UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales mediante la modelación del crecimiento poblacional

Tesis
Para obtener el grado de
Maestra en enseñanza de las matemáticas

Presenta
Diana Jazmín Tec Escalante

Directora
Dra. Verónica Vargas Alejo
Codirectora
Dra. Guadalupe de la Paz Carmona Domínguez

Asesores
MEM. Alicia Lizzette Suárez Martín
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. César Cristóbal Escalante

Chetumal Quintana Roo, México, Septiembre de 2016

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Trabajo de tesis bajo la supervisión del comité del programa de maestría y aprobada como requisito para obtener el grado de:

Maestra en enseñanza de las matemáticas

Comité de Tesis

Directora: ______________________
Dra. Verónica Vargas Alejo

Codirectora: ______________________
Dra. Guadalupe de la Paz Carmona Domínguez

Asesor: ______________________
MEM. Alicia Lizzette Suárez Martín

Asesor: ______________________
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Asesor: ______________________
Dr. César Cristóbal Escalante

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar parte de toda la gratitud que siento hacia las personas que siempre estuvieron listas para brindarme su ayuda.

A mi familia, fuente de incondicional y constante apoyo en toda mi vida, tanto en los momentos buenos como los de infortunio; de la misma forma a lo largo de la realización del posgrado.

A mis compañeros de la maestría por brindarme su amistad y su apoyo; por los buenos momentos que hemos compartido; por lo que hemos aprendido y aprendemos continuamente de todos, tanto profesional como personalmente.

A mi Directora de Tesis, la Dra. Verónica Vargas Alejo, por su orientación y ayuda brindada, por su seriedad profesional y amistad que me permitieron aprender más allá de lo marcado en el plan del posgrado.

A los profesores que participaron en mi formación académica durante los estudios del posgrado, por todos los conocimientos que aportaron.

Finalmente, agradezco a las siguientes instituciones, las cuales a través de distintos fondos, investigadores y programas como la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas apoyaron el desarrollo de la presente tesis: CONACYT, UTSA, UQROO (PROJI 2015) y UMSNH.

DEDICATORIA

A mi padre Benito Tec Tacú y mi madre Beatriz Escalante Dzul

Por construir los cimientos de lo que soy en mi educación, tanto académica, como de la vida; por el incondicional apoyo que me han brindado a través del tiempo.

Por los ejemplos de perseverancia y constancia que me han infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

Este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

RESUMEN

En el presente trabajo se reporta el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica cuyo objetivo general es promover el desarrollo de conocimiento y comprensión alrededor del concepto de función; en particular, de la función exponencial y conceptos asociados, como variación y tasa de cambio, en estudiantes de los primeros semestres de nivel superior, a través de la modelación de situaciones que impliquen que hagan uso de conceptos asociados. Los estudiantes que abordaron la secuencia didáctica se caracterizan por ser alumnos a quienes les disgustan las matemáticas y creen que aprenderlas consiste en memorizar conceptos, algoritmos y fórmulas, además de que carecen de experiencias en la resolución de problemas y modelación.

Los antecedentes considerados para el diseño de la secuencia fueron: (1) las aproximaciones didácticas a las que se han enfrentado los estudiantes se caracterizan por el énfasis en conceptos que se aprenden de manera aislada (2) se han documentado dificultades en el aprendizaje de la función exponencial y conceptos asociados (Ärlebäck y Doerr, 2013), particularmente cuando las tasas de cambio son negativas. Otras dificultades se relacionan con el uso del lenguaje para describir y representar matemáticamente fenómenos de cambio, así como la falta de habilidad para encontrar la relación entre las diversas representaciones (por ejemplo, gráficos, tablas y ecuaciones) y para utilizar estas ideas a otros contextos.

La fundamentación teórica para el diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica fue la de Modelos y Modelación. Desde esta perspectiva, aprender matemáticas implica la construcción de modelos matemáticamente significativos a lo largo de diferentes dimensiones (Lesh y Doerr, 2003).

En la secuencia didáctica se propone a los estudiantes, en una primera fase, modelar con lápiz y papel una situación acerca del crecimiento y decrecimiento de una población de manatíes. Posteriormente, realizaron simulaciones mediante el software NetLogo, al variar los parámetros del modelo original. Finalmente, se propone que

resuelvan una actividad que emplea los mismos conceptos matemáticos, pero en un contexto diferente, con la finalidad de generar la transferencia de sus conocimientos.

Los resultados muestran que al resolver las actividades de esta secuencia, los estudiantes conjeturaron, observaron patrones, generalizaron y evaluaron sus ideas matemáticas relacionadas con el concepto de función, función exponencial y conceptos asociados. Cumpliéndose así los objetivos de la secuencia didáctica. En el proceso de solución de las actividades, se identificaron varios ciclos de comprensión caracterizados por distintas formas o maneras de pensamiento: numéricas, numéricas tabulares, gráficas y algebraicas. La participación del docente fue fundamental porque apoyó al estudiante al descubrimiento y construcción de relaciones o distintas formas de pensamiento.

Los resultados descritos coinciden con lo señalado en la literatura de investigación (Lesh y Doerr, 2003), respecto a que en un proceso de modelación los estudiantes muestran distintos ciclos de comprensión. En cada uno de ellos, los alumnos modifican, extienden y refinan su forma de pensar, lo cual se observa a través de las distintas representaciones que utilizan. Los modelos iniciales están estrechamente relacionados con la comprensión de la situación y los recursos de los estudiantes.

CONTENIDO

FIGURAS

TABLAS

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA

En el capítulo se plantean los antecedentes, justificación y la descripción del problema abordado. Se presenta el objetivo de la tesis y el de la secuencia didáctica, así como sus alcances y limitaciones.

1. 1 Antecedentes

De acuerdo con Stewart (2003): "Cambios de todo tipo influyen en nuestras vidas" (p. 193). Es por ello que surge la importancia y necesidad de entender, describir, predecir y controlar nuestro entorno. Así mismo, el medio más eficaz para llevar a cabo esta tarea son las matemáticas. Abrate y Pochulu (2006) mencionan que "las funciones son herramientas para describir, explicar y predecir las relaciones entre cantidades que están cambiando" (p.18), por lo tanto ellas nos permiten modelar situaciones de la vida real.

Las funciones exponenciales y logarítmicas son trascendentes, ya que no se pueden definir sólo en términos de una cantidad finita de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias racionales de una variable (Swokowski, 2009, p.319). Este tipo de funciones tienen gran importancia en matemáticas y se aplican en casi todos los campos de trabajo del hombre. Resultan especialmente útiles en química, biología, física e ingeniería, donde ayudan a describir cómo crecen o decrecen magnitudes en la naturaleza.

Si bien el concepto de función se incluye en el currículo y se busca que los alumnos lo aprendan desde muy temprana edad, no es un concepto sencillo de entender. Algunas de las razones se deben a que desarrollar niveles progresivos de entendimiento requiere relacionar distintas representaciones y otros conceptos, tales como dominio, rango, variable, tasa de cambio, dependencia, crecimiento, continuidad, además de ser capaz de utilizar todas esas ideas para generar modelos que posibiliten interpretar, describir, explicar y predecir el comportamiento de fenómenos naturales o sociales (Abrate y Pochulu, 2006). La pregunta que surge entonces es ¿Qué tipo de situaciones o propuestas se deben construir para que los estudiantes desarrollen esos niveles progresivos de entendimiento? ¿Cómo apoyar el desarrollo de habilidades para que los estudiantes generen modelos sustentados en conceptos importantes que se relacionan con el concepto de función? ¿Cuáles son esos conceptos importantes?

Las exigencias del mundo actual, requieren que los estudiantes desarrollen flexibilidad para razonar sobre fenómenos de su entorno, analizarlos cualitativa y cuantitativamente y modelar su comportamiento. Aprender a emplear algoritmos sin comprender los conceptos matemáticos subyacentes constituye un problema persistente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Psicólogos y educadores han discutido durante años la necesidad de cambiar las formas tradicionales de enseñanza enfocadas en la memorización de reglas y procedimientos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Existen algunas propuestas diferentes a las tradicionales para abordar el aprendizaje de la función y función exponencial mediante situaciones-problema. Un ejemplo de la aproximación anterior, para el tema de funciones exponenciales y logarítmicas se puede revisar en Guzmán (2005). La propuesta fue diseñada para el nivel medio superior y se encuentra detallada cada una de las actividades sugeridas. Sin embargo, en esa misma referencia no se explica cómo fue elaborada la propuesta y cuáles han sido los resultados al implementarla.

Otro ejemplo es el proyecto Who Wants to be a Millionaire?, diseñado para que los estudiantes aprendan el concepto de función exponencial al resolver una situación real (The University of Texas of Austin, 2014). El proyecto se estructuró a partir de tres situaciones financieras diferentes, las cuales mediante la construcción de modelos pueden apoyar la elaboración de conclusiones acerca de la eficacia de cada plan que se propone. La actividad final se incluye para generar que los estudiantes apliquen lo aprendido con el fin de crear su propio plan de convertirse en millonarios cuando se jubilen. La descripción de este proyecto incluye una descripción detallada en cuanto a mapas conceptuales, hojas de trabajo para los estudiantes y calendarios de implementación de la actividad. Lo único que faltaría agregar son los resultados obtenidos.

Autores como Ärlebäck y Doerr (2013) han realizado modelos teóricos para examinar el razonamiento de los estudiantes al abordar tareas acerca de las funciones exponenciales. En estos trabajos definen a la función exponencial como una función con tasa de cambio promedio constante, y proponen que el aprendizaje de la función exponencial se fomente a través de la generación de modelos para describir situaciones cercanas a contextos reales.

En esta tesis se consideró importante revisar estas diferentes propuestas mencionadas por ser distintas a las tradicionales, cuya revisión determinó la necesidad de replantearse lo que significa aprender el concepto de función exponencial.

1.2. Justificación

En el sistema educativo mexicano el concepto de función se introduce desde la educación preescolar. De acuerdo con el programa de estudios 2011 los Estándares Curriculares de Matemáticas se organizan en dos aspectos: Número, y Forma, espacio y medida (SEP, 2015). En estos estándares se espera lo siguiente: (1) que los alumnos desarrollen conocimientos y habilidades matemáticas en torno a representación de información numérica, patrones y relaciones numéricas; (2) la expectativa es que los estudiantes a partir de diferentes criterios y comparación del tamaño de ciertos conjuntos reúnan información de situaciones familiares y la representen por medio de objetos, dibujos, números o cuadros sencillos y tablas; (3) se espera que los alumnos agrupen objetos según sus atributos cualitativos y cuantitativos (por ejemplo, forma, color, textura, utilidad, cantidad y tamaño); (4) recopilen datos del ambiente y los expresen en una tabla de frecuencias. Todos estos conocimientos y habilidades están relacionados con el concepto de función.

El tema de funciones, se aborda en el bloque VII de Matemáticas IV, en el nivel medio superior. Con respecto al concepto de función exponencial se espera, que el alumno sea capaz de determinar si la función es creciente o decreciente a partir de su expresión algebraica; obtenga valores de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando tablas o calculadora; pueda trazar las gráficas de estas funciones tabulando valores; utilice las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, así como logre aplicar las propiedades y relaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas (Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato, 2014).

En la Universidad de Quintana Roo, el tema de funciones exponenciales se incluye en la unidad de Funciones del programa del curso Matemáticas Básicas. Es una asignatura general, cuyo objetivo es que el alumno resuelva y modele situaciones asociadas con la vida real, donde describa y represente gráfica y simbólicamente el comportamiento de fenómenos a través de la construcción de modelos que impliquen el uso de la función exponencial. El programa de la asignatura se organiza en cuatro unidades. En la primera unidad se abordan los temas de transformaciones de expresiones algebraicas, ecuaciones con una incógnita, sistemas de ecuaciones y desigualdades. En la segunda unidad se incluyen los temas de variación, proporción, progresiones aritméticas, geométricas y armónicas. En la tercera unidad se propone el estudio de las funciones, el objetivo particular de esa unidad está enfocado a que los estudiantes puedan describir y representar el comportamiento de fenómenos a partir de las funciones; se incluyen las funciones elementales dentro de las cuales se encuentran las funciones exponenciales. En la cuarta unidad se abordan contenidos de probabilidad y estadística, teoría de conjuntos y técnicas de conteo (DCI, 2007).

A pesar de que el concepto de función es incorporado en los programas desde los niveles básicos y las expectativas de aprendizaje son ambiciosas, se observa que aún persisten dificultades de comprensión del concepto en los estudiantes del nivel superior. Entre las dificultades identificadas en los alumnos de los primeros semestres de licenciatura de la Universidad de Quintana Roo se encuentran las siguientes: desconocimiento de cómo recopilar datos y organizarlos, conflictos relacionados con el uso del lenguaje en la descripción de los fenómenos cambiantes para expresarlo mediante un lenguaje matemático más formal, falta de habilidad para encontrar la relación entre las diversas representaciones (por ejemplo, gráficos, tablas y ecuaciones) y la transferencia de éstas en otro contexto, obstáculos para analizar tasas de cambio (positivas y negativas).

