaga y Santos (1999) reportan el papel que juega el uso de diferentes tipos de representación para darle sentido a la información que se maneja al abordar problemas, como un indicador de los tipos de comprensión que alcanzan los estudiantes. Señala que los profesores pueden detectar los puntos en que los estudiantes pueden necesitar apoyo, observando los recursos que utilizan los estudiantes y las interpretaciones que realizan de la información en varios contextos. Considera que el proceso de alcanzar una comprensión robusta de las matemáticas a partir del uso eficiente de varias representaciones toma tiempo, pero esto debe ser una meta de instrucción que no se debe soslayar.

Barrera y Santos (2001) resaltan que el uso de diferentes representaciones por los estudiantes cuando enfrentan tareas matemáticas, les permite establecer relaciones entre aspectos de ellas que son resaltadas por una representación, pero no por otras. Observan que la elección de la tarea es un ingrediente importante para promover diferentes aproximaciones y usos de diferentes tipos de representaciones, y que el instructor puede jugar un papel muy importante en el proceso, al dirigir y propiciar la participación de los estudiantes en esas actividades.

2.6. Las realidades matemáticas

Ikran Antaki (Antaki I. , 1992) [2] en su libro *Segundo Renacimiento* destaca: Aún las realidades matemáticas, universales y experimentales eficaces, aparecen para algunos como estructuras enteramente determinadas por el funcionamiento del cerebro humano y desprovistas de existencia fuera de él. La existencia de la realidad matemática parece ligada al pensamiento del hombre, que a su vez es producto de la evolución de las especies. Así, la secuencia de los números primos o la geometría euclidiana no serían descubrimientos, sino la expresión de un estado particular de la especialización del cerebro en el curso de un proceso de hominización. Y podrían ser transformadas en la hipótesis de una mutación genética de la especie. En esta perspectiva, otra humanidad habría producido otra lógica matemática. Es la primacía de lo biológico.

Otros piensan que la realidad matemática existe independientemente del espíritu humano, es más estable que la realidad física e imposible de localizar en el espacio-tiempo. Los primeros piensan que los segundos hacen simples actos de fe, creen en alguna trascendencia platónica. Pero el materialismo de los primeros esta hinchado de ideología, no elimina los residuos míticos, solamente crea otros.

Los progresos vertiginosos de la investigación neurobiológica conducen a una certidumbre y es la prodigiosa complejidad del funcionamiento cerebral, a tal punto que la ambición de dibujar su mapa es especulación pura. Como en la física teórica, sabemos que algunos fenómenos jamás podrán ser observados, sino sólo deducidos matemáticamente; como en la astronomía, los investigadores confrontan el alejamiento de las fronteras. En todos los campos, las verdades últimas parecen alejarse a medida que los descubrimientos se suceden, como si la ciencia, al ampliar el campo del conocimiento, ampliara también el campo de lo desconocido. Una sección del córtex--- capa exterior del cerebro donde están ubicadas, en el humano, las actividades más elaboradas --- tomada al azar, contiene una cantidad enorme de encuentros neuronales--- llamados sinapsis, que son los puntos por donde pasa la información entre las neuronas---, tantos como seiscientos millones por milímetro cúbico. El cerebro humano se presenta ante nosotros como un conjunto gigantesco de miles de miles de millones de telarañas neuronales donde se propagan los impulsos eléctricos. Neuronas, sinapsis, axones, dendritas, neurotransmisores... cada uno de ellos elaborado como un pequeño ordenador. En la caja negra del cerebro, los enigmas se multiplican a la velocidad de los descubrimientos. Los niveles hormonales introducen grados de incertidumbre. No hay sitio para el determinismo en las arquitecturas cerebrales. La circulación de la información en las conexiones neuronales se establece siguiendo vías en parte aleatorias que escapan a la determinación genética. Los genes, mucho menos numerosos que la sinapsis, no controlan los detalles de su funcionamiento.

El cerebro es un recién nacido contiene una infinidad de posibilidades. Algunas de ellas se realizarán, otros no: como aprender japonés, por ejemplo, o pilotear un avión. Es a través de esta selección de posibilidades como la experiencia vital de cada persona forma su cerebro singular, su identidad propia y única. La estructura del cerebro condiciona la posibilidad de pensar, pero la experiencia transforma a su vez la estructura. No basta con describir el cerebro para definir el pensamiento.

Pero el filósofo jamás ha pretendido analizar el funcionamiento de las sinapsis. Ahora, trabajando a nivel de la célula, los biólogos han comprendido algunas cosas. La imagen de una caja negra dividida en compartimientos donde están guardados los fundamentos del lenguaje, de la memoria o del razonamiento, ya no sirve. Los cien mil millones de neuronas del cerebro humano sí son especializadas, pero en el momento en que nos enfrentamos a una función de cierta complejidad, casi la totalidad del cerebro se pone a funcionar. Gracias a la tomografía hoy se puede ver, en una pantalla, el dibujo de algunos circuitos neuronales. Después de inyectar sustancias radioactivas en las arterias cerebrales, se pide a un sujeto leer un texto en voz alta: las zonas del córtex excitadas durante este ejercicio consumen mayor cantidad de sangre: pasan del azul al rojo según la intensidad de su actividad. Siete zonas se destacan en el hemisferio izquierdo: el área visual, el área auditiva, los nervios motores de la boca, de los ojos, las áreas del lenguaje llamadas de Broca y de Wernicke y, por último, el área motriz encargada de coordinar los movimientos.

A partir del momento en que una actividad se vuelve más elaborada o más intensa, los circuitos se vuelven sumamente complejos.

No es todo. Si bien todos los cerebros, aún los más brillantes, debutan en su existencia bajo la forma de una miserable célula, su verdadera construcción se hace gracias a la interacción con el mundo exterior. Nada es más bobo que un cerebro en un frasco. El hombre dispone de un máximo de libertad en relación con las limitaciones genéticas. Y lo mejor para luchar contra la fatalidad biológica es la experiencia y el aprendizaje. Aprendizaje significa memoria.

Capítulo 3

Propuesta Didáctica

> …, mi propósito no es enseñar aquí el método que cada uno ha de seguir para conducir bien su propia razón, sino tan sólo permitir ver de qué manera he tratado de conducir la mía. Los que se atreven a dar preceptos deben considerarse más aptos que aquellos a quienes los dan; y se hacen dignos de censura si yerran en la cosa más mínima. Pero como yo no propongo este escrito sino como una historia, o, si lo prefiere el lector, como una fábula, en la que, entre algunos ejemplos que se pueden imitar, encontrará tal vez también otros que, con razón, no serán seguidos, espero que sea útil para algunos sin ser perjudicial a nadie, y que todos podrán agradecer mi franqueza.
>
> **René Descartes**
> ***"Discurso del método"***

3.1. Fases de la secuencia didáctica

La secuencia consta de cuatro fases:

- Trazo y concepto por descubrimiento, (3 sesiones de 50 minutos c/u)
- Ecuaciones ordinarias con sus respectivas gráficas, (5 sesiones)
- Problemas de aplicación, (4 sesiones)
- Conversión de la ecuación general a la ordinaria, (2 sesiones)

Para la primera fase se diseñaron actividades que permiten al alumno familiarizarse con los elementos de la curva y sus características, prescindiendo del manejo algebraico, éste se introduce en la segunda fase.

En la tercera fase se abordarán problemas o situaciones derivadas de un texto cuya solución conduzca a la aplicación de la ecuación de la parábola.

En la cuarta fase se estudia el procedimiento algebraico para convertir la ecuación en su forma general a la forma ordinaria.

3.2. Trazo y concepto por descubrimiento

Inicio del tema: El Profesor, en sesión plenaria explica al alumno la actividad que realizará cada uno en su cuaderno, con la única intención de que la realicen, no explicará ni enunciará concepto alguno.

El alumno utilizará: lápiz, cuaderno, regla, compás, borrador, cartulina, tijeras y pegamento.
El profesor expone la actividad, los alumnos, después de realizarla, por descubrimiento, caracterizan y definen la curva que identificarán como parábola. Es decir, exposición en una primera parte que se procura sea mínima y aprendizaje por descubrimiento en el desarrollo del proceso.
El objetivo de este primer momento es que el alumno se familiarice con la curva, trazando distintos ejemplos que él mismo determina y recortando los trazos en cartulina para que manipule las formas.

Con la elaboración de distintas gráficas donde varía una distancia que después identificará como "2p" y la localización de sus elementos, se pretende que se construya el aprendizaje.

Se consideran tres sesiones de 50 minutos cada una.

Desarrollo: El alumno traza una recta y ubica un punto fijo que no pertenece a la recta. Se le pide que con regla y compás localice puntos equidistantes del punto fijo y de la recta. Posteriormente une los puntos.

Repite el ejercicio varias veces variando la distancia entre el punto fijo y la recta.
En equipo hacen observaciones sobre las diferentes curvas que construyeron.
Repite el trazo pero en una cartulina llevada ex profeso para la actividad y recorta con tijeras la gráfica obtenida. Utilizando el recorte como plantilla, trazará curvas iguales en la cartulina y también las recortará. Así tendrá físicamente dos partes del recorte, una cóncava y otra convexa. De esta forma manipulará físicamente la curva para familiarizarse con ella. Las partes convexas podrá pegarlas alineadas simulando una valla y las partes en forma de arco, simulando una construcción.

Cierre: Se pasa a la definición formal de parábola y se establecen los elementos asociados: Foco, directriz, eje, vértice, lado recto.

En las gráficas elaboradas, el alumno localiza y/o traza los elementos asociados.

El alumno redactará un documento no mayor de una cuartilla donde escriba el concepto que construyó de parábola y sus conclusiones de la actividad.

El alumno investigará el concepto de parábola y contrastará con lo establecido en la clase, se le sugieren fuentes de información en internet y además puede consultar un libro de Geometría Analítica, en la biblioteca de la escuela hay varios ejemplares de distintos autores y todos tratan el tema.

Alcanzado el objetivo de la caracterización geométrica, concepto y familiarización con la curva, el alumno está preparado para la etapa de las ecuaciones.

3.3. Ecuaciones ordinarias con sus respectivas gráficas.

Inicio del tema: El Profesor, en sesión plenaria presenta sin deducir las ecuaciones ordinarias y ejercita al alumno en su manejo y aplicación.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

El objetivo de esta parte del análisis es que el alumno relacione la ecuación con la gráfica, construyendo diversos ejemplos.

Se consideran tres sesiones de 50 minutos cada una.

Desarrollo: El alumno grafica distintos ejemplos.

Identifica la posición de la parábola: indica si ésta es de eje horizontal o vertical.

Ubica coordenadas del foco y del vértice (h,k)

Observa que si h=0 y k=0, el vértice de la parábola está en el origen, y que las ecuaciones se reducen a:

$$x^2 = 4py \qquad y^2 = 4px$$

Observa que si $\mathbf{p > 0}$, la parábola se desarrolla a la derecha o hacia arriba y si $\mathbf{p < 0}$, hacia la izquierda o hacia abajo. Identifica los términos concavidad, máximo y mínimo.

Los ejercicios, aunque diversos deberán cubrir dos aspectos fundamentales:

- Obtención de los elementos a partir de la ecuación.
- Obtención de la ecuación a partir de los elementos.

Los ejercicios se seleccionarán de tal manera que presenten distintos grados de complejidad y diversos en su tipo.

Ejercicios tipo: se resuelve el número 3.3.1 como ejemplo.

3.3.1. Una parábola tiene su vértice en **(3, 5)** y su foco en **(3,7)** determinar: la ecuación en su forma ordinaria, la ecuación de la directriz, el lado recto y graficar.

Análisis y solución:

Por la posición del foco y el vértice, es una parábola de eje vertical de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde: h=3, k=5 y p=2

En consecuencia al sustituir y operar, la ecuación de la parábola es:

$$(x-3)^2 = 8(y-5)$$

La ecuación de la directriz es: $y = 3, o\ y - 3 = 0$

El lado recto (LR) es igual a **4p**

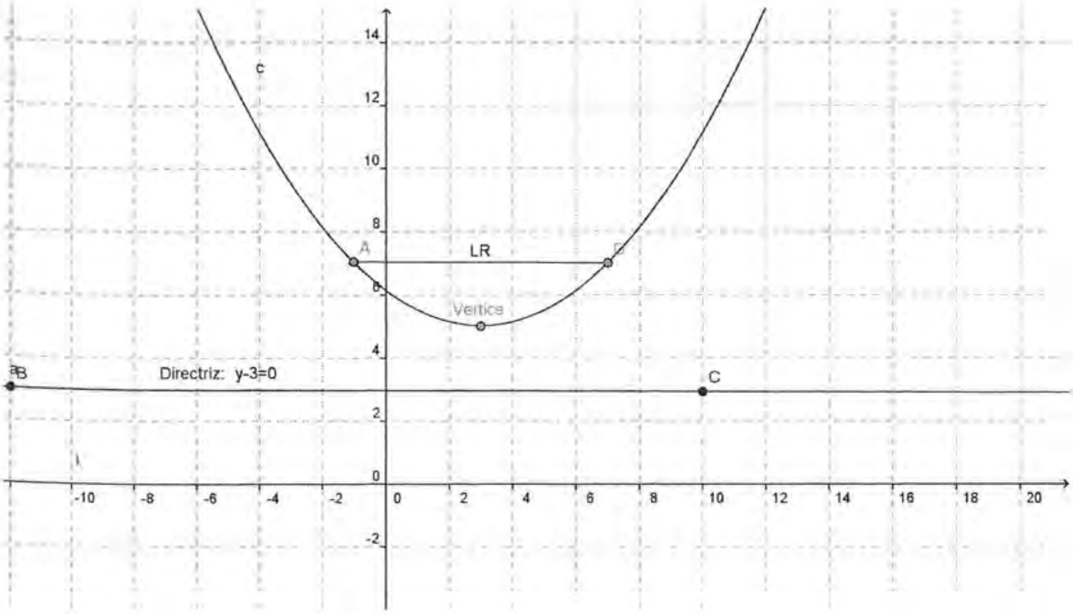
$$LR = 8$$

Para graficar se puede proceder de dos formas: tabulando o con el uso de un software, para nuestro caso utilizaremos el primero y se sugerirá en clase, para los que tengan acceso a una computadora, utilizar *"geogebra"* .