Estas dificultades no son particulares de los estudiantes mexicanos pues se han documentado en investigaciones como las de Ärlebäck y Doerr (2013), las cuales mencionan, además, que el aprendizaje del concepto de función exponencial es aún más complejo ya que éste se caracteriza por una tasa de cambio no constante. Para abordar estas dificultades, estas investigadoras proponen el uso de la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003), en la cual el aprendizaje de las matemáticas se puede interpretar como el desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que permitan a los estudiantes describir, explicar, manipular y predecir el comportamiento de situaciones; dichos modelos se van refinando en la medida que los estudiantes adquieren experiencia con distintas situaciones y la comunican a sus compañeros y maestros.

De lo anterior se deriva el problema ¿Cómo una secuencia diseñada para la modelación de situaciones cercanas a la vida real puede propiciar, en estudiantes de nivel superior, el desarrollo de conocimiento alrededor de la función exponencial y conceptos relacionados? El trabajo que se presenta en esta tesis se derivó del interés por dar respuesta a esta pregunta.

La hipótesis que sirvió para la elaboración de la secuencia fue que los estudiantes pueden desarrollar conocimiento sobre el concepto de la función exponencial si analizan no sólo su definición, sino también la relación que tiene ésta con otros conceptos matemáticos (dominio, rango, variable, tasa de cambio, dependencia, crecimiento, continuidad), y desarrollan habilidades al utilizarla para resolver problemas. Es decir, si los estudiantes tienen la oportunidad de construir, modificar y refinar sus modelos o formas de pensar en torno al concepto de función exponencial como una herramienta para describir, explicar y predecir situaciones.

1.3. Objetivos

Objetivo general de la tesis

El objetivo general de la tesis es documentar el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica que promueva en estudiantes de los primeros semestres de nivel superior el desarrollo de conocimiento y comprensión alrededor del concepto de función exponencial, mediante la modelación de situaciones que impliquen que el estudiante haga uso de conceptos asociados, como variación y tasa de cambio.

Objetivos de la secuencia didáctica

Se desea que al término de la implementación de la secuencia didáctica se logren los siguientes objetivos de aprendizaje asociados a la resolución de problemas, simulación y modelación de situaciones.

- Que el alumno logre describir, interpretar, explicar y predecir situaciones donde intervienen los conceptos de variación y tasa de cambio no constante. En particular, que estén relacionadas con la función exponencial.
- Que el alumno generalice a partir de la identificación de patrones y establezca la función exponencial en su forma algebraica.
- Que el alumno desarrolle conocimiento para el cálculo de raíces o puntos particulares en las funciones exponenciales a través del empleo de ecuaciones exponenciales y el modelo de su gráfica al variar parámetros.

Al final de la implementación de la secuencia didáctica se espera que los estudiantes puedan resolver situaciones como la siguiente (Figura 1.1).

Planes de inversión

José quiere comprar una consola de videojuegos que tiene un costo de \$6400, el cual una vez adquirido su valor se deprecia 30% anualmente. Él recibió \$2000 de sus utilidades, como es un dinero extra desea ingresarlo en una cuenta de inversión en un banco para ahorrar y poder adquirir la consola de juegos. Existen dos opciones, la inversión tipo A con la cual gana un interés del 24% sobre el monto total generado anualmente, y la inversión tipo B con la cual gana una tasa de interés 2% sobre el monto total generado mensualmente.

Ayuda a José a elegir la inversión con la que pueda adquirir en menos años el X-BOX, y a explicarle que sucederá con el valor del equipo una vez adquirido, para ello deberás escribir una carta donde les expliques el procedimiento con el que obtuviste la información para tomar la decisión y presentarle una gráfica con la que muestres que sucederá con su dinero desde el momento de invertirlo hasta tiempo después de adquirida la consola de videojuegos.

José quizá visite otros bancos, así que el procedimiento que le presentes le deberá servir si le presentan otros planes de inversión en otros bancos, y se lo deberás explicar de tal forma que pueda repetir tus procedimientos para obtener la información necesaria.

Figura 1.1 Actividad Planes de inversión

Es decir, actividades donde el estudiante al resolverla: describa datos organizados en forma tabular, cuyo comportamiento es exponencial; observe que la tasa de cambio no es constante; calcule la tasa de cambio; relacionar la información tabular con la representación gráfica; describa la información gráfica e interpretarla en términos de la representación tabular así como poder establecer la representación algebraica relacionada ($f(x) = k(1+c)^x$).

1.4 Alcances y limitaciones del proyecto de tesis

La secuencia didáctica diseñada en este trabajo de tesis es susceptible de implementarse con estudiantes de nivel medio superior y primeros semestres de nivel superior. En ésta sólo se aborda uno de los temas del currículo matemático que comparten estos niveles educativos: funciones exponenciales. Al término de la implementación de la secuencia didáctica los estudiantes deberán haber desarrollado conocimientos relacionados con el concepto de función exponencial y habilidades que les permitan reconocer que la función exponencial puede ser utilizada para crear modelos que permitan describir e interpretar situaciones con ciertas características.

El desarrollo de la secuencia didáctica se organiza en actividades en las que los alumnos construyen sistemas de representación y los relacionan de forma integrada al concepto de función exponencial; a través del trabajo en equipo y discusiones grupales en las que los significados y uso de los símbolos son resultado de su participación activa en la comunidad de aprendizaje (Schoenfeld, 1992).

De acuerdo con el NCTM (2003) el uso de herramientas tecnológicas podría apoyar una mejor comprensión del desarrollo de los conocimientos matemáticos (Capítulo 2 de esta tesis), por lo que en el diseño de la secuencia se incluyó el uso de herramientas tecnológicas. En particular, se propone para su uso posterior a que el estudiante realice un análisis a lápiz y papel, ya que será apoyo para llegar a la generalización a través de casos particulares. El software matemático que se requiere es NetLogo, para el análisis de información en gráficas, y para orientar la resolución de la actividad a la comparación de familias de problemas. De esta forma, la secuencia didáctica planteada requiere implementarse en lugares donde se cuente con equipos de cómputo, lo cual podría ser una limitante para extender su uso en otros contextos educativos que no cuenten con esta tecnología.

Por otro lado, se destina parte de la secuencia didáctica al tema de logaritmos como función inversa de la función exponencial aunque no con profundidad, en el sentido de propiciar aprendizaje alrededor de este concepto, sus propiedades y manejo algebraico.

Otra limitante es que el tiempo determinado para el desarrollo de las actividades, es mayor al que se plantea en los currículos revisados, debido a que los objetivos propuestos son más ambiciosos que aquellos planteados en el plan de estudios oficial.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo se presenta la revisión de literatura que sirvió como sustento para este trabajo de tesis. Se inicia con el análisis didáctico, se continúa con la revisión del tema de acuerdo con un libro de texto de matemáticas oficial, finalmente, se describe la perspectiva de Modelos y Modelación.

2.1 Análisis didáctico como planeación didáctica

La NCTM (2000), señala con respecto a la elaboración del currículo, que este debe ser algo más que una colección de actividades, tiene que ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles.

Simon y Tzur (2004) por su parte mencionan que para propiciar el desarrollo de conocimiento en los estudiantes se deben considerar varios aspectos, los cuales resume en el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA). Las THA consisten en análisis de los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon y Tzur, 2004).

Gómez (2007) sugiere a los profesores de matemáticas, en su formación inicial, desarrollar el análisis didáctico, una adaptación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. Es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Este procedimiento sugiere que el profesor pueda organizar la enseñanza basándose en el análisis de cuatro aspectos importantes: *el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación*. El análisis didáctico se describe en los siguientes párrafos tomando la referencia de Gómez (2007).

El análisis didáctico requiere de conocimientos técnicos que permitan analizar el contenido matemático con el propósito de identificar, desarrollar y organizar sus diversos procedimientos. El conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego y construye cuando realiza el análisis didáctico. Éste respalda el proceso de planificación, ejecución y evaluación, a través de conocimientos disciplinares de referencia.

Gómez (2002), organiza estos conocimientos de referencia en tres ejes:

- La noción de currículo,
- Los fundamentos de las matemáticas escolares,
- Los organizadores del currículo (p. 285).

Rico (1997b) relaciona los dos primeros ejes de los conocimientos disciplinares en términos de cuatro preguntas:

- ¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?
- ¿Qué es el aprendizaje?
- ¿Qué es la enseñanza?
- ¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil? (p. 381)

El término organizadores del currículo se refiere a nociones de la didáctica de la matemática; se basa en “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (Gómez, 2002, p. 287).

En el *análisis de contenido*, se identifican, organizan y seleccionan los significados relevantes de un concepto matemático considerados para la instrucción. Dentro este análisis se tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico). La construcción de la estructura conceptual es mediante un proceso que inicia con la identificación de los conceptos y la relación entre ellos; se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados.

En el *análisis cognitivo* se describen la hipótesis acerca de cómo pueden progresar los estudiantes en la construcción de su conocimiento al enfrentarse a las tareas que se incluirán como actividades de enseñanza y aprendizaje. Este análisis se encuentra respaldado por una descripción de aquellos aspectos del conocimiento que se relacionan con el concepto matemático que se tiene por objetivo desarrollar en los estudiantes al implementar la secuencia didáctica. El *análisis cognitivo* implica abordar los problemas propuestos con el objetivo de revisar los caminos que los estudiantes podrían recorrer en el desarrollo de las diferentes capacidades básicas con respecto al concepto matemático objeto de instrucción.

La descripción del progreso de los escolares debe fundamentarse en la identificación, descripción y relación de cinco elementos:

1. Las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción.
2. Las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción.
3. Las tareas que conforman la instrucción.
4. Las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas.
5. Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

El término capacidad, se relaciona con los conocimientos, experiencias y habilidades necesarias para desarrollar una tarea o actividad (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 85).

Se puede señalar que el estudiante ha desarrollado cierta capacidad cuando puede resolver tareas que se le solicitan. Las capacidades se caracterizan por:

- Ser específicas a un tema concreto.
- Poder incluir o involucrar otras capacidades.
- Estar vinculadas a tipos de tareas.

En el *análisis de instrucción* se deben identificar y describir las actividades a utilizar en la secuencia didáctica, las cuales han de tener como propósito lograr los objetivos descritos al comienzo del ciclo del análisis didáctico. Además, conviene considerar los procesos de modelación y de resolución de problemas, así como los materiales y recursos disponibles a emplear.

El problema de la planificación en esta fase del análisis didáctico no es necesariamente el de crear nuevas tareas, sino el de seleccionar justificadamente un grupo de tareas que sean coherentes con los contenidos y objetivos propuestos al inicio del ciclo y con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo.

El *análisis de actuación* se enfoca en la descripción de la comprensión y la forma cómo abordaron las tareas los estudiantes, para determinar las capacidades desarrolladas y dificultades presentadas en la implementación. Esta descripción sigue esquemas similares a los utilizados en el análisis cognitivo, de acuerdo con Gómez (2012). El profesor debe reconocer:

- Conceptos y estructuras conceptuales puestas en juego.
- Representaciones empleadas de esos conceptos.
- Correspondencia que establecieron entre los conceptos.
- Vínculos determinados entre las representaciones de los conceptos.
- Modelos empleados.

El análisis didáctico que incluye *el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación* se resume en el siguiente diagrama.

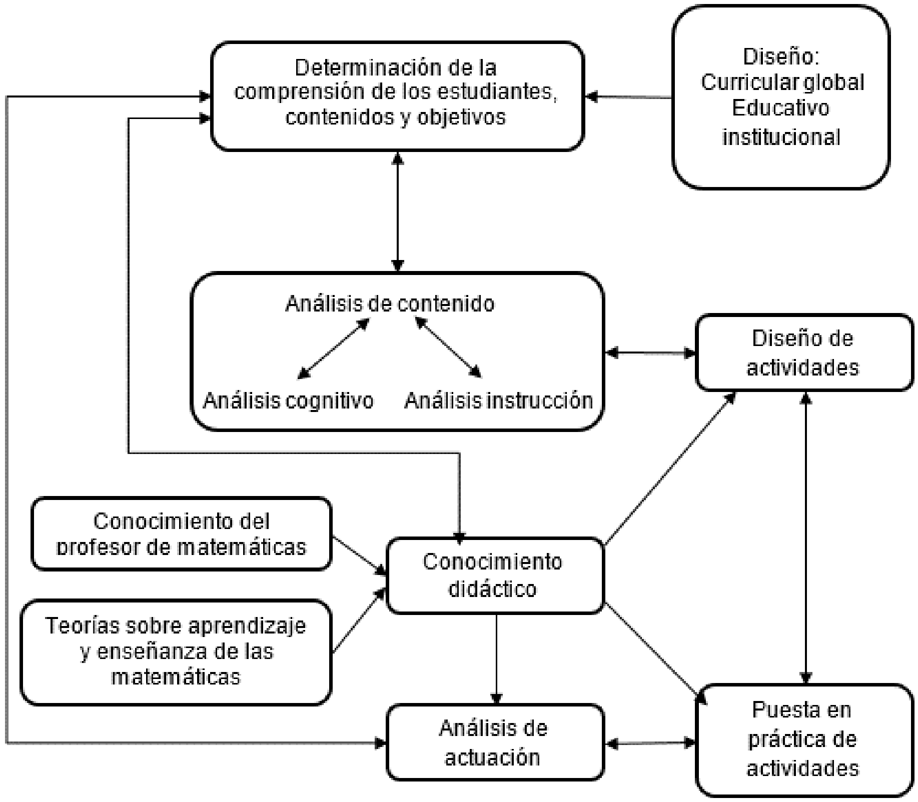


Figura 2. 1 Análisis didáctico (Gómez, 2012)

El análisis didáctico (Gómez, 2012) sirvió en esta tesis como una guía metodológica general de cómo diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Los objetivos de aprendizaje se establecieron al realizar el análisis de contenido del concepto de función exponencial revisando diversos textos de matemáticas, los conocimientos y experiencias del docente. La perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) determinó el significado de aprender matemáticas y por lo tanto influyó en el diseño de las actividades. En los siguientes apartados se desarrollan estos temas.

2.2 Definición de función y función exponencial

Existen diferentes situaciones en las que se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, el rendimiento del combustible de un auto depende de los kilómetros recorridos, los ingredientes necesarios para elaborar una comida de la cantidad de las personas para las que se vaya a preparar. La necesidad de describir la correspondencia en situaciones como estas dio origen al concepto de función y función exponencial, los cuales se describirán en este apartado 2.2 de acuerdo con el libro de texto de Stewart, Jamesredlin, y Lothar (2007).

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.

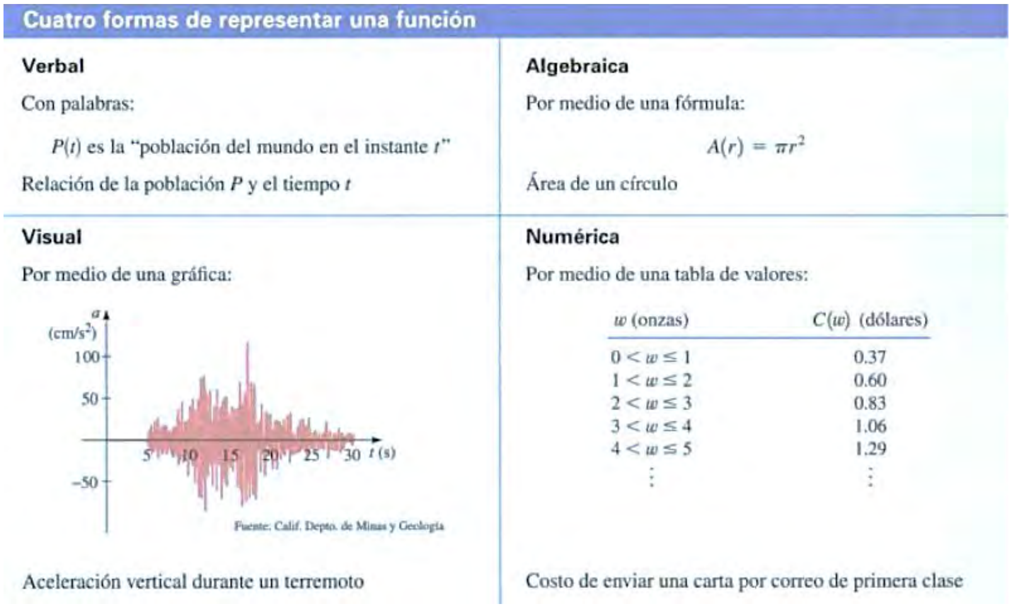
El símbolo $f(x)$ se lee " f " de " x " o " f " en " x " y y se le llama valor de f en x, o la imagen de x bajo f. El conjunto A se llama dominio de la función. El rango de f es el conjuntos de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través del dominio, es decir el rango de $f = \{f(x) | x \in A\}$.

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Así se escribe $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Una función con dominio A se llama función uno a uno si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen. Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas.

Una función f uno a uno con dominio A y rango B, tiene su función inversa f^{-1} con dominio B y rango A y está definida por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ para cualquier y en B.

Una función se puede representar de diferentes maneras (Figura 2.1).



Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la "población del mundo en el instante t"

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:

Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
⋮	⋮

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

Figura 2. 2 Representaciones de una función.

Las funciones se emplean con frecuencia para modelar cantidades cambiantes y la gráfica de una función f da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (Figura 2,2). En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$.

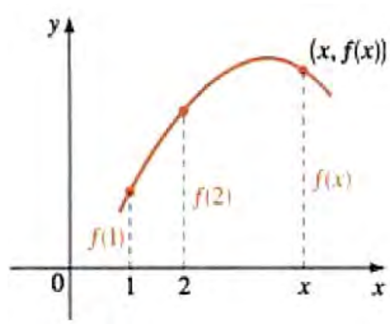


Figura 2. 3 La altura de la gráfica arriba del punto x es el valor de f(x)

Se dice que la función f es creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I y es decreciente en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I (Figura 2.3).

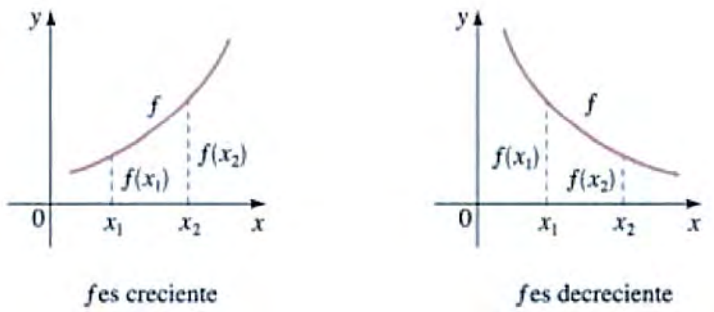


Figura 2. 4 Función creciente y decreciente

La tasa de cambio promedio de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$tasa\ de\ cambio\ promedio = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

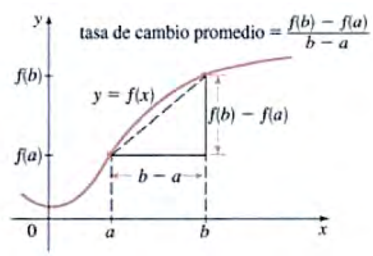


Figura 2. 5 Tasa de cambio promedio de la función

Si una función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es positiva, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es negativa.

Ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica, por ejemplo: desplazamiento, reflexión y estiramiento.

Desplazamiento vertical. Supongase que $c > 0$. Para que la grafica de $y = f(x)$ se desplace hacia arriba c unidades se debe sumar esta cantidad a la función: $y = f(x) + c$. Si se desea que la grafica de $y = f(x)$ se desplace hacia abajo c unidades entonces se debe restar esta cantidad a la función: $y = f(x) - c$.

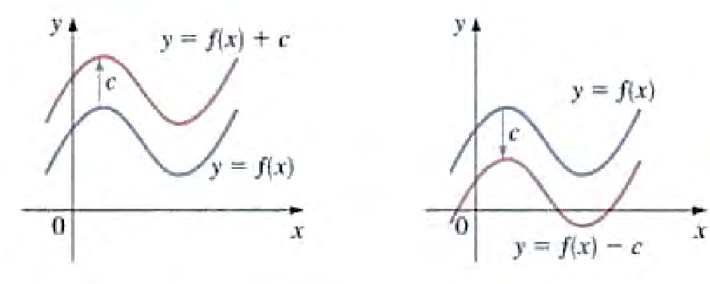


Figura 2. 6 Desplazamiento vertical de la gráfica de una función

Desplazamiento horizontal. Supongase que $c > 0$. Para que la grafica de $y = f(x)$ se desplace a la derecha c unidades entonces el argumento de la función se debe modificar como sigue: $y = f(x - c)$. Si se desea que la grafica de $y = f(x)$ se desplace a la izquierda c unidades entonces el argumento de la función se debe modificar como sigue: $y = f(x + c)$.

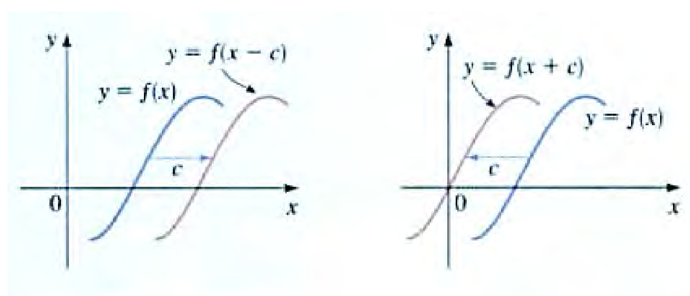


Figura 2. 7 Desplazamiento vertical de la gráfica de una función

Reflexión. $y = -f(x)$ refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. $y = f(-x)$ refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.

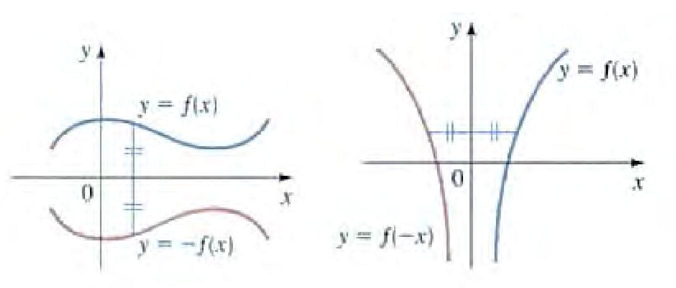


Figura 2. 8 Reflexión de la gráfica de una función

Estiramiento y acortamiento vertical. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = c \cdot f(x)$ representa un estiramiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$. Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de $y = c \cdot f(x)$ representa un acortamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$.

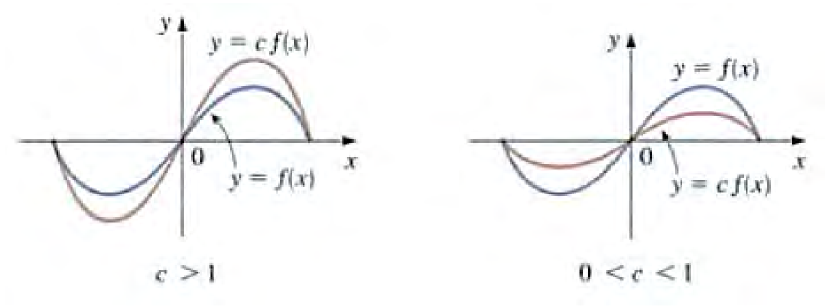


Figura 2. 9 Estiramiento y acortamiento vertical de la gráfica de una función

Estiramiento y acortamiento horizontal. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = f(c \cdot x)$ representa un acortamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$. Si $0 < c < 1$, entonces $y = f(c \cdot x)$ representa un estiramiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$.

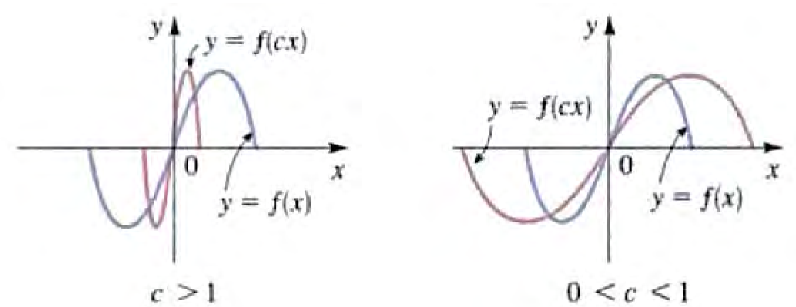


Figura 2. 10 Estiramiento y acortamiento horizontal

Las funciones pueden ser clasificadas de acuerdo a su forma (Lehman C. h., 2003). Por ejemplo es algebraica si la variable independiente x está sometida a un número finito de una o varias de las seis operaciones del álgebra. Todas las funciones que no son algebraicas reciben el nombre de funciones trascendentes. Ejemplo de éstas son las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Se llama función exponencial de base a aquella cuya forma estándar es $f\ (x)\ =\ a^x$, donde a es una base constante definida por un número real positivo diferente de 1 y x es una potencia variable restringida a números racionales.

Al graficar la función exponencial $f\ (x)\ =\ a^x$ se observa que pasa por el punto $(0,1)$ porque $a^0=1$ para $a \neq 0$. La función exponencial decrece si $0 < a < 1$ y crece si $a > 1$.

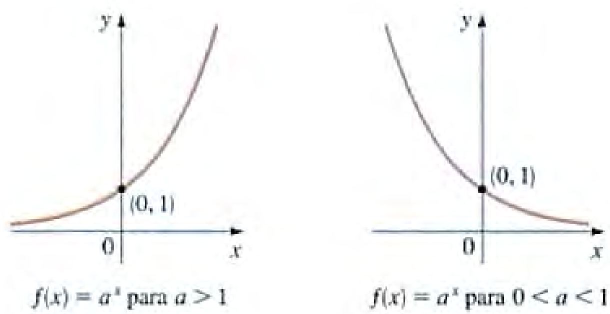


Figura 2. 11 Gráfica de la función exponencial

Otra característica de su gráfica es que el eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f\ (x)\ =\ a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, se tiene se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Las funciones exponenciales se pueden trazar tomando su forma básica y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión mencionadas para las funciones en general.