Para tabular se despeja *"y":*

$$y = \frac{(x-3)^2}{8} + 5$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8.125	7	6.125	5.5	5.125	5	5.125	5.5	6.125	7	8.125



3.3.2. Una parábola tiene su vértice en **(-3, 8)** y su foco en **(-3,7)** determinar: la ecuación en su forma ordinaria, la ecuación de la directriz, el lado recto y graficar.

3.3.3. Una parábola tiene como directriz la recta ***x+5=0***, si su foco se encuentra en ***(-3,4)*** determinar: Las coordenadas del vértice, la ecuación de la parábola en su forma ordinaria, el lado recto y graficar.

3.3.4. Una parábola de eje horizontal tiene su vértice en el punto **(5,1)** si pasa por el punto: $(\mathbf{1}, \sqrt{\mathbf{24}} + \mathbf{1})$ determinar: La ecuación en su forma ordinaria, la ecuación de la directriz, las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y graficar.

3.3.5. Una parábola con vértice en el origen de coordenadas, tiene como directriz la recta

$\boldsymbol{x - \frac{3}{4} = 0}$, determinar: La ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y graficar.

Cierre: El alumno redactará las características de la parábola en un documento no mayor de una cuartilla, enlistando las características, el tipo de ecuación y bosquejando la curva con sus ejes cartesianos.

De tarea los alumnos investigarán el establecimiento formal de la ecuación de la parábola, partiendo de su definición.

Se les indica que pueden consultar cualquier libro de Geometría Analítica, todos los textos tienen esta formalización o recurrir a internet.

Alcanzado el objetivo de que el alumno comprenda la relación entre la ecuación ordinaria y la gráfica, está preparado para la etapa en la cual se aplica este conocimiento en la solución de problemas.

3.4. Problemas de aplicación.

Inicio del tema: Se proponen problemas de aplicación cuyos modelos matemáticos de resolución conduzcan a ecuaciones de parábolas.
El objetivo en esta etapa es que el alumno aplique en situaciones derivadas de un texto las ecuaciones de la parábola.
Se consideran cuatro sesiones de 50 minutos cada una.
Desarrollo: Aquí es donde se ponen en evidencia distintos aspectos de la formación académica de los alumnos. La mayoría quiere "aplicar una fórmula" antes de haber comprendido plenamente el texto y los elementos que lo integran. Por esto es necesario insistir en la necesidad de leer varias veces y comprender con precisión lo que se pregunta y los datos y recursos con los que se cuenta para resolver. Tratar de fomentar la cultura de valorar cada situación por sus propias características, para que el alumno construya el hábito del razonamiento. Proponer la secuencia para este proceso que recomendaba Polya: Entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás. (Polya, 1945)[9]
Se resuelven dos ejemplos con ayuda del profesor y cuatro ejemplos en forma individual o por equipos. Adicionalmente se proporcionan un conjunto de ejercicios para resolver como actividad extra-clase.

3.4.1. Determinar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros (m) de altura y 24m de base, situado a una distancia de 8m del centro del arco.

Se puede considerar una parábola de eje vertical con vértice en (0,18) que pasa por el punto (12,0):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituyendo: $x^2 = 4p(y-18)$

Si *x=12, y=0,* entonces: $144 = 4p(0-18)$

Ø64993

De donde *p=-2*

De esta forma la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -8(y-18)$$

Así, la respuesta del problema, considerando esta ecuación es equivalente a contestar la pregunta: ***¿cuánto vale y, si x=8?***

$$\mathbf{64 = -8(y-18) \qquad y = 10}$$

La altura del arco a 8m del centro es de 10m.

3.4.2. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Las columnas que lo soportan tienen una altura de 60m y están separados una distancia de 500m, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10m sobre el pavimento del puente. Considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente y como eje de ordenadas el de simetría de la parábola, determinar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80m del centro del puente. (Kindle, 1978)[7]

Se puede considerar una parábola de eje vertical con vértice en (0,10) que pasa por el punto (250, 60):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituyendo: $x^2 = 4p(y-10)$

Si ***x=250, y=60,*** entonces: $62500 = 4p(60-10)$

De donde ***p=625/2***

De esta forma la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 1250(y-10)$$

Así, la respuesta del problema, considerando esta ecuación, es equivalente a contestar la pregunta: ***¿cuánto vale y, si x=80?***

$$\mathbf{6400 = 1250(y-10) \qquad y = 15.12}$$

La altura del puente colgante a 80m del centro es de 15.12m.

3.5. Conversión de la ecuación general a la ordinaria.

Inicio del tema: El maestro expone paso por paso, enlistando las operaciones, el proceso mediante el cual se convierte una ecuación en su forma general a la ecuación en su forma ordinaria. El alumno no copia, solo atiende hasta que el procedimiento le sea claro. Este tema es particularmente difícil por el nivel académico los estudiantes y se les debe instruir desde operaciones elementales, reglas de signos, completar cuadrados, etc. Hablo de la mayoría de los alumnos del tercer semestre, turno vespertino, del Colegio de Bachilleres, plantel Cancún 1.

El objetivo en esta etapa del análisis es que el estudiante convierta una ecuación de la parábola, escrita en su forma general, a una ecuación en su forma ordinaria, ya que ésta le permite conocer los elementos característicos de la curva. Deberá reconocer en esta última dichos elementos y relacionar este resultado con los tres temas anteriores.

Se consideran dos sesiones de 50 minutos cada una.

Desarrollo: El alumno realiza varios ejercicios para familiarizarse con el procedimiento, hasta que la repetición vaya abriendo la comprensión a otros saberes más complejos. Identifica los elementos de la curva y elabora la gráfica partiendo de la ecuación.

Ejercicios tipo: se resuelve el número 3.5.1. como ejemplo:

3.5.1. Dada la forma general: $\mathbf{5x^2 - 40x - 16y + 48 = 0,}$ de la ecuación de la parábola, establecer:

a) La forma ordinaria,

b) las coordenadas del vértice,

c) las coordenadas del foco,

d) la ecuación de la directriz,

e) la longitud del lado recto

f) la gráfica.

Solución: Aquí es importante resaltar la secuencia, por eso es conveniente enumerar los pasos.

1.- Se divide entre *5* (coeficiente de $\mathbf{x}^2$) y se pasa el término en "*y*" y el independiente al miembro derecho:

$$x^2 - 8x - \frac{16}{5}y + \frac{48}{5} = 0$$

$$x^2 - 8x = \frac{16}{5}y - \frac{48}{5}$$

2.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo y se equilibra la ecuación en el miembro derecho:

$$x^2 - 8x + 16 = \frac{16}{5}y - \frac{48}{5} + 16$$

3.- Se factoriza:

$$(x-4)^2 = \frac{16}{5}(y+2)$$

4.- Se identifica esta ecuación con la forma ordinaria:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Parábola de eje vertical con vértice en (h, k)

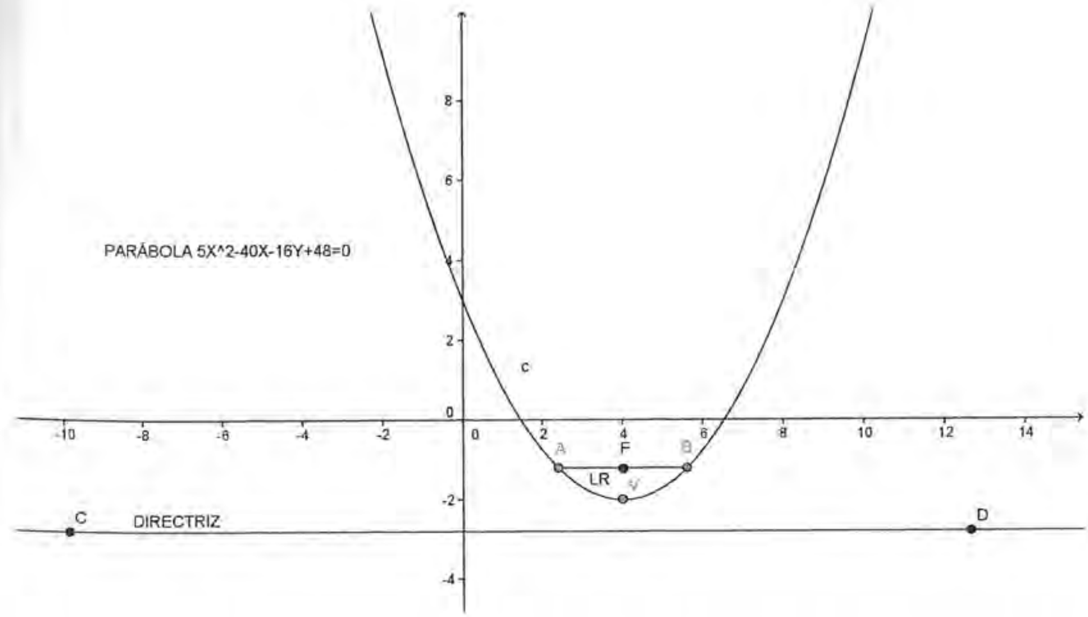
De esta manera las coordenadas del vértice son: *V(4, -2)*

Se establece que $p = \frac{4}{5}$ por lo tanto el foco está en: $F(4, -\frac{6}{5})$

Por la misma razón la directriz es la recta: $y = -\frac{14}{5}$

El lado recto es: $LR = \frac{16}{5}$

Gráfica:



3.5.2. Dada la forma general: $x^2 - 6x - 6y + 27 = 0$, de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica.

3.5.3. Dada la forma general: $2x^2 + 16x + 8y + 12 = 0$, de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica.

3.5.4. Dada la forma general: $3y^2 - 18x + 18y - 63 = 0$, de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica.

3.5.5. Dada la forma general: $4y^2 + 20x - 32y - 36 = 0$, de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica.

Cierre: El maestro verifica que el alumno alcance la destreza en la conversión. Por ejemplo, por parejas se pueden revisar los resultados.

Capítulo 4

Experiencia piloto y resultados.

El hombre dispone de un máximo de libertad en relación con las limitaciones genéticas. Y lo mejor para luchar contra la fatalidad biológica es la experiencia y el aprendizaje. Aprendizaje significa memoria.

Ikram Antaki
"Segundo renacimiento"
(Antaki I. , 1992)[2]

4.1. Trazo y concepto por descubrimiento

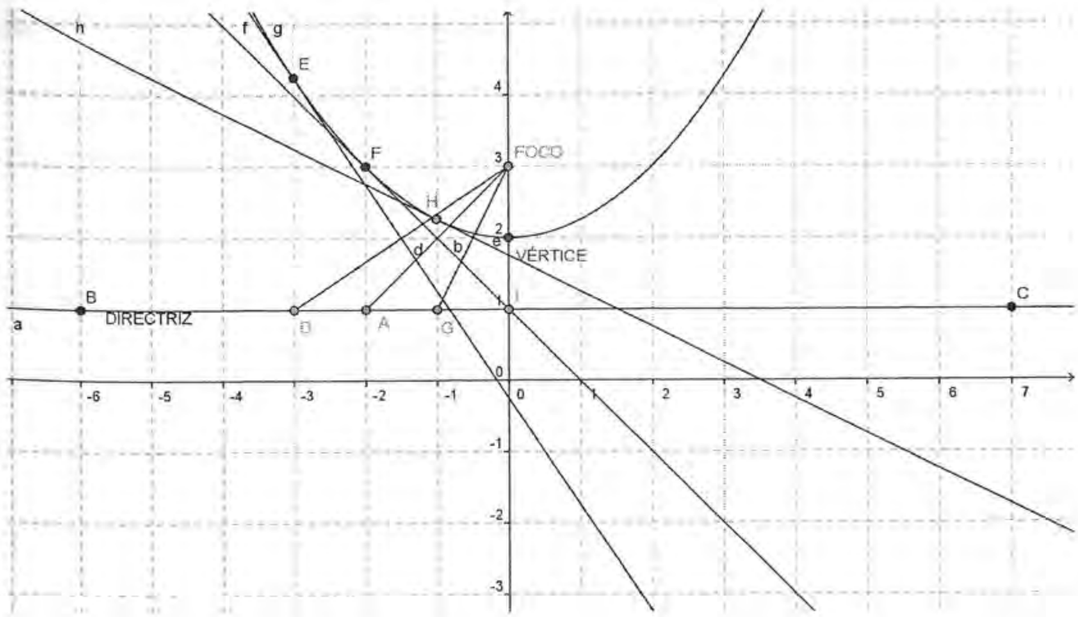
Primera y segunda sesión (módulo de 100 min.)

Desarrollo: El alumno traza una recta y ubica un punto fijo que no pertenece a la recta. Se le pide que con regla y compás localice puntos equidistantes del punto fijo y de la recta. Posteriormente une los puntos.

Esta actividad se realizó con el grupo 3° I, de la capacitación de dibujo técnico, así, el uso de los instrumentos de dibujo no les es ajeno y el trazo de una mediatriz en un segmento dado no presentó ninguna dificultad. Saben que cualquier punto de la mediatriz es equidistante de los dos extremos del segmento. La idea en el trazo de la parábola es que uno de los extremos del segmento se ubique en el foco y el otro en la directriz.

Fue necesario identificar la recta fija como directriz y el punto fijo como foco, esto les dio vocabulario, se estableció que la curva que se genera al unir los puntos se denomina parábola, el propio nombre del *bloque* así se denomina.

Ubicada la directriz, procedieron a trazar perpendiculares a ésta, una de las cuales pasa por el foco. Al trazar la mediatriz de cada segmento que une el foco con la directriz y localizar el punto de intersección con cada perpendicular, se genera la parábola uniendo estos puntos.



En el ejemplo gráfico se muestra la directriz, el foco, las rectas perpendiculares a la directriz, (en este caso son las rectas verticales del sistema de ejes) y tres ejemplos de trazo: los segmentos que parten de los puntos D, A, G e I, hacia el foco y sus respectivas mediatrices, generan los puntos E, F , H y el vértice, al unir estos puntos se establece la parábola.

Tercera sesión

Al repetir la actividad en cartulina y posteriormente cortar la curva, (en equipos de cinco personas) un alumno comentó: *"ni parece clase de matemáticas"*, esto me dio pauta para preguntar, *¿y, cómo te sientes? "bien"* fue la respuesta, al parecer estaban muy relajados.

No vi mayores diferencias entre los equipos, se apropiaron del concepto de foco, vértice y directriz y mostraron confianza para el trazo de la parábola con este procedimiento.

Al final cada equipo entregó sus recortes.

4.2. Manejo de las ecuaciones y las gráficas.

Cuarta sesión

Se dan a conocer sin deducir las ecuaciones ordinarias:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Destacando que la primera corresponde a una parábola de eje vertical y la segunda a una parábola de eje horizontal.

El punto ***(h, k)*** es el vértice y ***"p"*** es la distancia dirigida del vértice al foco.

Se pidió que cada uno graficara la ecuación:

$$(y-2)^2 = 8(x-3) \text{ para } x \geq 3$$

Para lo cual debían despejar *"y"* es decir:

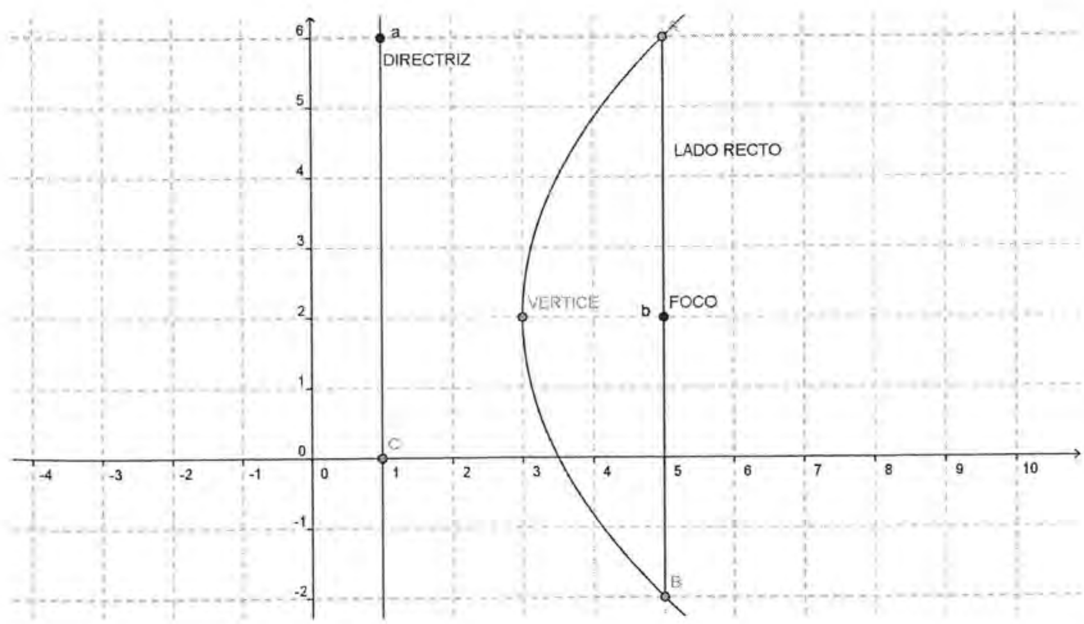
$$y = 2 \pm \sqrt{8(x-3)}$$

Y tabular:

x	3		4		5		6	
y	y= 2 ±0		y= 2±2.83		y= 2±4		y= 2±4.90	
			4.83	-0.83	6	-2	6.90	-2,90

Aunque la idea es permitir que el alumno desarrolle la actividad por iniciativa propia, es necesario puntualizar algunas cuestiones. La pregunta más generalizada es: ¿desde qué valor de x? y, aunque no se les da la respuesta, se les guía con el propósito de que la encuentren: A ver, prueben con x igual a cero. ¡Da error maestro! ¿Y por qué ocurre eso? Hasta que logren comprender que deben comenzar con $x=3$ que corresponde al vértice, y, para los más avezados que $x-3 \geq 0$

En nuestro contexto, un símbolo de radical "asusta" a los alumnos, la causa de que esto ocurra, seguramente no es única y no pretendemos especular acerca del tema, el hecho real es que esta situación se presenta. Entonces, es necesario insistir que para cada x mayor que 3 se encontrarán dos valores de y, uno al sumar la raíz: $\sqrt{8(x-3)}$ y el otro al restarla.



Y ahora, en virtud de que para graficar utilizaron la escala de su cuaderno cuadriculado, se les indicó que trazaran una parábola con el método de las mediatrices, donde la distancia entre la directriz y el foco fuera de cuatro cuadritos.

Al comparar las dos parábolas se dieron cuenta de que eran "iguales" ¿por qué si una la graficaron mediante una ecuación y la otra con regla y compás?

La respuesta estaba en el valor de "p", cantidad constante en la ecuación, distancia dirigida del vértice al foco. "2p" en consecuencia es la distancia del foco a la directriz.

Esta observación condujo a una reflexión expresada en forma directa y preguntando:

"Con la ecuación es más fácil, ¿por qué no nos dio las ecuaciones desde el principio en lugar de trazar con regla y compás, que nos lleva mucho tiempo?"

Aquí fue necesario explicar que era una estrategia para que se familiarizaran con la curva y los términos que identifican la parábola, vértice, foco, directriz, eje.

A mi vez les hice una pregunta: *Si yo les hablo de radio, diámetro o centro de una circunferencia, ustedes no tienen duda de a qué me estoy refiriendo, ¿o si? Y ese conocimiento lo manejan porque desde la primaria han usado compás y han trazado circunferencias. Pues se trata de hacer lo mismo con la parábola.*

Quinta sesión

Se propone el ejercicio:

Graficar la ecuación: $(x-4)^2 = 6(y-3)$ y establecer:

a) Coordenadas del vértice
b) Coordenadas del foco
c) Ecuación de la directriz

Con el conocimiento de las ecuaciones, para la mayoría fue evidente que corresponde a:
Una parábola de eje vertical de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Donde las coordenadas del vértice son: (4, 3)

Si 4p=6, entonces p=1.5 y, las coordenadas del foco son: (4, 4.5)

La directriz pasa por la ordenada y=1.5, que corresponde a su ecuación o **2y-3=0**

Nota: *A los alumnos se les permite el uso de los números decimales, aunque se procura inducir, en la medida de lo posible, el uso de los racionales. La razón de esta práctica se debe a que el uso del racional es, en sí mismo, un obstáculo para la solución de ejercicios provocando una "doble dificultad" en el proceso de aprendizaje, de tal forma que si la solución la ofrecen en decimal, se les permite.*

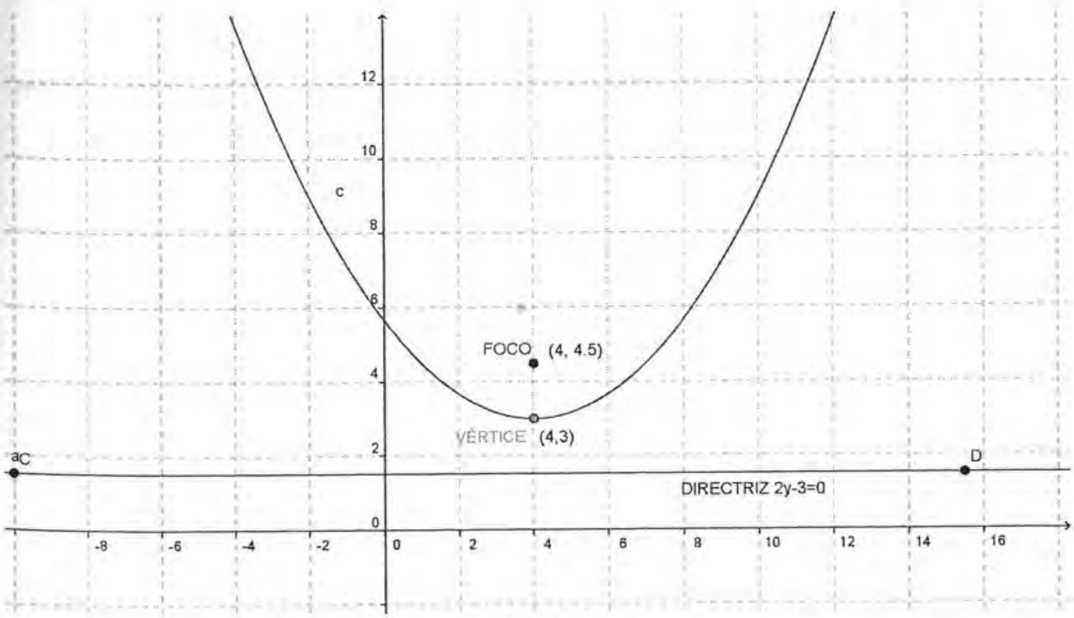
Para graficar despejaron "y" $y = \frac{(x-4)^2}{6} + 3$

Y tabularon:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	$7\,{}^{1}/_{6}$	$5\,{}^{2}/_{3}$	$4\,{}^{1}/_{2}$	$3\,{}^{2}/_{3}$	$3\,{}^{1}/_{6}$	3	$3\,{}^{1}/_{6}$	$3\,{}^{2}/_{3}$	$4\,{}^{1}/_{2}$	$5\,{}^{2}/_{3}$	$7\,{}^{1}/_{6}$

Se aclaró que podían usar cualquier valor de "x" procurando que hubiera simetría a partir de $x=4$.

Gráfica:



Sexta sesión

Se propone el ejercicio

Una parábola tiene su vértice en *(1,5)* y su directriz es la recta $x=3$, obtener:

a)-La ecuación en su forma ordinaria
b)-La ecuación en su forma general
c)-La gráfica.

Si la directriz es vertical, entonces la parábola es de eje horizontal de la forma:

$$: (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Si el vértice está en ***(1,5)*** el valor de la constante ***p=-2***

En consecuencia la ecuación en su forma ordinaria es:

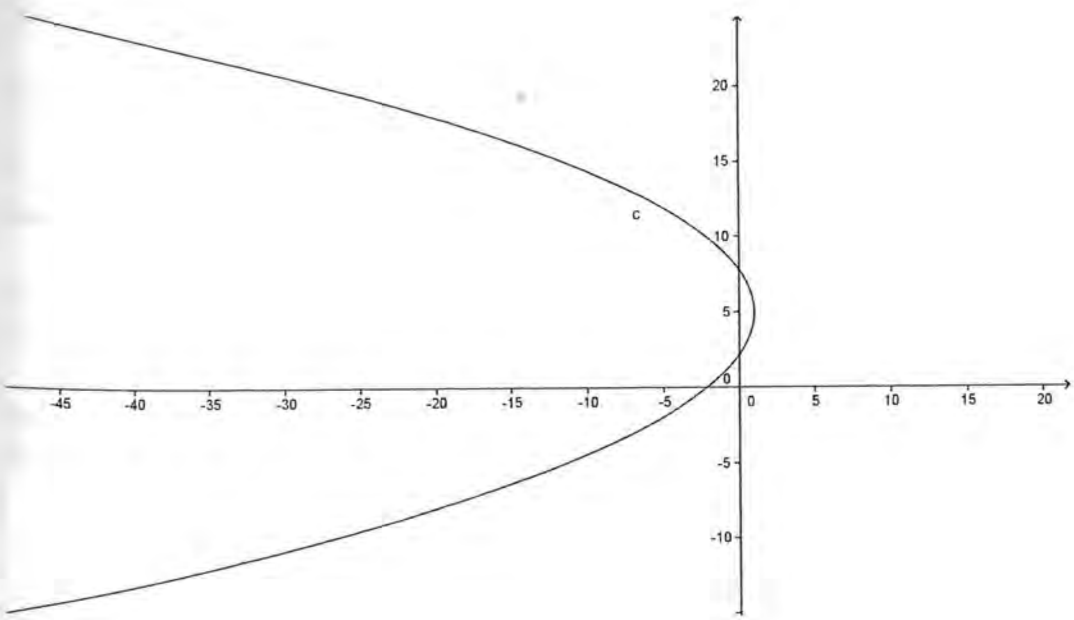
$$:(y-5)^2 = -8(x-1)$$

Se explica a los alumnos que desarrollando el cuadrado, multiplicando y ordenando los términos en el miembro izquierdo de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente denominada forma general. Es necesario recordar que al desarrollar el cuadrado se obtiene un trinomio, por increíble que parezca, aún se encuentran alumnos que al desarrollar el cuadrado escriben: $(y-5)^2 = y^2 - 25$

$$y^2 - 10y + 25 = -8x + 8$$

$$y^2 + 8x - 10y + 17 = 0 \text{ Forma General}$$

Gráfica:



Séptima sesión
Se propone el ejercicio

Una parábola tiene su vértice en *(-3,8)* y su foco en (-3, 7) obtener:

a)-La ecuación en su forma ordinaria
b)-La ecuación en su forma general
c)-La ecuación de la directriz
d)-La longitud del lado recto
e)-La gráfica.
Con los datos del vértice y el foco bosquejan la curva y encuentran que se trata de una parábola de eje vertical de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
En la cual: ***h= -3, k= 8, p= -1***

Entonces, la ecuación en su **forma ordinaria** es: $(x+3)^2 = -4(y-8)$

Desarrollando el cuadrado y multiplicando:

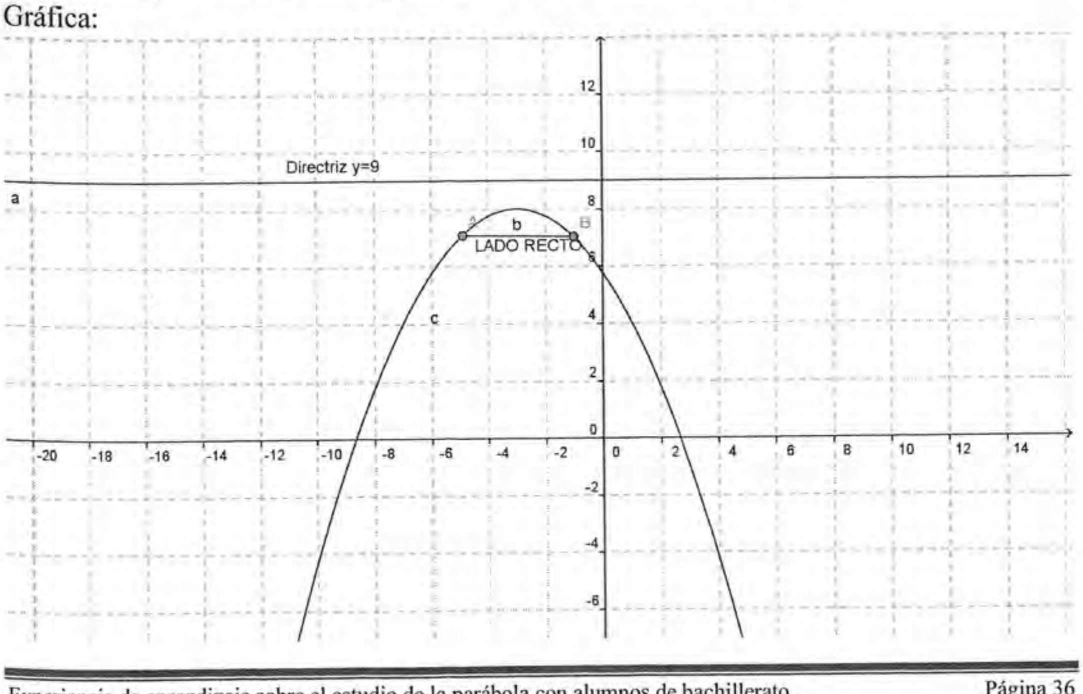
$x^2 + 6x + 9 = -4y + 8$ Ordenando y simplificando se encuentra:

$x^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ Que es la **forma general**

Si $p= -1$ y el foco está en *(-3, 7)* la **directriz** se encuentra en $y = 9$ ó $y - 9 = 0$, estableciendo así la ecuación de esta recta fija.