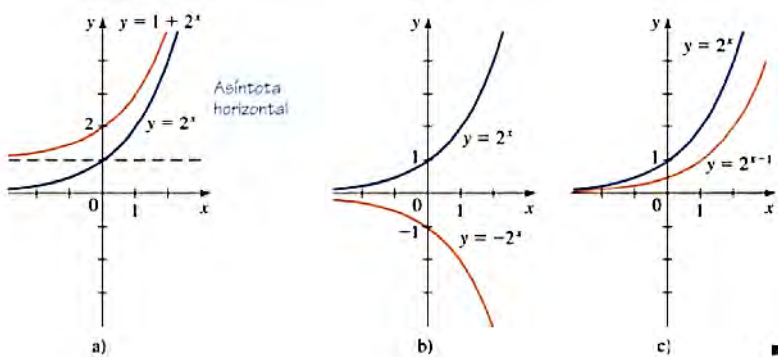


Figura 2. 12 Tranformaciones de la función exponencial

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa f^{-1} llamada función logarítmica con base a y se denota por $\log_a$, se define

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para dar x.

Existen fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelados específicamente por la función exponencial, por ejemplo el incremento del interés compuesto, el crecimiento poblacional, la propagación de enfermedades, etc.

La descripción anterior del tema función y función exponencial es comúnmente encontrada en algunos libros de texto. El concepto de función exponencial es presentado con cierto orden lineal y, posteriormente, se incluyen ejercicios para practicar lo aprendido.

El uso de distintas representaciones como parte del concepto de función exponencial no siempre es tratado en los libros, ni en el aula cuando predomina el uso de pizarrón; generalmente, se enfatiza el uso de la representación algebraica. Tampoco se aprovecha para profundizar en las propiedades y definición del concepto de función.

Al abordar el concepto de función exponencial en el aula se podrían hacer consideraciones como las de la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) en el sentido de posibiltar el desarrollo de sistemas conceptuales. Es decir, debería ser posible profundizar en el concepto de función como un sistema conceptual compuesto por varios elementos (variación, variable dependiente, variable independiente, ecuación, tasa de cambio, dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, ceros de la función, función inversa, representaciones), sus relaciones y operaciones; así como propiciar el tránsito entre las diferentes representaciones. En la sección 2.3.1 se describe la perspectiva de Modelos y Modelación.

2.3 La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Los alumnos aprenden más y mejor cuando pueden controlar su aprendizaje definiendo sus objetivos, reflexionando sobre las ideas propias y aprendiendo de los errores (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). La comprensión de los conceptos es fundamental para el uso de lo aprendido en la resolución de nuevos tipos de problemas que, inevitablemente, los alumnos tendrán que abordar en el futuro.

Los estudiantes aprenden a través de las experiencias que les proporcionan sus profesores. No basta con que las tareas sean útiles para introducir conceptos matemáticos y reten intelectualmente a los alumnos. Los profesores deben decidir respecto a cómo estructurar el ambiente de clases, qué aspectos de la tarea deben enfatizar, qué preguntas hacer para involucrar a los alumnos y ayudarles sin sustituir su proceso de pensamiento (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Al planificar las lecciones, el profesor deberá esforzarse en organizar los contenidos para que las ideas fundamentales formen un todo integrado (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

2.3.1 El aprendizaje de las matemáticas en la perspectiva de Modelos y Modelación

En la perspectiva de Modelos y Modelación aprender matemáticas puede verse como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales (o modelos) que cambian de manera continua durante la interacción entre un individuo y un problema. Un modelo es un sistema o un conjunto de elementos, relaciones entre elementos, operaciones que describen cómo interactúan esos elementos y patrones o reglas que aplican a las relaciones y operaciones anteriores (Lesh y Doerr, 2003). Los modelos son herramientas conceptuales compartibles, manipulables, modificables, y reutilizables para describir, interpretar, construir, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos.

El proceso de aprendizaje de las matemáticas involucra la construcción de ciclos progresivos de entendimiento, modificación, extensión y refinamiento de maneras de pensar. En estos ciclos los sujetos relacionan, con diversos niveles de profundidad, los datos, metas y posibles rutas de solución al enfrentar una situación problemática (Lesh y Doerr, 2003). Las primeras interpretaciones o modelos generalmente son burdos, pero se van refinando paulatinamente. El conocimiento, no es algo inerte, es parecido a un organismo vivo, a un sistema dinámico, el cual está adaptándose y autorregulándose continuamente.

El proceso de desarrollo del conocimiento es un proceso social, en el cual se construyen y modifican modelos mediante las fases de diferenciación, de integración, de refinamiento de los diferentes sistemas que se van construyendo (Lesh y Doerr, 2003). El producto del aprendizaje no es el modelo sino el proceso de creación del modelo. Los modelos residen en la mente y en los medios representacionales: “los significados asociados con un sistema conceptual dado tienden a estar distribuidos a través de una variedad de medios representacionales” (Lesh y Doerr, 2003, p. 12). Los modelos de un individuo son personales y posiblemente únicos, estos reflejan la experiencia del individuo en situaciones relevantes. Así, el aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos, esto es, con sistemas conceptuales que emergen al enfrentar situaciones problemáticas. En este contexto, la comprensión conceptual se incrementa en la medida que el individuo comunica y comparte sus ideas (modelos) con otras personas y considera a los conceptos en diversas dimensiones.

Pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, “con frecuencia implica describir situaciones matemáticamente” (Lesh y Doerr, 2003, p. 15), analizar información cualitativa, cuantificar información en caso de ser necesario, atribuir dimensiones al espacio y ubicar eventos en marcos de referencia (Lesh y Doerr, 2003)

Se argumenta que los estudiantes necesitan múltiples oportunidades para explorar construcciones matemáticas pertinentes y aplicar sus modelos en nuevos contextos (Ärlebäck y Doerr, 2013). Los estudiantes requieren participar en múltiples ciclos de descripciones, interpretaciones, conjeturas y explicaciones que se refinen iterativamente (Lesh *et al*., 2003). Las exploraciones sobre una situación pueden conducir, por ejemplo, a la elaboración de diagramas, tablas y gráficos interactivos.

Doerr y Trip (1999) argumentan que el razonamiento basado en modelos puede ser bidireccional. Comunmente se concibe que el razonamiento de los estudiantes ante una situación conocida tiene influencia en el análisis sobre otras situaciones desconocidas. El razonamiento bidireccional se refiere entonces a que las situaciones desconocidas también pueden influir en los modelos que los estudiantes han construido y creen tener bien comprendidos, generando desfases, modificaciones y reorganizaciones; lo cual da lugar a nuevos sistemas conceptuales.

2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de Modelos y Modelación

Gran parte del trabajo realizado dentro de la perspectiva de Modelos y Modelación se basa en las model eliciting activities (MEA's) o bien actividades provocadoras de modelos desarrolladas por Lesh y sus colegas (2000). En las cuales los estudiantes son confrontados a la necesidad de desarrollar un modelo que pueda ser usado para describir, explicar o predecir el comportamiento de situaciones significativas.

Las actividades provocadoras de modelos son diseñadas para desarrollar conocimiento y ayudar a proporcionar detalles acerca de las formas de pensar de los estudiantes en las áreas temáticas que son más importantes. Su objetivo es permitir a los profesores observar el pensamiento de sus estudiantes e identificar sus fortalezas y debilidades conceptuales y, al mismo tiempo, ayudar a los estudiantes a fortalecerlo o desarrollarlo (Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski, 2002).

Las actividades provocadoras de modelos posibilitan el desarrollo de ideas significativas sin la guía directa de Libros de Texto o Maestro, debido a que son situaciones matemáticamente ricas pero realistas y significativas en las que los estudiantes reconocen la necesidad expresar, probar y revisar sus propias formas iniciales de pensamiento, las cuales convierten en construcciones poderosas y sistemas conceptuales (Lesh y Yoon, 2004).

Para crear problemas que simulen situaciones de la vida real, docentes expertos han propuesto los siguientes seis principios de diseño instruccional (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000, p.43):

1. Principio de la Realidad. Para asegurar este principio al desarrollar una actividad reveladora de pensamiento, el diseñador se puede preguntar: ¿Podría esto suceder en la vida real? Por vida real se entiende la realidad de los estudiantes (adolescentes), que en ciertos momentos puede ser diferente a la realidad de los adultos.
2. Principio de la Construcción de un Modelo. El diseñador debe preguntarse: ¿La actividad pone a los estudiantes en una situación en la que pueden reconocer la necesidad de desarrollar un modelo para interpretar las hipótesis, resultados y posibles procesos de resolución en una situación compleja de la vida cotidiana?
3. Principio de la Auto-evaluación. El problema debe propiciar que los estudiantes generen criterios, los cuales permitan evaluar la calidad de su respuesta y por lo tanto se evite la necesidad de preguntar constantemente al profesor: ¿ya terminé? O, ¿así está bien?, etc.
4. Principio de la Documentación de Constructos. La actividad debe propiciar que los estudiantes revelen lo que están pensando acerca de la situación, sus hipótesis y posibles soluciones que han considerado.
5. Principio del Prototipo. Para asegurar este principio dentro de la actividad, es necesario preguntar, ¿la solución al problema representa un prototipo o metáfora para interpretar otras situaciones? Es decir, ¿los alumnos lograrán recordar la respuesta a este problema cuando se encuentren con situaciones que requieran las estructuras cognitivas matemáticas similares?
6. Principio de la Reutilización. ¿El modelo que desarrollarán los estudiantes al resolver la actividad será útil sólo para la persona que lo desarrolló y aplicable sólo a la situación muy particular presentada en el problema? O, ¿La respuesta muestra un modelo que se puede compartir con otras personas o aplicar a otras situaciones, además de que se puede modificar fácilmente para reutilizarse en otras circunstancias?

La resolución aislada de las actividades provocadoras de modelos rara vez es suficiente para producir desarrollo de conocimiento alrededor del concepto que se tiene por objetivo enseñar. Se necesitan secuencias de actividades relacionadas estructuralmente, donde las discusiones y exploraciones de los estudiantes los lleven a investigar las similitudes y diferencias entre ellas. Esto proporciona herramientas para centrar la atención de los estudiantes en el sistema conceptual que es común a todas las actividades. Por lo tanto, las secuencias de desarrollo de modelos implican el siguiente esquema organizacional estándar (Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski, 2002).

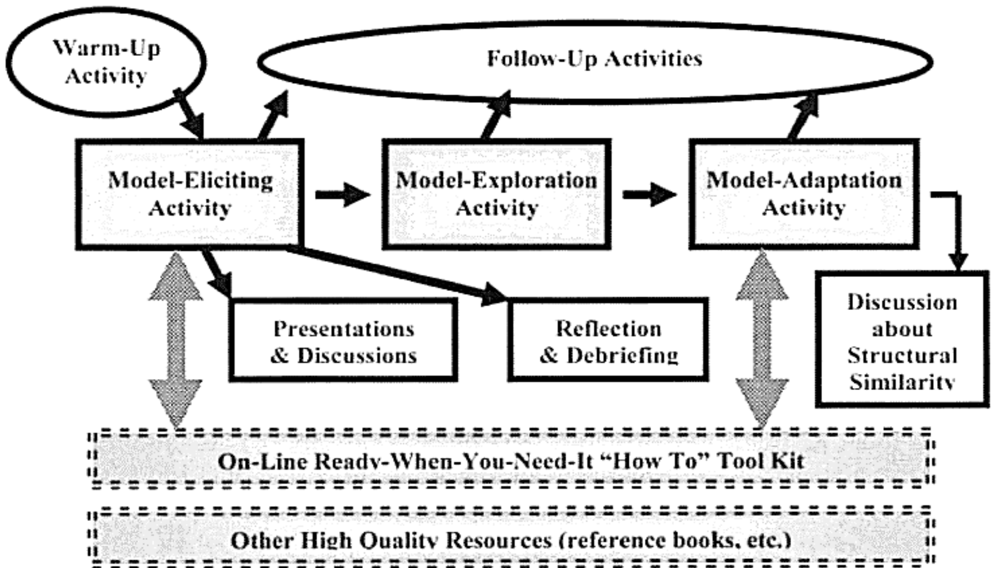


Figura 2. 13 Esquema de organización estándar para las secuencias de desarrollo del modelo.

Actividades de calentamiento. A menudo, se basan en un artículo de periódico o en un sitio web rico en matemáticas, que es seguido por algunas preguntas destinadas a ayudar a los estudiantes a que se familiaricen con el contexto del modelo de inducción de la actividad, para que las soluciones se basen en las extensiones de los conocimientos de los estudiantes y experiencias de la vida real.

Actividades provocadoras de modelos (MEA). Requieren por lo menos uno o dos períodos de clase completas para llevarse a cabo, y a los estudiantes se les organiza generalmente para trabajar en equipo de tres alumnos. A menudo, los profesores las utilizan al comienzo de una unidad, cuyo contenido se relaciona con la misma gran idea que subyace a la construcción principal de la Actividad provocadora de modelos. Dado que las MEA's requieren que los estudiantes expresen sus formas de pensar en formas que son visibles para los profesores, un objetivo al diseñarla es identificar los puntos fuertes y débiles de éstas para dar sugerencias en cuanto a la forma de la instrucción.