Se define el **lado recto** como la "cuerda perpendicular al eje que pasa por el foco" y en el caso de la parábola su longitud es: *LR*= |*4p*|

Así, para el ejercicio que nos ocupa: *LR*= |*4(-1)*| entonces: *LR*= *4*
Gráfica:



Octava sesión

Se proponen dos ejercicios para que los alumnos en forma individual resuelvan en su cuaderno:

1.-- Una parábola tiene su vértice en *(0,0)* y su foco en ($\frac{3}{2}$, 0) obtener: a)-La ecuación en su forma ordinaria b)-La ecuación en su forma general c)-La ecuación de la directriz d)-La longitud del lado recto e)-La gráfica.	2.-- Una parábola tiene su vértice en *(0,0)* y su directriz es la recta $y+2=0$, obtener: a)-La ecuación en su forma ordinaria b)-La ecuación en su forma general c)-Las coordenadas del foco d)-La longitud del lado recto e)-La gráfica.

Como se comprenderá, el objetivo de estos dos ejercicios es la reducción de las ecuaciones cuando el vértice se encuentra en el origen, así para el **ejercicio 1**, al bosquejar la curva con los datos dados se establece que es una parábola de eje horizontal con vértice en el origen de la forma:

$y^2 = 4px$, si $p = \frac{3}{2}$, entonces la ecuación en su forma ordinaria es: $y^2 = 6x$

La ecuación en su forma general es: $y^2 - 6x = 0$

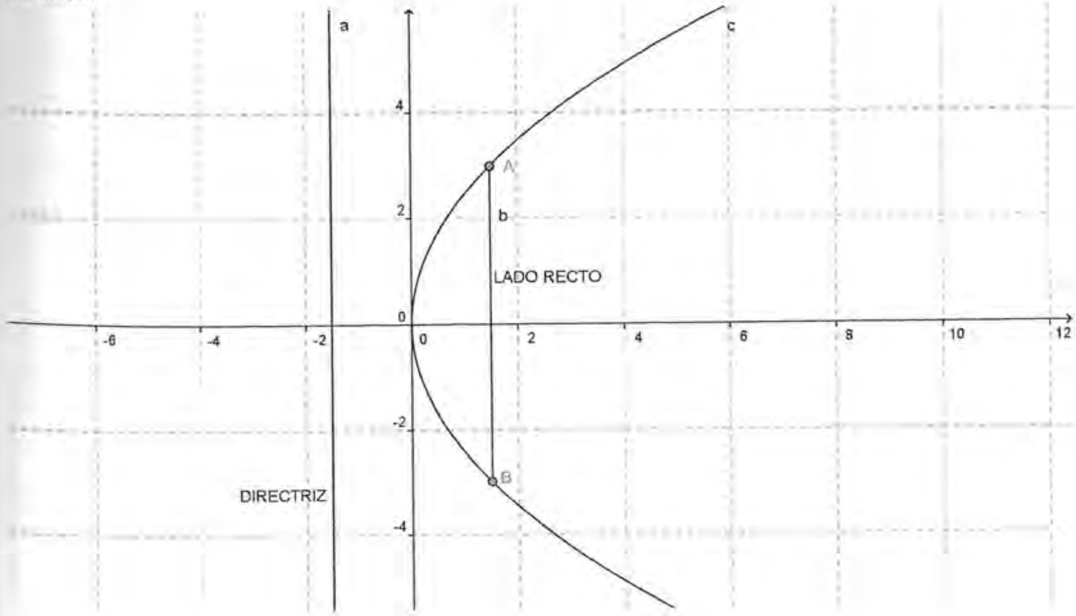
Del mismo bosquejo se puede establecer que la directriz pasa en: $x = -\frac{3}{2}$, lo que es equivalente a la ecuación $2x + 3 = 0$

La longitud del lado recto se expresa como: $LR=|4p|$ de donde se obtiene: $LR=6$

Para graficar se despeja *"y"*: $y = \sqrt{6x}$ y se tabula:

x	*0*	*1*		*2*		*3*		*4*		*5*	
y	*0*	*2.45*	*-2.45*	*3.46*	*-3.46*	*4.24*	*-4.24*	*4.89*	*-4.89*	*5.48*	*-5.48*

Gráfica:



Aunque los ejercicios se proponen para que los alumnos resuelvan en su cuaderno en forma individual, esto no significa que no puedan comentar entre ellos el proceso de solución. De hecho, se les alienta a que intercambien cualquier idea, siempre que sea del ejercicio en cuestión. En estos casos se presenta con mucha frecuencia que los alumnos más destacados se vean "rodeados" por un equipo informal de "seguidores", esta práctica no se inhibe ya que al final, en mayor o menor tiempo, todos terminan el ejercicio. Aquí, la labor del Profesor es vigilar que los alumnos trabajen y contestar alguna pregunta, procurando inducir la respuesta y no contestar de manera directa. Por razones de control es necesario revisar que cada alumno cuente con el ejercicio, marcando su cuaderno con el símbolo de correcto (paloma) o incorrecto (tache) esta revisión no puede ser exhaustiva en virtud del número de alumnos.

Para el **ejercicio 2**, al bosquejar la curva con los datos dados se establece que es una parábola de eje vertical con vértice en el origen de la forma:

$x^2 = 4py$, si la directriz se representa en *y=-2*, significa que $p = 2$, entonces la ecuación en su forma ordinaria es: $x^2 = 8y$

La ecuación en su forma general es: $x^2 - 8y = 0$

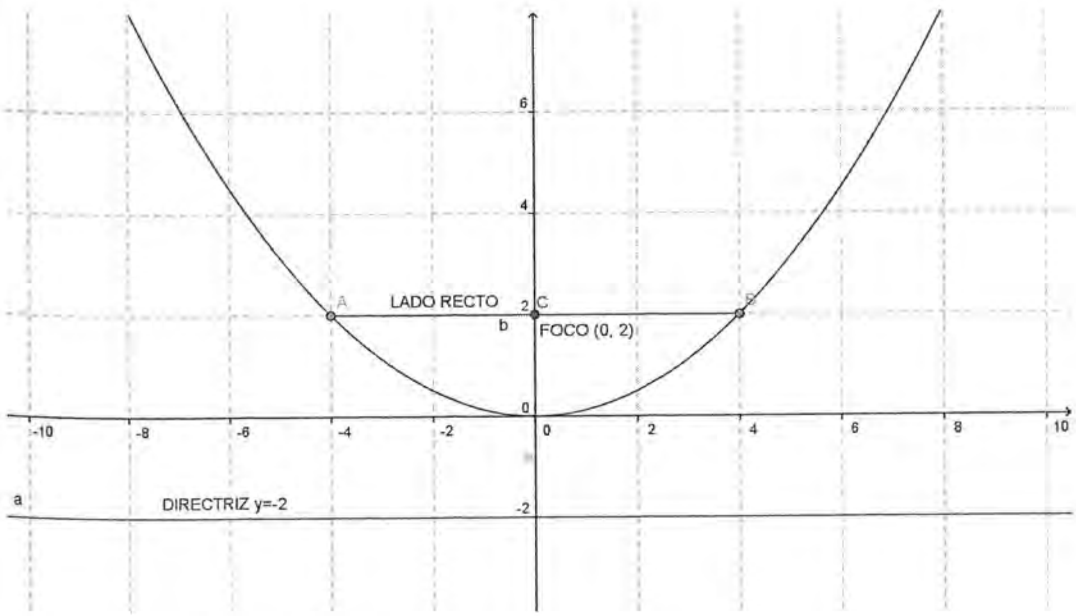
Del mismo bosquejo se puede establecer que si *p=2*, el foco se encuentra en *(0, 2)*

La longitud del lado recto se expresa como: *LR=|4p|* de donde se obtiene: *LR=8*

Para graficar se despeja *"y"*: $y = \frac{1}{8}x^2$ y se tabula:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$3\frac{1}{8}$	2	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	2	$3\frac{1}{8}$

Gráfica:



4.3. Problemas de aplicación.

Novena sesión

La trayectoria descrita por un proyectil lanzado horizontalmente, desde un punto situado *"y"* metros sobre el suelo, con una velocidad *"v"* ***m/s***, es una parábola de ecuación:

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2}$$

Siendo *"x"* la distancia horizontal desde el lugar del lanzamiento y $g = 9.81$ ***m/s²*** aproximadamente. El origen se toma en el punto de partida del proyectil.

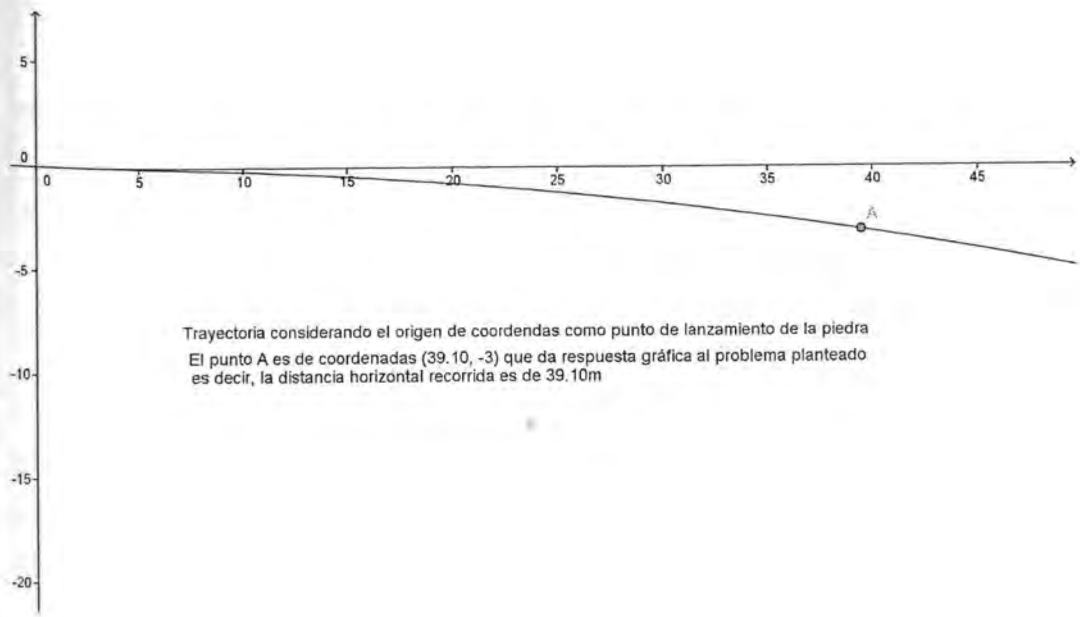
En estas condiciones se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a ***3m*** de altura sobre el suelo con una velocidad inicial de ***50m/s***. Calcular la distancia horizontal al punto de partida y graficar la trayectoria. (Kindle, 1978)

Los resultados obtenidos por esta actividad se pueden dividir en tres grupos: Los equipos que graficaron considerando el lanzamiento de la piedra en el origen y obtuvieron por aproximaciones la distancia horizontal, es decir graficaron la expresión:

$$y = -\frac{9.81x^2}{5000}$$

Cuya tabla es:

x	*10*	*20*	*30*	*40*
y	*-0.1962*	*-0.7848*	*-1.7658*	*-3.1392*



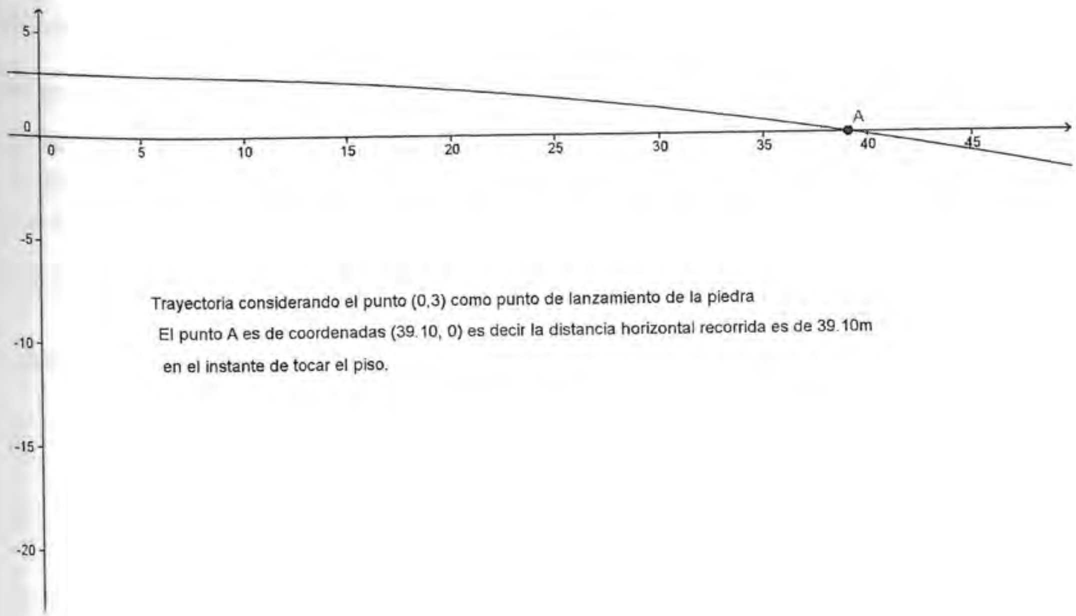
Los equipos que graficaron la expresión:

$$y = -\frac{9.81x^2}{5000} + 3$$

Cuya tabla es:

x	*10*	*20*	*30*	*40*
y	*2.8038*	*2.2152*	*1.2342*	*-0.1392*

Considerando los tres metros de altura del lanzamiento de la piedra, es decir, el eje de las abscisas representa el piso y también por aproximaciones obtuvieron la solución del problema:



El tercer grupo, (un equipo) además de hacer la gráfica anterior, realizó la solución algebraica, despejando *x*.

Si *y=0*, entonces *x* es:

$$x = \sqrt{\frac{15000}{9.81}}$$

$$x = 39.10m$$

Al revisar las actividades el profesor pidió a este equipo que expusiera su procedimiento en el pizarrón y hubo consenso en el sentido de que era el mejor camino.

Décima sesión

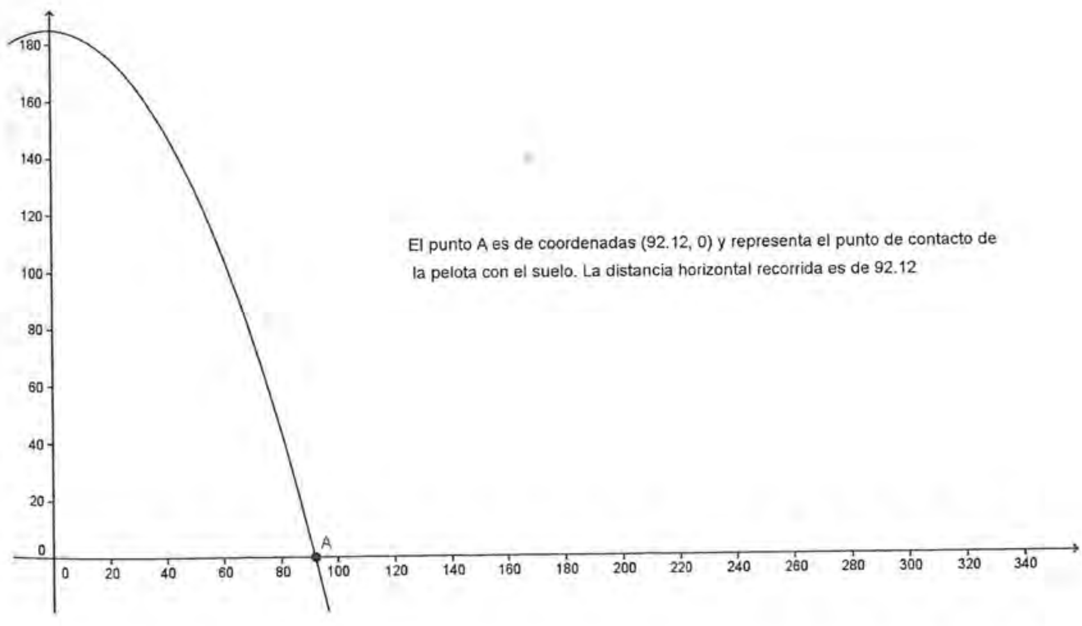
Se propone el problema:

Se lanza una pelota de golf, horizontalmente, desde la cima de una torre de 185 metros de altura, con una velocidad de 15m/s. Calcular la distancia del punto de caída al pie de la torre, suponiendo que el suelo es horizontal y graficar la trayectoria.

Por la similitud con el problema de la novena sesión, los alumnos ya no tuvieron duda y consideraron la ecuación: $y = -\frac{9.81x^2}{450} + 185$

Si $y=0$, entonces x es: $x = \sqrt{\frac{83250}{9.81}}$

$$x = 92.12\, metros$$



Aunque para este segundo problema se consideraron 50 minutos, dos equipos solo necesitaron 20.

Decimoprimera sesión

Determinar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros (m) de altura y 24m de base, situado a una distancia de 8m del centro del arco.

Se puede considerar una parábola de eje vertical con vértice en (0,18) que pasa por el punto (12,0):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituyendo: $x^2 = 4p(y-18)$

Si $x=12, y=0,$ entonces: $144 = 4p(0-18)$

De donde $p=-2$

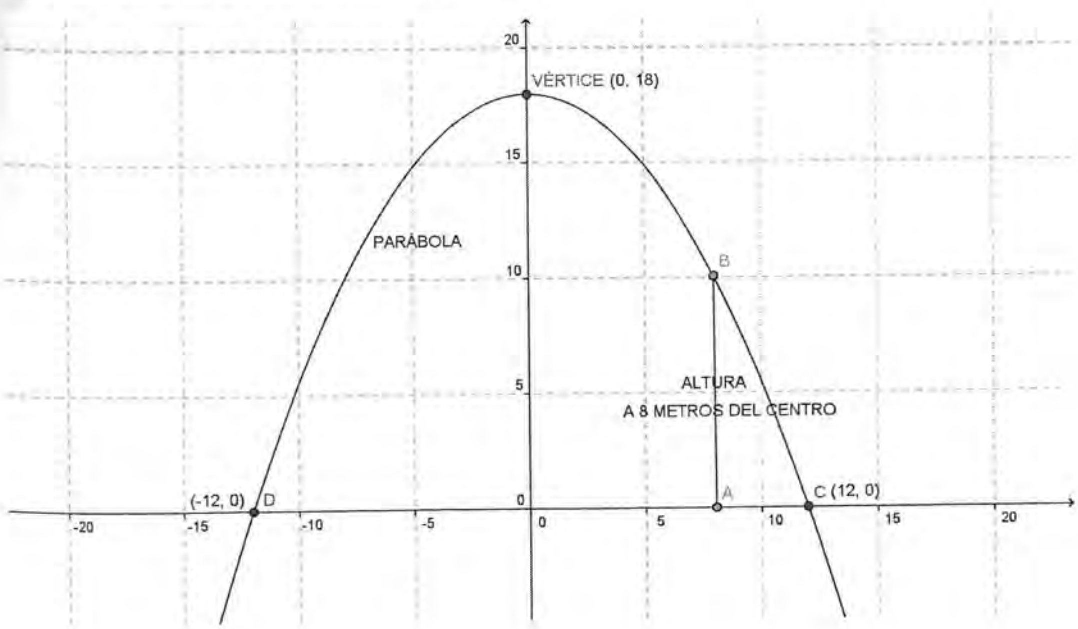
De esta forma la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -8(y-18)$$

Así, la respuesta del problema, considerando esta ecuación es equivalente a contestar la pregunta: ***¿cuánto vale y, si x=8?***

$$64 = -8(y-18) \qquad y = 10$$

La altura del arco a 8m del centro es de 10m.



Decimosegunda sesión

3.7.- El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Las columnas que lo soportan tienen una altura de 60m y están separados una distancia de 500m, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10m sobre el pavimento del puente. Considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente y como eje de ordenadas el de simetría de la parábola, determinar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80m del centro del puente.

Se puede considerar una parábola de eje vertical con vértice en (0,10) que pasa por el punto (250, 60):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituyendo: $x^2 = 4p(y-10)$

Si *x=250, y=60,* entonces: $62500 = 4p(60-10)$

De donde *p=625/2*

De esta forma la ecuación de la parábola es:

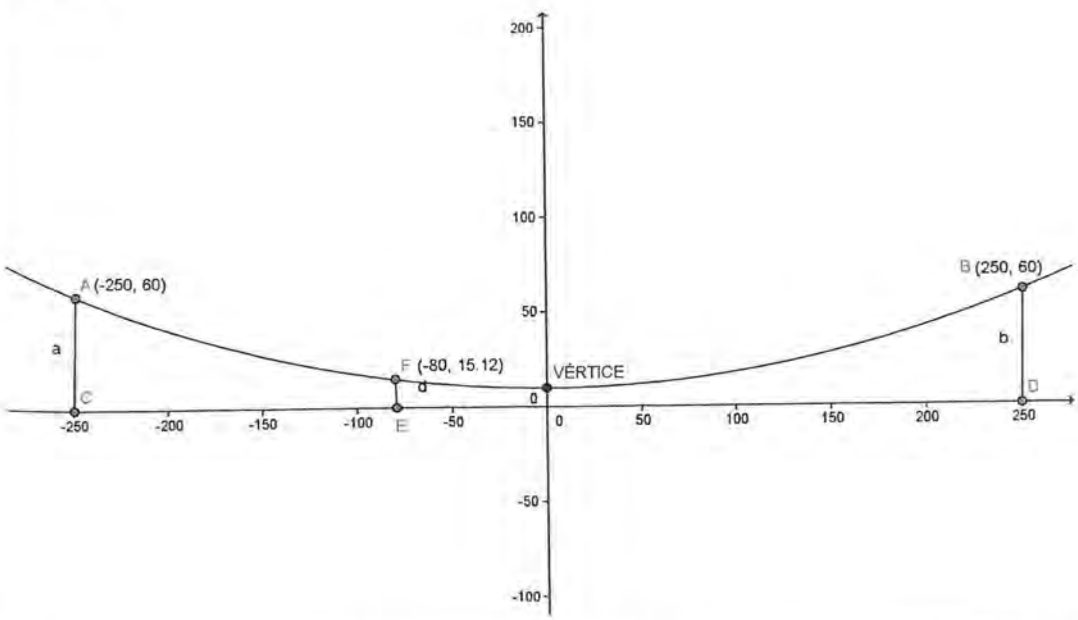
$$x^2 = 1250(y-10)$$

Así, la respuesta del problema, considerando esta ecuación, es equivalente a contestar la pregunta: ***¿cuánto vale y, si x=80? O también ¿cuánto vale y, si x= - 80?***

$$6400 = 1250(y-10) \qquad y = 15.12$$

La altura del puente colgante a 80m del centro es de 15.12m.

Gráfica:



4.4. Conversión de la ecuación en su forma general a la forma ordinaria

Decimotercera sesión:

El objetivo en esta etapa del análisis es que el estudiante convierta una ecuación de la parábola, escrita en su forma general, a una ecuación en su forma ordinaria, ya que ésta le permite conocer los elementos característicos de la curva. Deberá reconocer en esta última dichos elementos y relacionar este resultado con los tres temas anteriores.

Como se resaltó en el capítulo 3, este tema es particularmente difícil por las características de los alumnos del turno vespertino, en su gran mayoría no dominan las operaciones algebraicas fundamentales. Por eso, desde nuestra perspectiva, si pretendemos alcanzar los objetivos del programa, es necesario explicar cada paso de la secuencia y buscar mediante la repetición del proceso su dominio.

Se propone el ejercicio establecido en la secuencia didáctica:

Dada la forma general: $\mathbf{5x^2 - 40x - 16y + 48 = 0,}$ de la ecuación de la parábola, establecer:

a) La forma ordinaria,

b) las coordenadas del vértice,

c) las coordenadas del foco,

d) la ecuación de la directriz,

e) la longitud del lado recto

f) la gráfica.

Solución: Aquí es importante resaltar la secuencia, por eso es conveniente enumerar los pasos y explicarlos.