Actividades de exploración de modelos. Están destinadas a ayudar a los estudiantes a desarrollar potentes sistemas de lenguaje y de representación que son útiles para ir más allá de pensar con el constructo principal (o sistema conceptual). En particular, los estudiantes suelen desarrollar herramientas conceptuales que se pueden utilizar para solucionar familias de problemas que dan seguimiento de la actividad provocadora de modelos. Sin embargo, en lugar de depender exclusivamente de los materiales tradicionales a lápiz y papel, las actividades de exploración de modelos implican a menudo la infografía, diagramas o animaciones (Lesh, Doerr, y Behr, 1987a).

Actividades de adaptación de modelos. A veces han sido llamadas actividades de solicitud de modelos o actividades de extensión de modelos. Esto es debido a que el objetivo de la actividad a menudo se centra en el uso de la herramienta conceptual que se desarrolló en la actividad inductora de modelo (y refinado en la exploración del modelo) para hacer frente a un problema que probablemente habría sido demasiado difícil de manejar antes de que la herramienta conceptual fuera desarrollada.

Las presentaciones y los debates. Son actividades con toda la clase en las cuales los estudiantes hacen presentaciones formales sobre los resultados del trabajo producido durante cualquiera de las actividades provocadoras de modelos o actividades de adaptación de modelos. Los resultados, por lo general, consisten en cartas o resúmenes, en las cuales los estudiantes proporcionan herramientas conceptuales a un cliente (que se identifica en el planteamiento del problema) para que éste logre un propósito específico (que también se identifica en el planteamiento del problema). Los estudiantes también pueden expresar sus resultados mediante presentaciones multimedia breves. El objetivo de la presentación y discusión es que los estudiantes: practiquen la explicación y descripción de su trabajo, observen una variedad de formas de pensar, discutan las fortalezas y debilidades de los enfoques alternativos, e identifiquen direcciones para la mejora de su propio trabajo o el trabajo de otros.

Discusiones acerca de la semejanza estructural. Son las actividades dirigidas por el maestro que involucran a toda la clase y que se centran en las similitudes estructurales (y diferencias) de las construcciones y sistemas conceptuales destacados en el desarrollo del modelo. Un objetivo primordial de estas discusiones es proporcionar experiencias en las cuales los estudiantes vayan más allá de sus construcciones y sistemas conceptuales. Una forma de realizar estas actividades es que el docente plantee preguntas que desafíen a los estudiantes a identificar la relación entre las diferentes representaciones construidas y su utilidad para hacer predicciones.

Las actividades de seguimiento. A menudo consisten en conjuntos de problemas que generan los profesores para ayudar a los estudiantes a reconocer conexiones entre sus experiencias obtenidas durante las actividades provocadoras de modelos y las experiencias obtenidas en actividades de tipo más tradicional como las que se encuentran en los libros de texto y las pruebas.

El On-Line "How To" Toolkit es un archivo (Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski, 2002) desarrollado en la web con "demostraciones envasadas" boletines de problemas adicionales y ejemplos de problemas resueltos que dan una breve explicación de los hechos y las habilidades que se necesitan con mayor frecuencia en áreas temáticas designadas.

La perspectiva de Modelos y Modelación considera que para propiciar el aprendizaje matemático, se debe proponer a los estudiantes la resolución de situaciones cercanas a la vida real. Las situaciones pueden ser MEA’s, aunque algunos autores proponen otras actividades. Lo importante es que el estudiante sea quien determine la cantidad de variables que va a utilizar para generar un modelo que responda a las preguntas incluidas en la situación planteada. Con ello los estudiantes podrían reducir un problema abierto a uno cerrado, determinado por las variables que eligió considerar. Por lo tanto, esta perspectiva ve a la Resolución de Problemas como parte de Modelos y Modelación.

2.3.3 Papel que desempeñan los profesores para propiciar aprendizaje en el aula

La enseñanza matemática efectiva implica no sólo formar pequeños grupos y asignar buenos problemas para que resuelvan los estudiantes. El maestro desempeña un rol antes, durante, y después del diseño de las lecciones para enseñar matemáticas en un enfoque de Resolución de Problemas (Grows, 2003).

Antes de la lección. La implementación exitosa de este enfoque implica muchas decisiones y acciones de los maestros, deben elegir tareas adecuadas para generar interés y mantener la atención de los estudiantes, dirigir discusiones en las cuales las ideas matemáticas importantes que están implícitas en las tareas sean explicitadas y discutidas en el salón de clase (Grows, 2003). En la preparación de las sesiones de clase, el docente debe poner particular atención en la elaboración de preguntas que promuevan en los estudiantes la habilidad de realizar generalizaciones; que provean indicios para progresar en una tarea, sin dar la solución, y que estimulen a realizar un análisis de alto nivel. Otra de las decisiones que el maestro debe tomar en la planeación de una lección es respecto a cómo se organizará a los estudiantes para abordar las diferentes actividades, si será en grupo completo o en pequeños equipos.

Durante la lección. Aunque no se puede establecer una sola norma de cómo presentar una tarea, algunos puntos de referencia pueden proveer una útil base para apoyar el desarrollo de aprendizaje. Para tener progresos importantes en la resolución de problemas y aprendizaje de las matemáticas se requiere que los estudiantes lleguen a entender la tarea. Cuando surgen dificultades de comprensión y los estudiantes comienzan a perder interés en la tarea, los maestros pueden ofrecer ayuda. Entre las estrategias efectivas se encuentran reenfocar a los estudiantes sobre los objetivos planteados en la actividad en contraste con lo que han encontrado, o bien diseñar actividades que inicien con planteamientos relativamente fáciles de comprender y posteriormente ir aumentando el grado de dificultad.

El maestro deberá alentar el razonamiento de los estudiantes; realizar preguntas es una buena forma de hacerlo. Algunos lineamientos para realizar las preguntas son las siguientes:

- Fomentar pautas de adivinanzas, no solo adivinar (Polya 1945).
- Establecer como norma la inclusión de una justificación para cada respuesta.
- Siempre ser consciente de que el alumno es quien debe estar razonando sobre la tarea y no el maestro.

Algunas preguntas de seguimiento que pueden ser utilizadas para promover el pensamiento de los estudiantes son las siguientes:

- ¿Cómo decidiste cuál solución a probar?
- ¿Cómo resolviste el problema?
- ¿Lo resolverías de una forma diferente?
- ¿Cómo compararías estos métodos de solución?
- ¿Cuál solución te parece mejor? ¿Por qué?
- ¿Puedes explicarme cómo resolviste el problema sin decirme la respuesta?
- ¿Recuerdas este procedimiento de otro problema que tú hayas resuelto?
- ¿Cómo podrías cambiar el problema para obtener otro problema interesante?
- ¿Qué errores piensas que pueden tener algunos estudiantes al resolver este problema?

La forma de reaccionar del docente a las respuestas de los estudiantes y la forma de preguntar tiene influencia en el ambiente del salón de clases. Desarrollar un ambiente de resolución de problemas en clase toma tiempo; de acuerdo con Grows (2003) deben considerarse las siguientes tres ideas:

- La forma como un maestro resuelve un problema en frente de la clase es crucial. Un maestro debería comunicar a los estudiantes, mientras muestra una solución a alguna tarea, que resolver problemas matemáticos involucra avances y retrocesos.

- Un maestro debería tomar tanto soluciones inapropiadas como apropiadas. Puede que discutir una solución incorrecta lleve a los estudiantes a demostrar que procedimiento es el correcto.
- El maestro debe ayudar a desarrollar hábitos de la mente en los estudiantes, a través de cuestionamientos y modelación de soluciones. Debe plantear las siguientes preguntas: ¿Es razonable la respuesta? ¿Has vuelto a revisar los procedimientos elegidos para encontrar la solución? ¿Está el problema relacionado con otro problema? ¿Puedo modificar el problema y convertirlo en uno más sencillo y fácil de resolver? ¿Hay alguna otra solución posible? (p.138)

Para evaluar el pensamiento de los alumnos es importante plantear preguntas o intervenciones durante el proceso de resolución de problemas, escuchar las respuestas de los alumnos y observar de manera cuidadosa sus procedimientos o trabajos escritos.

Después de la sesión. Un maestro debería tomar tiempo para reflexionar sobre los resultados obtenidos, pensando en las futuras lecciones que se pueden construir y relacionar con las actuales y anteriores. De esta forma promovería el aprendizaje de los estudiantes, aprendizaje que puede ser representado como redes significativas de ideas. Dentro de tales reflexiones deberían considerarse:

- Conceptos y patrones erróneos.
- Fortalezas y capacidades.

Los resultados al evaluar los trabajos de los estudiantes, pueden considerarse para tomar decisiones respecto a sesiones posteriores, tales como (Grows, 2003):

- Elegir tareas que tengan una demanda cognitiva alta pero en las que los estudiantes empleen habilidades las cuales les permita llegar a una solución.

- Estructurar preguntas apropiadas para estimular discusiones entre los estudiantes y extraer importantes conexiones de grupos de ideas matemáticas (p. 141).

2.3.4 El uso de representaciones, la tecnología y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas

El NCTM (2000) establece que "la tecnología [calculadora, computadora] es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y puede aumentar las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes" (p. 43). El NTCM (ibid) marca que en los programas de enseñanza de las matemáticas la tecnología debería utilizarse con el objetivo de enriquecer el aprendizaje y no como sustituto de los conocimientos e intuiciones básicos. La capacidad de cálculo de los recursos tecnológicos amplía la serie de problemas posibles a los alumnos, permitiéndoles disponer de más tiempo para desarrollar conceptos y para modelizar. Pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, "con frecuencia implica describir situaciones matemáticamente" (Lesh y Doerr, 2003, p. 15), analizar información cualitativa, cuantificar información en caso de ser necesario, atribuir dimensiones al espacio y ubicar eventos en marcos de referencia (Lesh y Doerr, 2003).

De acuerdo con Duval (1996) y otros autores (Abrate, 2006; Hitt, 2003; Kaput y Roschelle, 1998) es necesario que los estudiantes adquieran experiencia en el uso de representaciones (verbal, gráfico, numérico y algebraico) y en la transferencia de una a otra para aprender conceptos matemáticos como función. Estos registros pueden ser generados por el estudiante a través del lenguaje verbal, escrito y los medios computacionales. Un alumno ha aprendido un concepto en la medida que transita libremente de un registro de representación a otro y realiza tratamiento en cada registro.

Comprender el concepto de función implica que los estudiantes relacionen e integren todos los registros de representación asociados, además que entiendan qué es lo que tienen en común (Kaput, 1999). Los alumnos deben adquirir experiencia para transitar entre una variedad amplia de registros de representación, así como capacidad para coordinar y articular estos registros (Duval, 1996).

De acuerdo con la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2003) al resolver un problema los estudiantes deben entender que cada registro de representación (tablas, gráficas, metáforas basadas en la experiencia, diagramas o dibujos, modelos concretos, lenguaje hablado, símbolos escritos, ecuaciones) proporciona información diferenciada, la cual permite visualizar una situación desde diversas perspectivas e incrementar el nivel de comprensión sobre ésta y conceptos subyacentes.

El software de Net Logo permite hacer simulaciones o modelar el comportamiento de fenómenos como el crecimiento poblacional. Constituye un entorno de aprendizaje dinámico en el que se puede observar la situación (Figura 4.32), la gráfica que la representa y las variables involucradas. Se pueden modificar las condiciones iniciales del fenómeno y observar cómo ello tiene consecuencias directas en el comportamiento de éste. Posibilita, además, el empleo de los registros de representación verbal, tabular y gráfico para visualizar la misma situación desde diversas perspectivas. Aunque para acceder al registro tabular generado por el mismo software se requiere de mayor conocimiento sobre el uso de sus herramientas. Net Logo permite explorar los conceptos como función, función exponencial y conocimiento asociado (variable, tasa de cambio, dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, continuidad) al simular el comportamiento de fenómenos y observar cómo se relacionan entre si.

2.4 La evaluación en el aprendizaje de las matemáticas

Los procesos de evaluación no deben separarse de las actividades de instrucción que se desarrollan en la clase; deben ser parte de las actividades cotidianas de la instrucción (Santos, 2007)

La selección de los trabajos propuestos para la evaluación transmite un mensaje a los estudiantes acerca de qué conocimientos matemáticos y habilidades se evalúan. Además de las evaluaciones formales tales como test y exámenes, los profesores deben recabar continuamente información acerca del progreso de sus estudiantes (NTCM, 2000).

En la perspectiva de Modelos y Modelación la evaluación es continua. Los alumnos aprenden al expresar sus ideas, crear y comunicar sus modelos. El proceso es el producto. Las actividades provocadoras de modelos pueden utilizarse para realizar evaluaciones preliminares, y las actividades de adaptación de modelos para evaluaciones posteriores (Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski, 2002).

Santos (1994) propone que la evaluación debe considerar formas de analizar los diversos momentos que se involucran en el proceso de solución de un problema:

- El primer momento se centra en la parte relacionada con el entendimiento del problema. El estudiante debe demostrar que ha entendido el problema con palabras propias o con representaciones.
- Un segundo momento se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución.
- Finalmente es importante revisar los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

2.5 Integración de la literatura

En el diseño de la secuencia didáctica de esta tesis se utilizaron los constructos señalados anteriormente. Como ya se mencionó, el análisis didáctico (Gómez, 2012) sirvió como una guía metodológica general.