1.- Se divide entre ***5*** (coeficiente de $\mathbf{x^2}$) y se pasa el término en "y" y el independiente al miembro derecho:

$$\mathbf{x^2 - 8x - \frac{16}{5}y + \frac{48}{5} = 0,}$$

$$\mathbf{x^2 - 8x = \frac{16}{5}y - \frac{48}{5}}$$

Se les indica cerrar su cuaderno y no copiar del pizarrón. Esta modalidad nace de la necesidad de evitar el círculo vicioso, "ya lo tengo en mi cuaderno, ya terminé". Así, antes de copiar cada paso se les interroga si el proceso está claro, si no les queda alguna duda, en cuyo caso deben exponerla y por supuesto la regla de oro, mientras se lleva a cabo la explicación deben guardar silencio. Dadas las características del tema, *que implica el dominio de procesos algebraicos, y la composición del grupo, ésta se presenta como una opción necesaria.*

2.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo y se equilibra la ecuación en el miembro derecho:

$$x^2 - 8x + 16 = \frac{16}{5}y - \frac{48}{5} + 16$$

Aquí es necesario explicar que el número 16 resultó de $(\frac{8}{2})^2$, es decir, del análisis tradicional del cuadrado de un binomio resulta: $b^2 = (\frac{2ab}{2a})^2$

Simplificando para efecto de explicar la factorización en el paso 3

$$x^2 - 8x + 16 = \frac{16}{5}y + \frac{32}{5}$$

3.- Se factoriza:

$$(x-4)^2 = \frac{16}{5}(y+2)$$

4.- Se identifica esta ecuación con la forma ordinaria:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Parábola de eje vertical con vértice en ***(h, k)***

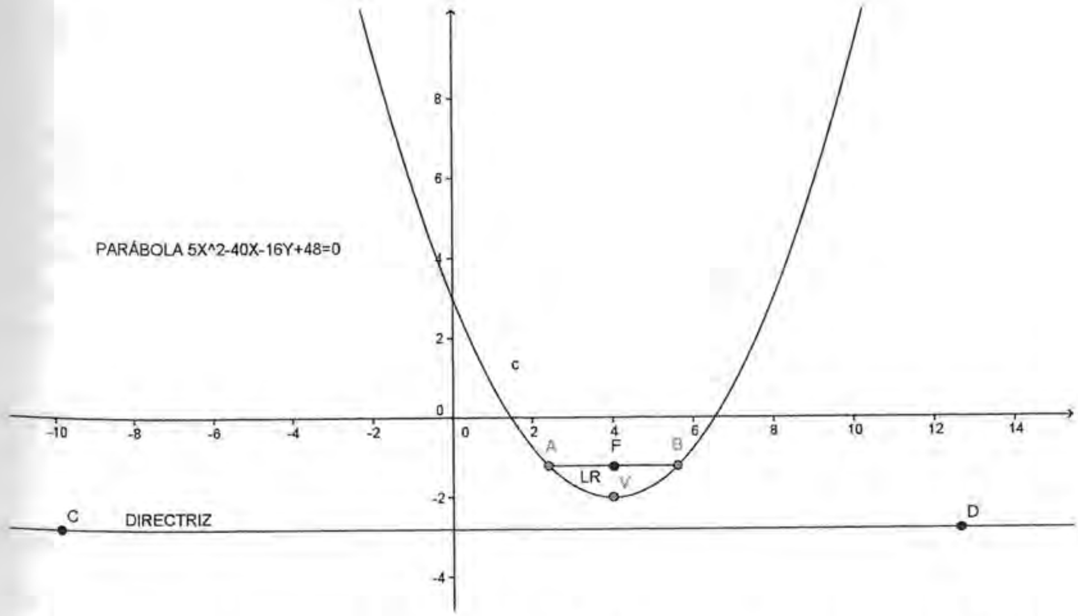
De esta manera las coordenadas del vértice son: ***V(4, -2)***

Se establece que $p = \frac{4}{5}$ por lo tanto el foco está en: $F(4, -\frac{6}{5})$

Por la misma razón la directriz es la recta: $y = -\frac{14}{5}$

El lado recto es: $LR = \frac{16}{5}$

Gráfica:



Se les hace notar que si la ecuación contiene x^2, entonces se trata de una parábola de eje vertical como en el ejemplo resuelto. En cambio, si contiene y^2, entonces se trata de una parábola de eje horizontal.

Se les propone resolver el ejercicio:

Dada la forma general: $2x^2 + 16x + 8y + 12 = 0$, de la ecuación de la parábola, establecer:

a) La forma ordinaria,

b) las coordenadas del vértice,

c) las coordenadas del foco,

d) la ecuación de la directriz,

e) la longitud del lado recto

f) la gráfica.

1.- Se divide entre *2* (coeficiente de x^2) y se pasa el término en "*y*" y el independiente al miembro derecho:

$$x^2 + 8x + 4y + 6 = 0$$

$$x^2 + 8x = -4y - 6$$

2.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo y se equilibra la ecuación en el miembro derecho:

$$x^2 + 8x + 16 = -4y - 6 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = -4y + 10$$

3.- Se factoriza:

$$(x+4)^2 = -4(y-2.5)$$

En esta parte del proceso, factorizar el miembro derecho de la ecuación les resultó difícil porque esperaban un número entero y positivo. Fue necesario recordar en forma grupal que factorizar significa convertir en factores y, al colocar el -4 fuera del paréntesis, sus factores dentro del paréntesis se encuentran por medio de una división. Se aceptó la cantidad en decimal por las razones ya expuestas. Lo anterior a pesar de que en cursos anteriores ya estudiaron el tema de factorización por factor común.

4.- Se identifica esta ecuación con la forma ordinaria:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Parábola de eje vertical con vértice en ***(h, k)***

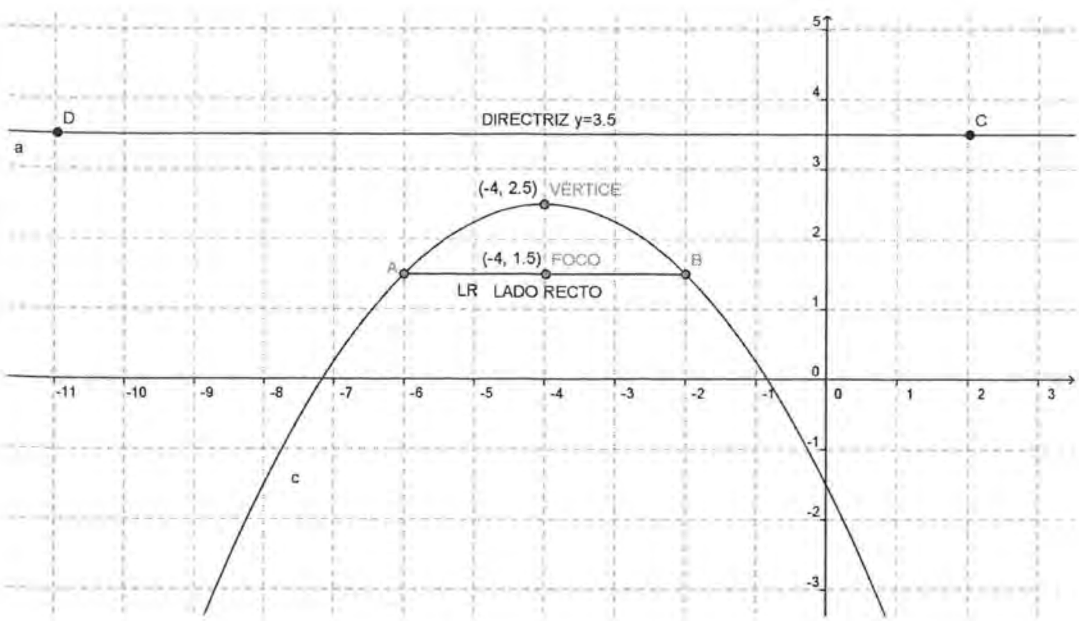
De esta manera las coordenadas del vértice son: ***V(-4, 2.5)***

Se establece que $\boldsymbol{p = -1}$ por lo tanto el foco está en: $\boldsymbol{F(-4, 1.5)}$

Por la misma razón la directriz es la recta: $\boldsymbol{y = 3.5}$

La longitud del lado recto es: $\boldsymbol{LR = 4}$

Gráfica:



Decimocuarta sesión:

Se les indica resolver los siguientes ejercicios:

1.- Dada la forma general: $3y^2 - 18x + 18y - 63 = 0,$ de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica	2.- Dada la forma general: $4y^2 + 20x - 32y - 36 = 0,$ de la ecuación de la parábola, establecer: a) La forma ordinaria, b) las coordenadas del vértice, c) las coordenadas del foco, d) la ecuación de la directriz, e) la longitud del lado recto f) la gráfica.

Para el ejercicio 1:

1.- Se divide entre *3* (coeficiente de y^2) y se pasa el término en "x" y el independiente al miembro derecho:

$$y^2 - 6x + 6y - 21 = 0$$
$$y^2 + 6y = 6x + 21$$

2.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo y se equilibra la ecuación en el miembro derecho:

$$y^2 + 6y + 9 = 6x + 30$$

3.- Se factoriza:

$$(y + 3)^2 = 6(x + 5)$$

4.- Se identifica esta ecuación con la forma ordinaria:

$$(y - k)^2 = 4p(y - h)$$

Parábola de **eje horizontal** con vértice en ***(h, k)***

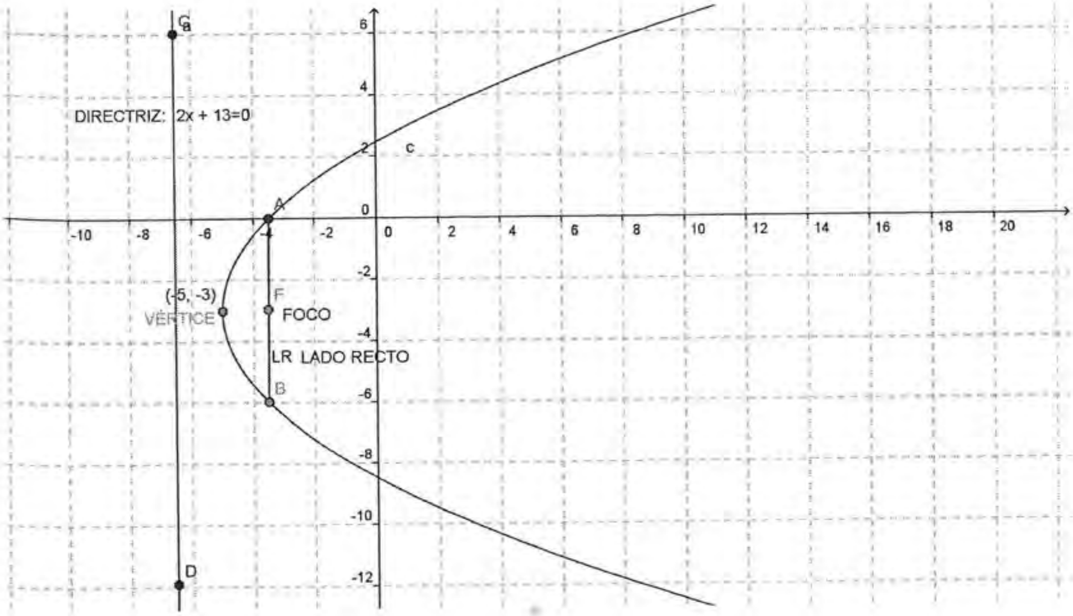
De esta manera las coordenadas del vértice son: ***V(-5,-3)***

Se establece que $\boldsymbol{p = 1.5}$ por lo tanto el foco está en: $\boldsymbol{F(-3.5, -3)}$

Por la misma razón la directriz es la recta:$\boldsymbol{x = -6.5,}$ o $\boldsymbol{2x + 13 = 0}$

La longitud del lado recto es: $\boldsymbol{LR = 4}$

Gráfica:



Para el ejercicio 2:

1.- Se divide entre 4 (coeficiente de $\mathbf{y^2}$) y se pasa el término en "x" y el independiente al miembro derecho:

$$\boldsymbol{y^2 + 5x - 8y - 9 = 0}$$
$$\boldsymbol{y^2 - 8y = -5x + 9}$$

2.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo y se equilibra la ecuación en el miembro derecho:

$$\boldsymbol{y^2 - 8y + 16 = -5x + 25}$$

3.- Se factoriza:

$$\boldsymbol{(y - 4)^2 = -5(x - 5)}$$

4.- Se identifica esta ecuación con la forma ordinaria:

$$\boldsymbol{(y - k)^2 = 4p(y - h)}$$

Parábola de **eje horizontal** con vértice en ***(h, k)***

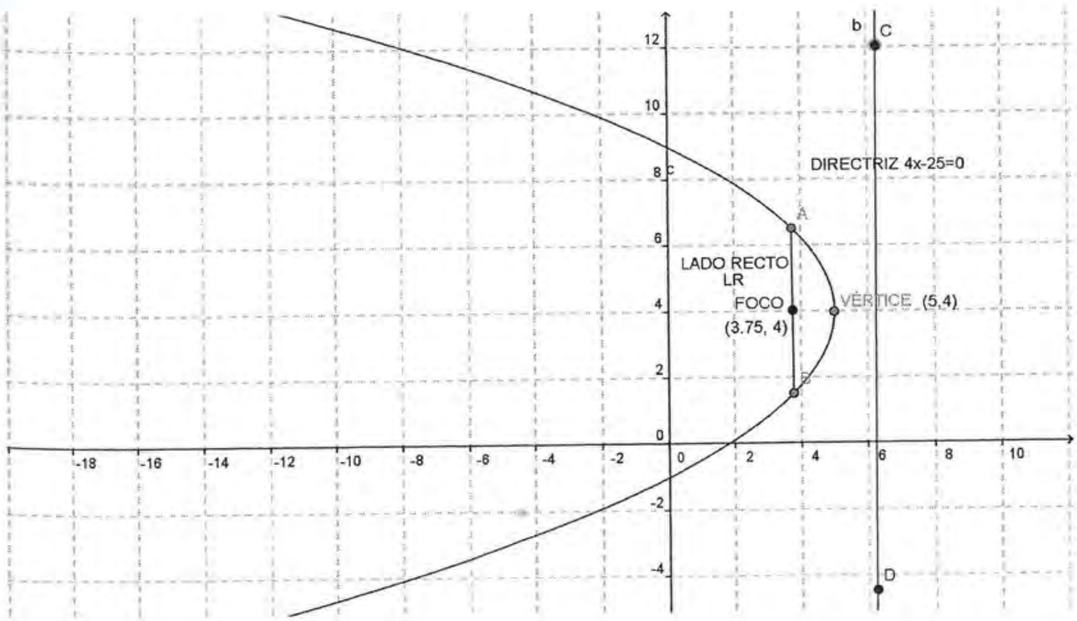
De esta manera las coordenadas del vértice son: ***V(5, 4)***

Se establece que $p = -1.25$ por lo tanto el foco está en: $F(3.75, 4)$

Por la misma razón la directriz es la recta: $x = 6.25$, o $4x - 25 = 0$

La longitud del lado recto es: $LR = 5$

Gráfica:



En general se puede decir que los alumnos cumplieron con la resolución de estos ejercicios haciendo válida la acotación expresada para la octava sesión.

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones.

> La relación entre lo personal y lo objetivo suele ser sutil. Nuestro modo de abordar la definición de problemas y temas afecta a su solución; es lo que sucede, por ejemplo, cuando se prefiere los números de la lotería elegidos personalmente a los dispensados por máquinas (aunque las series numéricas tienen la misma probabilidad de ser elegidas). En un sentido más general, nuestra unión inextricable por un saber y unas interpretaciones implícitas comunes señala interesantes extensiones de la práctica matemática estándar.
>
> John Allen Paulos
> "Érase una vez un número"
> (Paulos, 1999)[8]

5.1. Evaluación final

Aunque la participación y trabajo en el aula fueron satisfactorios: no hubo tarea que no entregaran, o ejercicio que no resolvieran, los resultados en la evaluación escrita no fueron los esperados.