La teoría sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizada en esta tesis fue la perspectiva de Modelos y Modelación. Se consideró su importancia por describir el aprendizaje de las matemáticas como la evolución de ciclos de entendimiento y refinamiento del conocimiento al resolver problemas o situaciones (Lesh y Doerr, 2003). Para la elección de las actividades de aprendizaje se siguió parte del esquema organizacional estándar propuesto en la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewski, 2002).

Se revisó la perspectiva de Resolución de problemas para considerar el papel del docente en el aula y planear el ambiente de aprendizaje.

Para la evaluación del conocimiento de los estudiantes se realizaron comparaciones en torno a si hubo una modificación sobre el concepto que los estudiantes tenían inicialmente de la función exponencial y sus conceptos asociados al trabajar en la tarea con características de actividad provocadora de modelo y la actividad de adaptación de modelo que trabajaron los estudiantes de forma individual.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe el contexto institucional y la población de estudiantes en la cual se aplicó la secuencia didáctica, las fases del proceso del diseño y los criterios que se siguieron para implementarla, analizarla y evaluarla.

3.1 Contexto institucional y población de estudiantes participantes

En la implementación de la secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial participaron 12 estudiantes de la Universidad de Quintana Roo, del primer semestre de la carrera de Seguridad Pública cuyas edades oscilaban entre 18 y 20 años, quienes cursaban la asignatura de Matemáticas generales, uno de los pocos cursos de matemáticas dentro de su formación profesional.

Los estudiantes de esta carrera se caracterizan por ser alumnos a quienes les disgustan las matemáticas y cuya creencia de aprenderlas consiste en la memorización de conceptos, algoritmos y fórmulas, además de que carecen de experiencias en la resolución de problemas y modelación.

Entre los conocimientos previos de los alumnos estaban los correspondientes a los cursos de matemáticas de los programas de nivel medio superior. Además, los estudiantes habían estudiado los temas correspondientes a las dos primeras unidades del curso de matemáticas generales (Cristóbal, 2007), en las cuales se revisó contenido alrededor de los conceptos de exponentes, ecuaciones, progresiones, variación y proporción.

3.2 La secuencia didáctica

Para el desarrollo de la tesis, se siguió la metodología del análisis didáctico (Gómez, 2007). Se diseñó la versión preliminar de la secuencia, se aplicó en fase piloto, se rediseñó y finalmente se implementó la versión final. En la implementación en fase piloto participaron veintitrés estudiantes de la carrera de humanidades. La finalidad fue mejorar la secuencia en términos de redacción, además se agregaron actividades considerando el esquema de organización estándar para las secuencias de desarrollo del modelo. Los cambios se describen con más detalle en el apartado 4.1[1] del Capítulo 4 del presente trabajo de tesis.

3.2.1 Diseño y selección de actividades y problemas

Para el desarrollo de la secuencia se siguió parte del esquema organizacional estándar propuesto en la perspectiva de Modelos y Modelación[2] (Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewski, 2002). El cual consta de una actividad de calentamiento, una tarea con características de actividad provocadora de modelo, actividades de exploración de modelos, actividad de adaptación de modelos, dos actividades de seguimiento, presentaciones, discusiones acerca de la semejanza estructural y debates (Figura 3.1).

[1] Sección 4.1 Observaciones a partir de la implementación fase piloto de la secuencia didáctica

[2] Sección 2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de Modelos y Modelación.

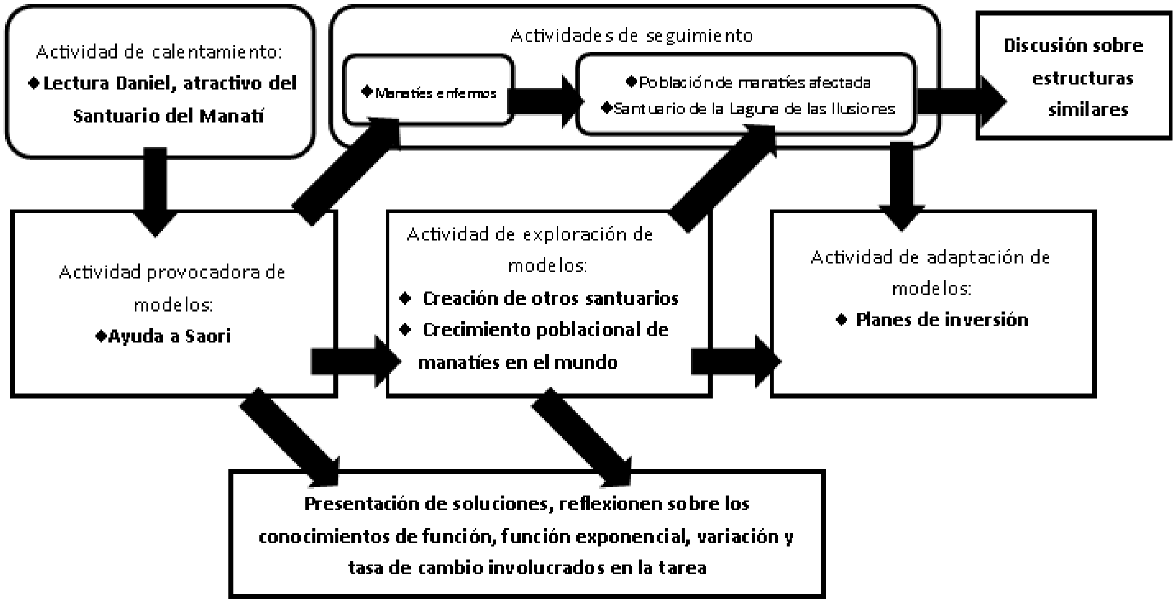


Figura 3. 1. Esquema de organización para las actividades de la secuencia didáctica

En la comprensión del concepto de función y, específicamente, de función exponencial es importante determinar cómo es la dependencia entre dos variables. Por esa razón la secuencia de actividades se diseñó para que los estudiantes comenzaran analizando y describiendo las cantidades involucradas en el contexto del crecimiento poblacional de manatíes y determinaran la dependencia entre el tamaño de la población en función del tiempo transcurrido. Las actividades fueron: (1) *Daniel atractivo del Santuario del Manatí,* (2) *Ayuda a Saori*, (3) *Manatíes enfermos,* (4) *Creación de otros santuarios,* (5) *Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo,* (6) *El Santuario de la laguna de la Ilusiones* y (7) *Población de manatíes afectada.*

Los conceptos matemáticos contemplados en las actividades se encuentran asociados al concepto de función y función exponencial y son: intersección, dominio, rango, variación, proporción, tasa de cambio, ecuación.

Las actividades se ordenaron de tal forma que se propiciara que los estudiantes resolvieran situaciones particulares, con procedimientos que se fueran modificando y refinando, de tal manera que más adelante fueran útiles para resolver situaciones generales. La primera fila de la Tabla 3.1 contiene el número de cada actividad de acuerdo con el orden que se implementaron en el aula.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Introducción a un contexto de la vida real</td><td colspan="7">Análisis de razones y proporciones</td></tr>
<tr><td>Análisis de tasas de cambio crecientes</td><td>Análisis de tasas de cambio decrecientes</td><td colspan="3">Análisis de tasas de cambio crecientes</td><td>Análisis de tasas de cambio decrecientes</td><td>Análisis de tasas de cambio crecientes y decrecientes</td></tr>
<tr><td colspan="7">Identificación de variables y dependencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificación de patrones</td><td>Análisis gráfico de la variación del parámetro k en la función $f(x)=k(1+c)^x$</td><td>Análisis gráfico de la variación del parámetro c en la función $f(x)=k(1+c)^x$</td><td>Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial creciente</td><td>Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial decreciente</td><td>Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial</td></tr>
<tr><td>Planteamiento de función exponencial creciente $f(x)=k(1+c)^x$</td><td>Planteamiento de función exponencial decreciente $f(x)=k(1-d)^x$</td><td colspan="2">Identificación del dominio y rango</td><td>Planteamiento de función exponencial creciente $f(x)=k(1+c)^x$</td><td>Planteamiento de función exponencial decreciente $f(x)=k(1-d)^x$</td><td>Planteamiento función exponencial creciente y decreciente</td></tr>
<tr><td colspan="4">Razonamiento bidireccional</td><td></td><td>Relaciones entre la función exponencial creciente y la función exponencial decreciente</td><td>Razonamiento bidireccional</td></tr>
</table>

Tabla 3. 1 Orden de actividades de acuerdo con los objetivos de conocimientos y habilidades a desarrollar.

La actividad 1 consistió en la *Lectura Daniel atractivo del Santuario del Manatí y* preguntas de reflexión en torno a ésta. El objetivo era que los estudiantes se introdujeran en un contexto de la vida real, con el cual se relacionó un problema posteriormente (columna 1, Tabla 3.1).

Las actividades 2 y 3 *Ayuda a Saori* y *Manatíes enfermos* fueron diseñadas para que el estudiante identificara, describiera, interpretara, explicara y predijera situaciones donde intervienen los conceptos de variación y tasa de cambio no constante. En particular, se pretendía que en la primera actividad los estudiantes pudieran describir la situación mediante una dependencia funcional del tipo exponencial creciente (columna 2, Tabla 3.1). El objetivo de la actividad de seguimiento *Manatíes enfermos* era que los estudiantes describieran una situación mediante una dependencia funcional de tipo exponencial decreciente (columna 3, Tabla 3.1).

Las actividades 4 y 5 fueron actividades de exploración de modelos: *Creación de otros santuarios* y *Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo.* El objetivo era ampliar el análisis de la función exponencial ($f(x) = k(1+c)^x$) generado en la actividad 1. Se pretendía propiciar que los estudiantes analizaran una familia de problemas al variar parámetros e identificaran el comportamiento de las gráficas generadas a partir de ésta (columnas 4 y 5, Tabla 3.1).

Las actividades 6 y 7, *El Santuario de la laguna de la Ilusiones* y *Población de manatíes afectada* respectivamente, fueron diseñadas como actividades de seguimiento (columnas 6 y 7, Tabla 3.1). El objetivo era que los estudiantes, a partir de la exploración de los modelos desarrollados en las actividades de la secuencia, previamente resueltas, refinaran y generaran otros ciclos de comprensión. Se pretendía que lograran deducir, a partir de información presentada en forma tabular y gráfica, la dependencia funcional de tipo exponencial creciente para la Actividad 6, y de tipo exponencial decreciente para la Actividad 7.

La actividad final *Planes de inversión* fue planteada para que los estudiantes transfirieran a otro contexto los conocimientos desarrollados hasta ese momento (columnas 8, Tabla 3.1). Se pretendía propiciar que los estudiantes ajustaran el modelo exponencial aprendido a una nueva situación y por lo tanto a nuevos datos. Dada la importancia del empleo de las diferentes representaciones ligadas al concepto de función exponencial, se consideró que en esta actividad los estudiantes deberían poder trabajar con al menos dos de las representaciones de la función exponencial.

Las características y objetivos de las actividades se describen de forma detallada en los siguientes apartados.

3.2.1.1 Actividad 1. Artículo Daniel, atractivo del Santuario del Manatí

La primera actividad de la secuencia didáctica consiste en el artículo de periódico *Daniel, atractivo del Santuario del* Manatí y cuatro preguntas de comprensión entorno a la lectura (Anexo).

El artículo describe cómo rescataron al manatí Daniel cuando era una cría y los cuidados que han tenido con él. Esta actividad es de calentamiento, y el objetivo no es matemático sino contextual. Es decir, se pretende que los estudiantes se introduzcan en un contexto de la vida real, con el cual se relaciona un problema posteriormente.

3.2.1.2 Actividad 2. Ayuda a Saori

En la actividad *Ayuda a Saori* (Anexo) se plantea una problemática en torno a la administración de un santuario de manatíes. Al estudiante se le proporcionan parámetros iniciales: la población inicial de manatíes en el santuario y la tasa de crecimiento poblacional. A partir de la información proporcionada los estudiantes deben ayudar a Saori a resolver situaciones en torno a la administración del santuario, como calcular o estimar la población de manatíes en determinados períodos. Para ello los estudiantes deben redactar una carta donde expliquen sus procedimientos.

La Actividad 2 se plantea como una tarea con características de actividad provocadora de modelos, dado que se consideró que su diseño cumpliera los seis principios[3] (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000), sin embargo se incluyen preguntas con la finalidad de ayudar a los estudiantes a promover la generalización y apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Grows, 2003).

Esta actividad se incorporó al inicio de la secuencia con el objetivo de identificar los conocimientos que tenían los alumnos sobre los conceptos de función, función exponencial y logarítmica, relaciones recursivas, proporcionalidad, variación y tasa de cambio (Tabla 3.2), y para apoyar el desarrollo de conocimiento de estos conceptos matemáticos.

[3] Sección 2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de modelos y modelación.

También tuvo por objetivo que los estudiantes desarrollaran habilidades en la descripción, interpretación, explicación y predicción de situaciones donde interviene variación y tasa de cambio. Los estudiantes deberían tener en cuenta el uso de tablas (tratamiento numérico de la información), la representación algebraica, el análisis de casos particulares, la búsqueda de patrones y generalizaciones, la visión retrospectiva del proceso de solución, la comunicación oral y escrita de resultados (Tabla 3.2).

Medir y desarrollar en los estudiantes las habilidades y conocimientos iniciales en:
Análisis de razones
Análisis de proporciones
Análisis de tasas de cambio crecientes
Identificación de patrones
Identificación de variables y dependencia
Planteamiento de expresión exponencial creciente $f(x) = k(1+c)^x$
Razonamiento bidireccional
Función logarítmica como inversa de la exponencial

Tabla 3. 2 Objetivos a desarrollar con la actividad Ayuda a Saori.

Para el cierre de esta actividad se programó la presentación y discusión de las cartas donde los estudiantes explicarían los procedimientos con los cuales dieron solución a la situación. El objetivo de la presentación fue que los estudiantes discutieran las fortalezas y debilidades de sus procesos de solución, reflexionaran sobre los conocimientos de función, función exponencial, variación y tasa de cambio involucrados en la tarea, y que generalizaran.

3.2.1.3 Actividad 3. Manatíes enfermos

Esta actividad fue diseñada como una actividad de seguimiento[4] a la Actividad 2 y para realizar como tarea extraescolar de forma individual. *Manatíes enfermos* (Anexo) consiste en una situación en la cual la población de manatíes del santuario que administra Saori ha alcanzado 153 manatíes cuando se contagian de una enfermedad en la cual mueren 75 de cada 250 manatíes. Los estudiantes deben determinar un procedimiento con el cual Saori pueda calcular la población que tendrá al final de cualquier año; así como determinar en qué momento se podrían quedar sin estos animales, en caso de que no lograran controlar la situación.

La Actividad 3 tiene por objetivos (Tabla 3.3) que los estudiantes utilicen los modelos construidos en la Actividad 2. Hagan uso de los conceptos de variación, tasa de cambio, función exponencial creciente y función logarítmica al analizar la nueva situación cuyo modelo es una función exponencial decreciente.

Desarrollar en los estudiantes los conocimientos y habilidades en:
Análisis de razones
Análisis de proporciones
Análisis de tasas de cambio decrecientes
Identificación de patrones
Identificación de variables y dependencia
Planteamiento de expresión exponencial decreciente $f(x)=k(1-d)^{x}$
Planteamiento de solución bidireccional
Función logarítmica como inversa de la exponencial
Relaciones entre la expresión algebraica exponencial creciente y decreciente

Tabla 3. 3 Objetivos a desarrollar con la actividad Manatíes enfermos

[4] Sección 2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de modelos y modelación.

3.2.1.4 Actividad 4. Creación de otros santuarios

Esta actividad consiste en un problema que trata sobre la creación de diferentes santuarios para manatíes. Primero los estudiantes analizarían una situación en la que tres santuarios tienen distintas cantidades iniciales de Manatíes, pero la misma tasa el crecimiento poblacional anual (Anexo). Posteriormente, los estudiantes deberían *correr* simulaciones en NetLogo para cada santuario, hasta obtener una población de 2500 manatíes partiendo de las condiciones iniciales establecidas.

El objetivo de la Actividad 4 fue que los alumnos desarrollaran habilidades en la descripción, interpretación, explicación y predicción de la representación gráfica o visual del comportamiento de situaciones donde subyace el concepto de función exponencial, así como sus conceptos asociados tales como dominio, rango, variación y tasa de cambio. Se pretendía que los estudiantes pudieran identificar el comportamiento de la forma gráfica de una función exponencial al variar el parámetro k en la función (Figura 3.4) $f(x) = k(1+c)^x$

Otro de los objetivos de la Actividad además de los antes mencionados, era permitir que los estudiantes realizaran un razonamiento bidireccional al analizar la gráfica que representaba el comportamiento de la situación. Para ello se les pedía determinar el periodo en el cual se alcanzaba una determinada población que crecía a una determinada tasa.

La Actividad 4 se trabajó con tres equipos de estudiantes diferentes a los formados inicialmente para resolver las Actividades 2 y 3, a los cuales se les solicitó al menos una computadora portátil por equipo. Se desarrolló en dos sesiones, cada una de dos horas. En estas dos sesiones se trabajaron las Actividades 4 y 5.

A manera de introducción de la sesión de resolución de la Actividad 4 el docente preguntó a los estudiantes, ¿cuál era la cantidad mínima de manatíes que se requerían para su reproducción? Enseguida, el docente planteó la situación y pidió que se analizara utilizando Netlogo.

Desarrollar en los estudiantes los conocimientos y habilidades en:
Análisis de la razones
Análisis de proporciones
Análisis de tasas de cambio crecientes
Análisis gráfico de la variación del parámetro k en la función $f(x) = k \cdot a^x$
Identificación de variables y dependencia
Identificación del dominio y rango en la función $f(x) = k \cdot a^x$
Razonamiento bidireccional empleando la gráfica de la función exponencial

Tabla 3. 4 Objetivos a desarrollar con la actividad Creación de otros santuarios

Con la finalidad de que los estudiantes observaran en forma dinámica la variación conjunta de cantidades, su dependencia funcional y el crecimiento de una función se utilizó NetLogo para la construcción de la gráfica. Ello permitió también invertir menos tiempo en el proceso de graficación y más en el análisis de la información de esta actividad.

3.2.1.5 Actividad 5. Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo

En esta actividad la modelación consistió en la simulación de situaciones en las que la tasa de crecimiento poblacional de los manatíes variaba. La actividad tuvo por objetivos que los estudiantes continuaran el desarrollo de las habilidades mencionadas en la Actividad 4, así como que observaran y analizaran el comportamiento de la gráfica de la función exponencial a^x al variar parámetro a (Anexo). Los estudiantes debían emplear en sus descripciones conceptos vinculados con la función exponencial tales como dominio, rango, variación y razón de cambio (Tabla 3.5).

Desarrollar en los estudiantes los conocimientos y habilidades de:
Análisis de la razones
Análisis de proporciones
Análisis de tasas de cambio crecientes
Análisis gráfico de la variación del parámetro a en la función $f(x) = k \cdot a^x$
Identificación de variables y dependencia
Identificación del dominio y rango en la función
Función logarítmica como inversa de la exponencial

Tabla 3. 5 Objetivos a desarrollar con la actividad Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo

En esta sesión se consideró que algunos de los equipos presentaran las soluciones de las actividades realizadas en NetLogo.

3.2.1.6 *Actividad 6. El santuario de la Laguna de las Ilusiones*

La Actividad 6, *Santuario de la Laguna de las Ilusiones*, consistió en una hoja con una tabla de datos (población al final de cierta cantidad de periodos) y la gráfica correspondiente, sin incluir la expresión algebraica que describía el crecimiento poblacional del Santuario (Anexo).

Los objetivos de la actividad fueron que los estudiantes analizaran la variación de la población de manatíes con respecto al tiempo; establecieran la expresión matemática $k \cdot a^x$ para representar al conjunto de datos de la población dado en la tabla y para hacer predicciones de la cantidad de manatíes en la Laguna de las Ilusiones al cabo de cualquier cantidad de años (Tabla 3.6).

Desarrollar en los estudiantes los conocimientos y las habilidades en:
Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio
Determinación de la tasa de cambio
Identificación de variables y dependencia
Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial creciente
Planteamiento expresión exponencial creciente

Tabla 3. 6 Objetivos a desarrollar con la actividad Santuario de la Laguna Ilusiones

3.2.1.7 *Actividad 7. Población de manatíes afectada*

La *Población de manatíes afectada* (Anexo) fue la segunda actividad de seguimiento[5] para realizar como tarea extraescolar de forma individual. Consistió en el análisis de la forma tabular y gráfica de la función exponencial decreciente. El estudiante debía explicar a Saori cómo era la disminución en la población de manatíes, considerando que sería afectada por dos tasas de mortalidad diferentes. Las tablas contienen información acerca del tamaño de la población de manatíes transcurridos 6 a 10 años y sus gráficas correspondientes, las cuales incluyen la población inicial de manatíes hasta transcurridos 15 años. El estudiante debe deducir la población inicial, la tasa de decrecimiento y la expresión que le ayude a conocer la población restante al final de cada año a partir de la información proporcionada.

[5] Sección 2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de modelos y modelación.

Los objetivos de la Actividad 6 fueron dos. Primero, que los estudiantes transfieran lo aprendido hasta el momento respecto a la función exponencial creciente para describir el comportamiento de un fenómeno caracterizado por la función exponencial decreciente; segundo, que sigan desarrollando significado sobre los conceptos de función, variación, tasa de cambio, dominio y rango (Tabla 3.7).

Desarrollar en los estudiantes los conocimientos y las habilidades en:
Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio
Determinación de la tasa de cambio decreciente
Identificación de variables y dependencia
Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial decreciente
Planteamiento expresión exponencial decreciente
Relaciones entre la función exponencial creciente y la función exponencial decreciente

Tabla 3. 7 Objetivos a desarrollar con la actividad Población de manatíes afectada.

La Actividad 8 es parte de la secuencia pero fue diseñada con fines de evaluación, por lo tanto se describe en la sección 3.2.3 de este documento.

3.3 El trabajo en el aula y el papel del docente

El autor de esta tesis no sólo describió y evaluó los resultados de la secuencia didáctica; también fue el profesor que la implementó. Por lo tanto, desempeñó un rol antes, durante, y después del diseño de las actividades. Participó en el desarrollo de conocimiento de los estudiantes, pero también como observador de este proceso.

El trabajo en el aula para abordar las actividades, se guió utilizando las recomendaciones que se mencionan en las secciones 2.3.2 y 2.3.3. La implementación de la secuencia se realizó en un ambiente colaborativo, donde los estudiantes trabajaron en forma individual, en equipo, formularon conjeturas, crearon modelos y los evaluaron. El docente no solamente solicitó que reportaran una respuesta, sino que la justificaran.

El docente realizó la disposición del grupo en equipos de 3 y 4 estudiantes para trabajar las actividades en clase. Las presentaciones y discusiones fueron en forma grupal, tomando consideraciones de Lesh (2002) y Grows (2003). En general, el proceso de trabajo en el aula consistió en lo siguiente:

- Entrega de actividades a los equipos de estudiantes para que las trabajaran en el aula.
- Presentación de resultados de algunos equipos frente al grupo.
- Discusión de resultados y cierre del tema con ayuda del profesor.
- Entrega de actividades de seguimiento a los estudiantes para que las trabajaran fuera del aula en forma individual.
- Discusión de actividades de seguimiento en el aula.

Los estudiantes debían entregar al profesor los registros de las actividades resueltas en equipo y en forma individual. El docente además utilizó un diario para llevar nota del desarrollo de los sistemas conceptuales de los estudiantes durante las sesiones en el aula.

3.4. Instrumentos de recolección de información

En la implementación de la secuencia didáctica en su versión final se recopiló información mediante las hojas de trabajo y las presentaciones multimedia de los estudiantes; grabación de audio de algunas sesiones y la bitácora del docente. La implementación la llevó a cabo el profesor, quien también realizó el análisis de los datos con apoyo de un investigador externo al proceso.

3.5. Evaluación de la secuencia didáctica

El análisis de la información obtenida al implementar la secuencia didáctica se hizo de acuerdo con los objetivos de la tesis. Para ello se utilizaron criterios diseñados con base en la perspectiva de Modelos y Modelación (ciclos de entendimiento cualitativo, cuantitativo y algebraico) y la identificación de la forma de abordar por los estudiantes los conceptos asociados (variación, variables, razón, proporción, tasa de cambio, ecuación, dominio, rango, continuidad). Por lo tanto, la metodología que se siguió para analizar la información obtenida fue cualitativa. Interesaba conocer el desarrollo del conocimiento de los estudiantes al resolver las actividades, no cuantificar tipos de representaciones que emergieron o ciclos de entendimiento.

Para saber si hubo modificación en la comprensión de conceptos, se incluyó en la secuencia la última actividad: *Planes de inversión*, la cual es una actividad adaptación de modelos[6].

En la actividad *Planes de inversión*, se planteo que José tenía un monto inicial de dinero el cual deseaba invertir para alcanzar el monto necesario para comprar una consola de video juegos, la cual una vez adquirida tenía una depreciación de su valor al año. Se le planteó al estudiante que debía ayudar a José a elegir la inversión en la que consiguiera, en el menor tiempo posible, el monto para adquirir la consola de videojuegos; pero además, debía explicarle qué sucedería con el valor del equipo una vez adquirido. La Actividad 8 fue diseñada para el empleo de las principales ideas asociadas al concepto de función exponencial trabajadas en el desarrollo de la secuencia didáctica (Tabla 3.8).

Evaluación
Análisis de razones
Análisis de proporciones
Análisis de tasas de cambio creciente y decrecientes
Identificación de la relación entre representaciones de la función exponencial
Identificación de variables y dependencia
Planteamiento expresión exponencial creciente y decreciente
Planteamiento de solución bidireccional

Tabla 3. 8 Evaluación del empleo de ideas principales de la función exponencial

[6] Sección 2.3.2 Diseño de tareas en la perspectiva de modelos y modelación.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se muestran los resultados y el análisis de la información obtenida a partir de la implementación de la secuencia didáctica en el aula. Se describe el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en cuanto al concepto de función exponencial y conceptos asociados (variables, variación, tasa de cambio, dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, continuidad); se muestran los procedimientos realizados por los estudiantes al resolver las actividades.