En forma tabular se presentan los resultados. Se hizo una evaluación escrita con cuatro reactivos, los alumnos contaron con cien minutos para resolver. Los reactivos fueron:

1.- Una parábola tiene su vértice en el punto (-3, 8) y su foco en el punto (-3, 7) obtener:
a) La ecuación en su forma ordinaria
b) La ecuación en su forma general
c) Ecuación de la directriz
d) La longitud del lado recto
e) Su gráfica

2.- La directriz de una parábola es la recta x=1 y su foco se encuentra en el punto (5, 6) obtener:
a) La ecuación en su forma ordinaria
b) La ecuación en su forma general
c) La longitud del lado recto
d) Su gráfica

3.- Dada la ecuación: $\mathbf{2x^2 - 28x - 12y + 38 = 0}$, obtener:
a) La ecuación en su forma ordinaria
b) Las coordenadas del vértice
c) Las coordenadas del foco
d) La longitud del lado recto.

4.- Un arco parabólico mide de base 14m y de altura máxima 20m. Obtener la altura en un punto situado a 4m de uno de los apoyos.

5.2. Tabla de resultados (1)

ALUMNO	REACTIVO *1*	REACTIVO *2*	REACTIVO *3*	REACTIVO *4*	SUMA	CALIFICAC. Criterio 1	CALIFICAC. Criterio 2
1	1	1	1	1	4	100	100
2	1	1	1	0	3	94	94
3	0.5	1	1	0.5	3	94	94
4	1	1	1	0	3	94	94
5	0.5	1	1	0	2.5	91	91
6	1	1	0.5	0	2.5	91	91
7	0.5	1	1	0	2.5	91	91
8	1	1	0.5	0	2.5	91	91
9	1	1	0.5	0	2.5	91	91
10	0.5	1	1	0	2.5	91	91
11	1	0.5	0.5	0.5	2.5	91	91
12	1	1	0	0	2	88	88
13	0.5	0.5	1	0	2	88	88
14	0.5	1	0.5	0	2	88	88
15	1	1	0	0	2	88	88
16	0.5	1	0.5	0	2	88	88
17	1	1	0	0	2	88	88
18	0.5	1	0	0.5	2	88	88
19	0.5	0.5	0.5	0	1.5	82	40
20	0.5	1	0	0	1.5	82	40
21	0.5	0.5	0.5	0	1.5	82	40
22	0	0	1	0	1	78	25
23	0	0	0.5	0.5	1	78	25
24	0.5	0.5	0	0	1	78	25
25	0	1	0	0	1	78	25
26	1	0	0	0	1	78	25
27	1	0	0	0	1	78	25
28	1	0	0	0	1	78	25
29	1	0	0	0	1	78	25
30	1	0	0	0	1	78	25
31	0.5	0.5	0	0	1	78	25
32	0.5	0.5	0	0	1	78	25
33	1	0	0	0	1	78	25
34	0	0	0	0	0	70	0
35	0	0	0	0	0	70	0
36	0	0	0	0	0	70	0
37	0	0	0	0	0	70	0
38	0	0	0	0	0	70	0
39	0	0	0	0	0	70	0
40	0	0	0	0	0	70	0
41	0	0	0	0	0	70	0
42	0	0	0	0	0	70	0
43	0	0	0	0	0	70	0
SUMA	23	21.5	13.5	3.0			

5.2.1. Explicación de la tabla.

Para efectos de análisis se definieron las siguientes cantidades:

1	Ejercicio resuelto correctamente, con claridad en el proceso
0.5	Ejercicio incompleto o con resultado incorrecto
0	Ejercicio sin resolver

Equivalencias

PUNTOS	CALIF. EXAMEN	30%	CALIF. FINAL
4	100	30	100
3	80	24	94
2.5	70	21	91
2	60	18	88
1.5	40	12	82
1	25	8	78
0	0	0	70

5.2.2. Calificación criterio 1.

El 70% de la calificación es la evaluación continua que se obtiene con la entrega de las "evidencias de aprendizaje", en este caso todos tienen los 70 puntos de esta ponderación a la cual se suma el 30% del resultado del examen escrito. De esta forma, al sumar, se determina la calificación final. Estas cantidades se reflejan en la tabla de resultados en la penúltima columna señalada como calificación criterio 1.

Aplicando este criterio, que podemos denominar oficial, porque es el señalado por la normatividad de la institución, todos los alumnos aprueban con calificaciones que varían de 70 a 100 puntos. Dado que la evaluación continua les da 70 puntos, los alumnos aprueban y la mayoría no realiza el menor esfuerzo para buscar buenos resultados en el examen escrito.

5.3. Contexto

Con la aplicación de la RIEMS se establecieron nuevas disposiciones para evaluar el desempeño escolar, la más significativa es la ponderación de 70% para actividades en el aula o extra-clase y 30% para el examen escrito. Las actividades en el aula se califican con las llamadas evidencias de aprendizaje, es decir, los reportes escritos que los alumnos entregan, (trabajos de investigación, ejercicios extra-clase, resolución de problemas) o el mismo cuaderno de apuntes con lo cual integran su "portafolios de evidencias". Al completar el 100% de dichas evidencias, el alumno se hace acreedor al 70% de su calificación. En la mayoría de los casos, por el número de alumnos, el Profesor únicamente verifica que la tarea se haya entregado, es decir que las "evidencias de aprendizaje" estén completas, sin revisar su contenido. Con esta práctica las "evidencias de aprendizaje" en realidad, lo único que evidencian es que el alumno estuvo ocupado llenando papeles. En clase de matemáticas II sorprendí a un alumno con su libro de historia, copiando textual y apresuradamente el contenido del libro, al preguntarle por qué, simplemente dijo que no tuvo tiempo de hacerlo en casa y, con la entrega de esa copia manuscrita, iban a evaluar Historia, ¡era su evidencia de aprendizaje! ¿y el análisis del texto? Eso no era importante, lo importante, desde su punto de vista, era entregar el papel.

Con esta forma de evaluar se está gestando un tipo de estudiante que trabaja mucho para entregar las evidencias, pero no se ocupa del análisis y de la reflexión que generen el aprendizaje. Es histórico que el principal interés de la mayoría de los estudiantes es aprobar los cursos, entonces, privilegian sus esfuerzos en actividades con las cuales consigan este objetivo, el aprendizaje pasa a segundo término. Si a su vez la normatividad oficial y las circunstancias de las instituciones le permiten un camino con el mínimo esfuerzo, tomará esa ruta para aprobar.

En noviembre de 2009, los profesores que integran la academia de matemáticas del Colegio de bachilleres, plantel Cancún uno, dirigieron una propuesta a la dirección del plantel, por la problemática derivada de la aplicación de la RIEMS. Este documento fue turnado a la dirección académica estatal, la cual organizó una reunión de profesores de distintas áreas, del mismo plantel, para escuchar sus opiniones, ahí se dijo, en voz de la entonces directora académica estatal, que se iba a dar respuesta escrita al documento, hasta la fecha, (febrero de 2012) no se ha recibido dicha respuesta. Para esta tesis, la importancia del documento radica en que refleja las circunstancias en que se labora en el lugar donde se aplicó la propuesta didáctica y que influyen en el desempeño escolar y en los resultados de la evaluación. Por esta importancia se incluye a continuación como una referencia contextual. Se omiten los nombres de los profesores que firmaron el documento y del funcionario a quien fue dirigido.

Cancún Q. Roo, 4 de noviembre de 2009.

Distinguido Maestro.

La ACADEMIA DE MATEMÁTICAS de este plantel, hace de su conocimiento una problemática que se ha presentado en los **primeros semestres,** al implementar los nuevos programas derivados de la REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (RIEMS) **en particular en la nueva forma de evaluación.**

El nuevo programa de **Matemáticas 1** está dividido en **10 bloques**, por cada bloque se deben generar dos calificaciones derivadas de dos actividades: la evaluación continua que equivale al 70% de la calificación total y la aplicación de un examen escrito que representa el faltante 30%. Esto trajo como consecuencia exceso de trabajo para generar la calificación y para registrarla en el sistema, aproximadamente, cada semana y media se debe repetir el proceso de evaluación y registro en una forma operativa poco práctica.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La original forma de calificar del sistema Colegio de Bachilleres, consistía en la aplicación de dos exámenes bimestrales, cada uno dividido en dos partes, por lo que el programa total de cualquier asignatura constaba de cuatro partes. Generalmente la evaluación continua representaba el 20% y el examen bimestral el 80% de la calificación final de cada parte. Originalmente, si un alumno reprobaba tres o cuatro partes reprobaba el curso y debía presentar un examen de acreditación especial o repetir curso. Para reducir el índice de reprobación se probaron distintas reformas: desde hacer el examen mensual, aplicando por separado cada parte, hasta permitir que un alumno que reprobara tres partes tuviera derecho a presentar examen de regularización. Esta última ya quedó en el borde de la desesperación. Con la aplicación de los exámenes mensuales, lo único que se logró fue duplicar el tiempo necesario para realizarlos sin que hubiera avances importantes en el aprovechamiento que se reflejara en las calificaciones. Finalmente, en la penúltima reforma se dividió cada programa en dos partes, de tal manera que se aplicaban dos exámenes bimestrales, (… "volver a los básicos"…) con la novedad que la máxima ponderación que podría tener un examen bimestral era de 50%, el otro 50% debía ser evaluación continua. Lo último derivado de la tendencia de **evaluar principalmente el proceso, no el resultado,** que en particular **en el área de matemáticas resulta contraproducente.**

PROBLEMÁTICA ACTUAL.

A nuestro juicio, la propuesta actual de otorgar 70% de evaluación continua derivada de considerar: la disposición al trabajo, la actitud, el cumplimiento en las tareas, el trabajo colaborativo, etc. hace que los estudiantes **disminuyan el esfuerzo**, al aprobar sin necesidad de demostrar la habilidad matemática en un examen escrito. Es precisamente en este tipo de pruebas donde **confrontan sus competencias** y se esfuerzan si se ven impelidos por la necesidad de aprobar el examen, **manifiestan su talento individual** y fortalecen su confianza en el saber hacer. La propuesta actual es válida para otro tipo de conformación de alumnos y de grupos, por ejemplo, que los grupos no fueran mayores de 20 alumnos y el profesor dispusiera de tiempo para interactuar, conocerlos, observar en clase su trabajo individual y de equipo, desarrollar técnicas de autoevaluación y coevaluación. Al respecto, incluimos a continuación un párrafo de un documento del diplomado en competencias docentes: Evaluación en tiempos de cambio (Ríos Cabrera Pablo, México, UPN-Cosdac 2008)

"Para ayudar a los estudiantes necesitaríamos, más bien, conocer el progreso de cada uno, las dificultades que se le presentan en el camino, y cómo las puede ir venciendo. En este sentido, lo fundamental de la evaluación es observar y reflexionar con el estudiante, durante la realización de su labor, captar sus acciones y reacciones, percatarse de sus opiniones e intereses, descubrir sus procesos de razonamiento, sus dificultades y capacidades, ofrecer retroalimentación sobre su ejecución y determinar las estrategias didácticas más adecuadas para subsanar las dificultades y potenciar las capacidades."

Como se podrá inferir, el ideal mostrado en este documento difícilmente se podrá alcanzar con grupos de 50 alumnos y 10 calificaciones por semestre, porque este tipo de procesos demandan del docente un tiempo del que carece cuando el grupo es numeroso. Pensamos que la dificultad se potencia por el exceso de calificaciones que se proponen, y este exceso **le quita tiempo al trabajo docente afectando la calidad educativa, es decir, con esta práctica habrá más aprobados pero con menor calidad académica.**

PROPUESTA

En consecuencia Sr. Director proponemos que se generen dos calificaciones por semestre, independientemente de la conformación de los bloques, de esta forma se dispondría de tiempo para observar y reflexionar, como dicen las propuestas de la RIEMS y tener la certeza de una valoración con mayor conocimiento de causa. Asimismo proponemos que el examen escrito tenga una ponderación de 50%, por las razones expuestas al inicio de este documento. En particular, en matemáticas es deseable que el alumno manifieste sus competencias en la aplicación de sus conocimientos y en la solución de problemas motivado por el interés de un resultado necesario, el mundo real le va a exigir esta demostración. El otro 50 % se podrá generar durante el proceso docente-educativo con las recomendaciones de la Reforma.

Agradecemos todas las atenciones que se sirva brindar a la presente, y tenga la seguridad de que, en el marco de la mejora continua, este documento tiene el único propósito de participar y proponer aprovechando las experiencias muchas de este cuerpo docente, en beneficio de nuestra **Institución** y en la razón de ser de ésta: **los alumnos**.

Atentamente

Por la Academia de Matemáticas:

Adicionalmente a lo expresado en el anterior documento, después de este resultado, en su calificación, el alumno cuenta con dos exámenes más para aprobar el "bloque", uno llamado de *recuperación* y otro de *regularización*, sin que se pueda considerar que la materia está reprobada, de ser éste el caso, posteriormente podrá someterse a un examen *extraordinario*. Con esta normatividad, parece ser que la idea es aprobar al alumno a toda costa.

5.4. Calificación criterio 2.

En virtud de los bajos resultados en los exámenes escritos y, al no poder cambiar la normatividad, el mismo grupo de profesores que emitió el escrito sin respuesta, haciendo valer la autonomía de la academia de matemáticas del plantel, propuso la siguiente norma: El 70% de la evaluación continua solo es válido si en el examen escrito el alumno obtiene como mínimo 60 de calificación. Para calificaciones menores de 60 en el examen escrito, se considerará cero de evaluación continua.

Con la aplicación de esta disposición interna de la academia de maestros, se generan las calificaciones registradas en la última columna de la tabla de resultados donde aprueban 18 alumnos y reprueban 25.

La descripción de este contexto es importante porque incide en la actitud mediante la cual los alumnos jerarquizan sus propósitos y sus actividades.

5.5. Análisis de los resultados

Para efectos de esta tesis con la calificación establecida en cualquiera de los criterios se termina el proceso. Pero, ¿qué explicación encontramos para el bajo rendimiento reflejado en el examen escrito? Empezamos el análisis con el ejercicio número 4, el cual solo fue resuelto por un alumno y hubo cuatro intentos que se acreditaron medio punto, numéricamente en la tabla aparece en el total como 3, de un total de 43 alumnos, redondeando diríamos que el 7% lo resolvió.

Al preguntar a los alumnos qué les había sucedido, la mayoría contestó que no habían estudiado el tema de los "problemas" y que habían "repasado los ejercicios", porque los problemas son muchos, les lleva mucho tiempo y todos son diferentes; en cambio en los ejercicios "todos son iguales" únicamente le cambian los datos. Además de que resolviendo la mitad del examen "pasaban". Los alumnos estaban informados de que con dos ejercicios de cuatro, alcanzaban la validación para la evaluación continua, (se aplicó el criterio 2) de esta forma su calificación del bloque sería de 88, de acuerdo a lo que se explicó anteriormente. La meta que la mayoría se propuso era obtener 60 en el examen escrito, para lo cual no necesitaban resolver el problema de texto.

De alguna forma, lo anterior también explica lo ocurrido con el ejercicio 3, la conversión de la forma general a la forma ordinaria fue el último tema del bloque, numéricamente con 13.5 aciertos de 43 posibles, redondeando se puede expresar como 31%.

Asimismo, los ejercicios 2 y 1 con 50 y 53% respectivamente. Los alumnos se enfocaron principalmente en éstos.

Aún en esta realidad, persiste la pregunta **¿por qué, de acuerdo al criterio 2, 25 alumnos reprobaron?**

Porque en realidad no han reprobado. Como se explicó anteriormente, después de este proceso, los alumnos tienen derecho a un examen llamado de **recuperación**, similar y con los mismos temas del examen presentado. En estas condiciones muchos esperan hasta "recuperación" (¿Cuándo es la "recu" maestro?) como una estrategia para el menor esfuerzo y únicamente estudian los ejercicios del primer examen. Además, si reprueban recuperación, tienen derecho a otro examen llamado de **regularización**. En el examen de recuperación 7 de los 25 aprobaron los bloques 7 y 8 objeto de análisis en esta tesis, (alumnos 19, 20, 26, 31, 32, 39 y 43). De los 18 restantes 5 aprobaron en regularización, (alumnos 21, 25, 28, 30 y 38). Las calificaciones obtenidas en estas dos fases oscilan entre 60 y 100 puntos. Los 13 alumnos restantes que representan el 30% del grupo, reprobaron el curso. Para encontrar una explicación a esta fatalidad daremos cuenta de los resultados de todo el semestre, es decir, la propuesta didáctica se diseñó para los bloques 7 y 8 del curso, pero qué ocurrió en los otros 8 bloques de los 10 que integran el contenido. Para el análisis integral se elaboró la tabla de RESULTADOS (2) con todos los datos obtenidos durante el semestre.

5.6. Tabla de resultados (2)

AL	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	ES	Regularización	EE	CF
1	100	100	95	96	100	100	100	100	100	100	73			10
2	96	95	88	88	100	100	94	94	100	100	57			9
3	91	91	94	94	100	88	94	94	100	100	63			9
4	100	100	90	90	100	91	94	94	100	100	42			9
5	91	91	50/50	50/50	90	97	91	91	60	60	36	75,75		8
6	88	88	90	90	100	88	91	91	90	90	52			9
7	94	94	83	83	100	50/65	91	91	90	90	47			8
8	90	90	50/90	50/90	90	93	91	91	90	90	36			8
9	50/80	50/80	90	90	90	91	91	91	90	90	42			8
10	50/72	50/72	50/76	50/75	80	100	91	91	90	90	68			8
11	88	88	88	88	100	93	91	91	100	100	47			9
12	96	95	96	95	100	88	88	88	60	60	73			9
13	97	97	50/50	50/50	90	50/50	88	88	60	60	57	90,86,86		8
14	88	88	88	88	100	91	88	88	90	90	36			8
15	50/50	50/50	88	88	90	50/50	88	88	60	60	31	90,90,74		7
16	94	94	88	88	100	50/50	88	88	70	70	57	70		8
17	90	90	88	88	100	91	88	88	100	100	63			9
18	94	94	93	92	100	94	88	88	100	100	52			9
19	91	91	50/50	50/50	90	50/50	40/60	40/60	N/N	N/N	42	75,75,60,60,60		7
20	50/72	50/72	50/50	50/50	80	50/60	40/75	40/75	90	90	42	85,85		7
21	94	94	91	91	100	88	40/50	40/50	60	60	52	90,90		8
22	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	25/50	25/50	60	60	42		50	5
23	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	25/50	25/50	90	90	36		50	5
24	88	88	50/69	50/68	90	50/50	25/50	25/50	90	90	47	60,30,30	50	5
25	97	97	83	83	100	50/50	25/50	25/50	90	90	57	86,100,100		9
26	93	92	65	65	90	50/50	25/60	25/60	60	60	31	100		7
27	50/65	50/65	50/50	50/50	80	50/50	25/50	25/50	60	60	15	25,25,N,N,N		5
28	93	92	88	88	100	90	25/50	25/50	90	90	21	60,60		8
29	88	88	50/50	50/50	90	50/N	25/N	25/N	90	90	31	30,30,20,20,20		5
30	50/93	50/93	91	91	90	50/50	25/50	25/50	90	90	47	82,65,65		8
31	50/50	50/50	88	88	90	88	25/65	25/65	100	100	42	75,75		8
32	88	88	91	91	100	90	25/60	25/60	100	100	42			8
33	88	88	50/50	50/50	90	50/50	50/50	50/50	90	90	63	50,50,30,50,50		5
34	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/60	0/50	0/50	90	90	63	S/D		5
35	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	0/50	0/50	90	90	52	S/D	50	5
36	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	0/50	0/50	90	90	57	S/D	50	5
37	88	88	50/72	50/72	90	50/50	0/50	0/50	90	90	63	30,30,30	50	5
38	50/80	50/80	50/50	50/50	80	50/60	0/50	0/50	90	90	36	63,63,60,60		7
39	50/70	50/70	50/50	50/50	80	100	0/85	0/85	90	90	42	60,60		8
40	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/N	0/N	0/N	100	100	N	S/D		5
41	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	0/50	0/50	60	60	21	S/D		5
42	50/50	50/50	50/50	50/50	80	50/50	0/50	0/50	90	90	52	S/D		5
43	50/50	50/50	50/50	50/50	80	89	0/85	0/85	N/N	N/N	57	75,75,60,60		7

5.6.1. Explicación de la tabla:

Al..........Alumno

B...........Bloque

ES..........Examen semestral. Examen que aplica la institución estatal "Colegio de Bachilleres", con todos los contenidos del programa oficial y representa el 10% de la calificación final

EE..........Examen extraordinario

CF..........Calificación final del semestre

50/80 Cuando se encuentran dos calificaciones separadas por una diagonal, la primera es la calificación obtenida en el proceso ordinario del bloque, en el cual el alumno fue reprobado. La segunda es la calificación obtenida en el examen de recuperación. Para este ejemplo, el alumno reprobó con 50 y en recuperación obtuvo 80.

N............El alumno no presentó el examen o no entregó el trabajo.

S/D..........Sin derecho. El examen de regularización se presenta al final del curso, después de obtener 10 calificaciones ordinarias o de recuperación. Si en algún bloque aún está reprobado, el alumno presenta examen de regularización, pero no debe rebasar de 5 el número de bloques reprobados. Si los rebasa no tiene derecho a regularización.

Veamos el caso del alumno 20 para ejemplificar la forma de obtener la calificación final. Se toman las **diez calificaciones aprobatorias** obtenidas en forma ordinaria, de recuperación o de regularización, (72, 72, 85, 85, 80, 60, 75, 75, 90, 90) y se obtiene el promedio: **78.4**, éste se multiplica por 0.90, lo que arroja: **70.56**, a esta cantidad se le suma el resultado del examen semestral: **42**, cuyo 10% es **4.2**, resultando finalmente: **74.76**, mismo que se redondea a un dígito, por lo que en la columna se observa 7 como calificación final.

Con base en la tabla de RESULTADOS (2), para evaluar numéricamente la propuesta didáctica abordaremos la siguiente pregunta: ¿fue mejor el desempeño en los bloques 7 y 8, objeto de la propuesta? Numéricamente podemos decir que no. Si se consideran las calificaciones ordinarias, antes de recuperación, obtenidas en los bloques 1 y 2, (se evalúan por pares aunque se registran por separado, esto debido a la problemática explicada en el documento del 4 de noviembre del 2009) **25** alumnos aprobaron. En los bloques 3 y 4, **21** alumnos aprobaron, en el bloque 6, **20** alumnos y en los bloque 7 y 8, **18** alumnos.

En forma tabular:

BLOQUE	TEMA	APROBADOS	OBSERVACIONES
1 y 2	Lugares geométricos	25	
3 y 4	Ecuación de la recta	21	
5	Circunferencia con centro en (0,0)	43	Se evaluó con un trabajo de investigación por equipos.
6	Circunferencia con centro en (h,k)	20	
7 y 8	Parábola	18	
9 y 10	Elipse	41	Se evaluó con un trabajo de investigación por equipos.

5.7. Comentario final.

Lo que puedo argumentar ante este resultado es que el contexto pesó más que la novedad de la propuesta didáctica. Los alumnos que reprobaron ya estaban arrastrando un historial de reprobación que difícilmente podrían superar. (6 presentaron examen extraordinario y reprobaron, optaron por un curso de repetición, 7 causaron baja por superar en el semestre el número de materias reprobadas permitidas) Lo que quiero expresar es que el problema no fue la materia de matemáticas.

Aun así pienso que su utilización fue positiva ya que sin mayor complicación hicieron propios los conceptos que distinguen a la parábola y lo que faltó, al final, es el manejo algebraico y la falta de formación en la resolución de problemas. Éste es todo un tema. Los alumnos están acostumbrados a los procesos cortos, a la inmediatez, "aplico la fórmula y ya está". También están acostumbrados a que el maestro explique procesos o procedimientos y ellos repiten. Aquí el reto es romper esta actitud con un conjunto de actividades que los hagan reflexionar y construir con base en sus antecedentes. Una gran limitante es el propio programa que el maestro debe cumplir obligatoriamente y el tiempo disponible. Si bien, los resultados no fueron los esperados, la experiencia fue enriquecedora para buscar apuntalar las actividades académicas que se realicen, con un estudio previo de los historiales académicos y sociales de los alumnos. Esto, claro está, en la medida en que las circunstancias de tiempo y recursos disponibles lo permitan.

Quiero terminar este trabajo citando textualmente del libro de Ikran Antaki, *El Manual del Ciudadano Contemporáneo*, (Editorial Planeta Mexicana, S.A. de C.V. México 2000, 2004) (Antaki I. , 2004)[1] lo siguiente:

La generación de mi padre, la mía y la de mi hijo, no tienen las mismas jerarquías de valores. Antes se citaba a Dios, al padre y al maestro; hoy estas autoridades han desaparecido y no es un problema de educación, sino de sociedad. Hemos renunciado a "imponer", "la autoridad" se ha transformado en una palabra obscena, y las nuevas teorías educativas quieren reformar a los padres. La política de "no intervención" total en los asuntos de los niños ha revelado ser de una violencia inaudita hacia ellos, mucho *más dañina que el autoritarismo de antaño, cuando tenían reglas para poder transgredirlas. Antes los niños-problema venían de las familias problemáticas, hoy vienen de todas partes. A eso hay que agregar los delirios de la sociología, que nos hizo pasar insensiblemente de la explicación a la justificación: en una sociedad blanda como la nuestra, el alumno está a menudo apoyado por su familia en sus comportamientos desordenados. Quizá es tiempo de restaurar la autoridad, porque los padrinos aparecen cuando ya no hay padres; entonces la ley del barrio reemplaza a la ley de la república.*

Otro problema de civilización es el divorcio entre el mundo y la escuela, entre la inmediatez televisiva y la paciencia de la enseñanza, entre la comunicación y la transmisión. Se quiso adaptar la escuela al mundo, en lugar de hacer de ella un lugar de resistencia. Necesitamos instituciones sólidas, que circunscriban las responsabilidades, y necesitamos manifestar claramente que la tarea educativa concierne a los ciudadanos en su conjunto, no sólo a los profesionales de la educación. La palabra ***paideia*** *implicaba la cultura de la personalidad y daba una gran importancia a la conciencia del medio social y natural en el cual deben actuar los individuos: es tiempo de recuperar su sentido.*

Chetumal Quintana Roo, Julio de 2012.

Bibliografía y referencias.

1. Antaki, I. (2004). *El manual del ciudadano contemporaneo.* México, D.F.: Planeta mexicana S.A. de C.V.

2. Antaki, I. (1992). *Segundo Renacimiento.* México: Joaquín Mortiz.

3. Escalante, C. C. (Septiembre de 2010). Notas sobre Aprendizaje y Aprendizaje de las matemáticas. Chetumal, Quintana Roo, México.

4. Fuentes, C. (1997). *Tiempos y espacios.* México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

5. Garciadiego, A. (2008). Opinión. *El Mural* .

6. Irving, W. (1981). *Leyendas de la Alhambra.* Barcelona: Pomaire.

7. Kindle, J. H. (1978). *Geometría Analítica.* Barcelona: Mcgraw-hill.

8. Paulos, J. A. (1999). *Érase una vez un número.* Barcelona, España: Tusquets Editores S.A.

9. Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas* (Décima reimpresión, septiembre de 1982 ed.). México D. F., México: Trillas.

10. Pública, S. d. (Noviembre de 2009). Matemáticas III. . *Serie: Programas de estudio* . México , D.F., México: Dirección General de Bachillerato.

11. Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

12. *Wikipedia la enciclopedia libre*. (8 de abril de 2010). Recuperado el 12 de enero de 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_van_Hiele