Se describe el papel del profesor para apoyar el desarrollo de conocimiento, así como las dificultades y logros de aprendizaje de los estudiantes. Se inicia con una descripción breve acerca de la implementación de la prueba piloto, la cual generó modificaciones en algunos aspectos de las actividades de la secuencia. Y posteriormente, se presenta la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia didáctica.

4.1 Observaciones a partir de la implementación fase piloto de la secuencia didáctica

La implementación de la fase piloto se realizó con el objetivo de detectar errores de redacción en los enunciados de las actividades propuestas, experimentar diferentes formas de implementar las actividades (con o sin tecnología; trabajo en equipo o individual) de la secuencia didáctica. En ella participaron veintitrés estudiantes de la carrera de humanidades.

Entre las modificaciones realizadas a la secuencia como consecuencia de los resultados de la implementación se cambió el artículo de periódico correspondiente a la *actividad de calentamiento* (Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski, 2002). El artículo inicial contenía información numérica extra que causó confusión en los estudiantes al momento de analizar la situación. Otro aspecto que se adecuó fue la disposición del grupo para trabajar las actividades en NetLogo, la propuesta de trabajo inicial era individual y se modificó para que realizaran el análisis en los equipos, utilizando la computadora portátil de alguno de los integrantes.

Finalmente a la actividad de *adaptación de modelos Planes de inversión* se agregó un problema con el objetivo de que el estudiante modelara una situación relacionada con la función exponencial decreciente.

4.2 Resultados y análisis de la implementación de la secuencia didáctica

A partir de las observaciones enunciadas en el apartado 4.1 la secuencia se rediseñó y se implementó con un nuevo grupo de estudiantes. Los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia en esta nueva fase y el análisis de los mismos se presentan en esta sección; se describió cada una de las sesiones y los resultados obtenidos al implementar cada una de las actividades.

A continuación se describe el desarrollo de conocimiento de los estudiantes actividad por actividad. Para ello se utilizó como descriptor en la Actividad 2 la identificación de ciclos de entendimiento. Los ciclos de entendimiento identificados se clasificaron a su vez como cualitativo, cuantitativo y formal. En todas las actividades se le dio seguimiento al proceso de adquisición de significado de cada uno de los conceptos asociados al concepto de función exponencial y la relación entre estos mediante el uso de distintas representaciones.

Como se mencionó en el Capítulo 1, el objetivo de la secuencia didáctica fue promover en estudiantes de los primeros semestres de nivel superior el aprendizaje y comprensión de la función exponencial y conceptos asociados (variación y tasa de cambio). A través de la resolución de problemas que impliquen que el estudiante haga uso de los conceptos para describir e interpretar situaciones al desarrollar modelos.

Enseguida se describen de manera narrativa los resultados obtenidos en cada una de las actividades, así como se explican los procedimientos utilizados.

4.2.1 Actividad 1 y 2. Modelación de una actividad de crecimiento poblacional que implica una función exponencial creciente de la forma $f(x) = k(1+c)^x$ donde $x \in \mathbb{Z}^+, k = 23, c = 0.08$

En la primera sesión se trabajó con la actividad de calentamiento Daniel, atractivo del Santuario[7] del Manatí y la actividad de modelación Ayuda a Saori[8]. Los objetivos de las actividades 1 y 2 fueron identificar los conocimientos previos de los alumnos sobre los conceptos de función, función exponencial y logarítmica, variación y tasa de cambio; desarrollar habilidades y conocimientos en la descripción, interpretación, explicación y predicción de situaciones donde intervienen los conceptos antes mencionados. Los estudiantes podrían emplear tablas (tratamiento numérico de la información), representaciones algebraicas, analizar casos particulares, buscar patrones y generalizaciones, emplear razonamiento bidireccional en el proceso de solución, comunicación oral y escrita de resultados.

En esta sesión de dos horas trabajaron cuatro equipos de tres estudiantes cada uno.

4.2.1.1 Primer ciclo de entendimiento: Cualitativo

A cada grupo se le entregó la lectura de “Daniel, atractivo del Santuario del Manatí” (Anexo). Al término de ésta respondieron en equipo preguntas de comprensión acerca del artículo.

Algunos de los estudiantes preguntaron qué era lo que aparecía en la imagen, pues no conocían cómo era un manatí. Inmediatamente el resto del grupo comentó qué era. Describieron cualitativamente algunas de sus características con frases como “es grande”, “su color es gris”, “se parece a una foca” y comentaron el caso reciente de que se encontró uno muerto en la bahía de Chetumal.

En este primer ciclo de entendimiento inició el proceso de comprensión de la actividad.

---

[7] Para conocer descripción y objetivos de la actividad, revisar sección 3.2.1.1 Primera actividad. Lectura del artículo Daniel, atractivo del Santuario del Manatí.

[8] Para conocer descripción y objetivos de la actividad, revisar sección 3.2.1.2 Segunda actividad. Ayuda a Saori.

4.2.1.2 Segundo ciclo de entendimiento: Numérico

Después de la revisión de *la Lectura Daniel atractivo del Santuario del Manatí* el docente entregó a los estudiantes el problema Ayuda a Saori con el santuario (Anexos, actividad 2). El docente comentó el contexto del problema, pidió que lo resolvieran y enfatizó en la elaboración de la carta donde se explicaran los cálculos elaborados que le dieran solución a la situación planteada. Los estudiantes trabajaron en la actividad durante 90 minutos aproximadamente.

De manera simultánea a la lectura del problema, los equipos procedieron a identificar las incógnitas, los datos del problema y la relación entre éstos (población inicial y tasa de crecimiento anual de la población de manatíes). Con esta información los estudiantes procedieron a realizar operaciones para responder el inciso 1 del problema *Ayuda a Saori*. El inciso uno les solicitaba determinar la cantidad de manatíes que tendrían en el primer, segundo y cuarto año en el santuario.

Cada estudiante expresó al interior del equipo sus puntos de vista e ideas acerca de cómo comenzar a abordar la actividad.

Procedimiento: Regla de 3 para calcular la tasa de cambio. Los equipos 2 y 4 (50% de equipos en el grupo) comenzaron calculando el incremento de la población para el primer año a partir de la población inicial de los manatíes empleando un procedimiento al que denominaron “la regla de tres simple” (Figura 4.1).

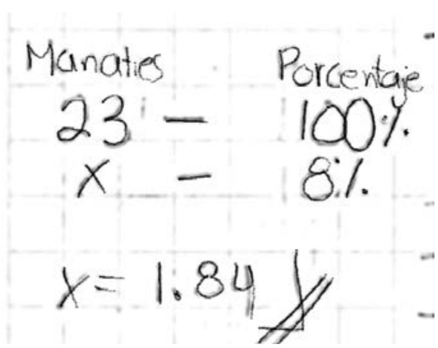


Figura 4. 1 Cálculo del incremento de la población de manatíes empleando “la regla de tres simple”, equipos 2 y 4.

Los estudiantes expresaron: “El 100% de la población son los 23 manatíes iniciales por eso los pongo en la misma línea, como me piden el 8% lo escribo debajo del 100%, pero lo que me piden conocer es la cantidad por lo que lo llamo *x* y lo pongo en la misma línea del 8%, ya que lo acomodé multiplico cruzado y divido entre 100”. Estos estudiantes no explicitaron que sus procedimientos les servían para conocer el crecimiento de la población, más bien describieron el empleo de un recurso algorítmico para responder el inciso 1 de la actividad.

Procedimiento Repartición para calcular la tasa de cambio. Por otro lado los integrantes de los equipos 1 y 3 (50% de equipos en el grupo) calcularon el incremento de la población al final de cada periodo, la explicación del equipo 1 fue (similar a la del equipo 3): “Divido la población de manatíes que tengo en cien partes, como crece 8 de esas cien partes la cantidad que me dé lo multiplico por ocho” (Figura 4.2). Estos estudiantes al responder el primer inciso de la actividad reconocieron que la situación requería determinar cómo y cuánto crecía la población.

$$23 \div 100 \times 8 = 1.84$$

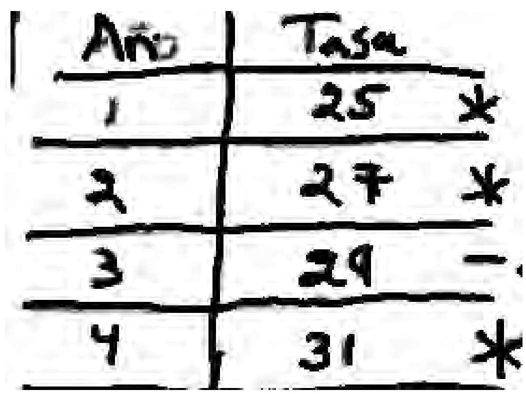
Figura 4. 2 Cálculo del incremento de la población de manatíes empleando proporciones, equipos 1 y 3.

Al obtener los resultados para el inciso 1, algunos estudiantes se percataron y preguntaron si el resultado podía ser “con decimales”, debido al contexto del problema. El docente, quien sabía que el dominio de la función que describía el problema correspondía a los números reales, enteros positivos, orientó a los estudiantes hacia el análisis con las siguientes preguntas ¿Cómo puedes representar una cantidad de individuos? ¿Si en lugar de individuos fuera un líquido o un pastel podrían representarla con fracciones? ¿Qué diferencia habría entre ambos tipos de cantidades? Los estudiantes determinaron que la población de manatíes al final de cada periodo debía ser expresada en enteros justificando que “no podían existir manatíes incompletos”.

4.2.1.3 Tercer ciclo de entendimiento: Identificación de patrones

Modelo tabular recursivo. Los equipos 1, 3 y 4 (75% del grupo) acordaron que para calcular la población al final de cada periodo señalado en el inciso 1 debían calcular el incremento del 8% sobre la población obtenida al final de cada periodo anterior. Los equipos requerían conocer la población final del periodo anterior para calcular la población final del periodo siguiente, es decir su modelo tenía características recursivas.

Un modelo representativo realizado por los equipos 1, 3 y 4 fue el elaborado por el equipo 1. Éste organizó su información en una tabla marcando con un asterisco la información solicitada en el primer inciso de la actividad *Ayuda a Saori* (Anexo). Además, redondeó a enteros la población de manatíes al final de cada periodo (Figura 4.3) y justificó que no podría haber “manatíes incompletos”.



Año	Tasa	
1	25	*
2	27	*
3	29	-
4	31	*

Figura 4. 3 Procedimiento numérico recursivo tabular empleado por equipo 1.

Modelo tabular lineal no recursivo. Por otra parte el equipo 2 (25%) no utilizó un procedimiento recursivo. Al obtener la población de manatíes para los periodos solicitados en el inciso 1 del problema observó que los valores del incremento eran cercanos a 2, por lo que su deducción fue que el incremento correspondía a un crecimiento lineal, aunque no lo expresó de esa forma. En la Figura 4.4 se puede observar el modelo tabular correspondiente a este razonamiento. En la primera columna de la tabla los estudiantes organizaron los años en los cuales deseaban conocer la población de manatíes. En la segunda columna de la tabla se puede observar el incremento constante de 2 en la población de manatíes por cada periodo transcurrido. Los estudiantes relacionaron la información de la primera columna con la segunda y con la población inicial de manatíes. Por ejemplo, al final del primer año ellos identificaron que la población era igual a la suma de la población inicial (23) más el incremento de 2 manatíes presentado en su tabla para ese periodo ($23 + 2 = 25$). El docente intentó propiciar un análisis sobre el procedimiento del equipo, dado que el redondeo de sus resultados no les permitía observar que el incremento de los manatíes no era constante. Sin embargo, el docente no logró que los estudiantes modificaran su procedimiento.

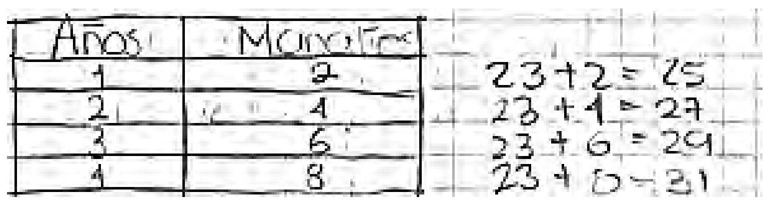


Figura 4. 4 numérico linear tabular empleado por equipo 2.

A partir de los procedimientos planteados por los estudiantes en la solución de la actividad, el maestro propició la identificación de patrones con el siguiente tipo de preguntas “¿De qué forma pueden escribir una expresión utilizando la población anterior?” “¿Qué datos empleas del cálculo de la población anterior para calcular el siguiente?”

A partir de esta reflexión los estudiantes modificaron el modelo que habían generado en su primer ciclo de entendimiento. Inicialmente presentaban solamente la relación entre el periodo y la población que habría al final de ellos, además de marcar la información solicitada (Figura 4.5). En este tercer ciclo de entendimiento los estudiantes registraron las operaciones realizadas para calcular la población al final de cada periodo, sumaron la población al final del periodo anterior (Figura 4.5, centro).

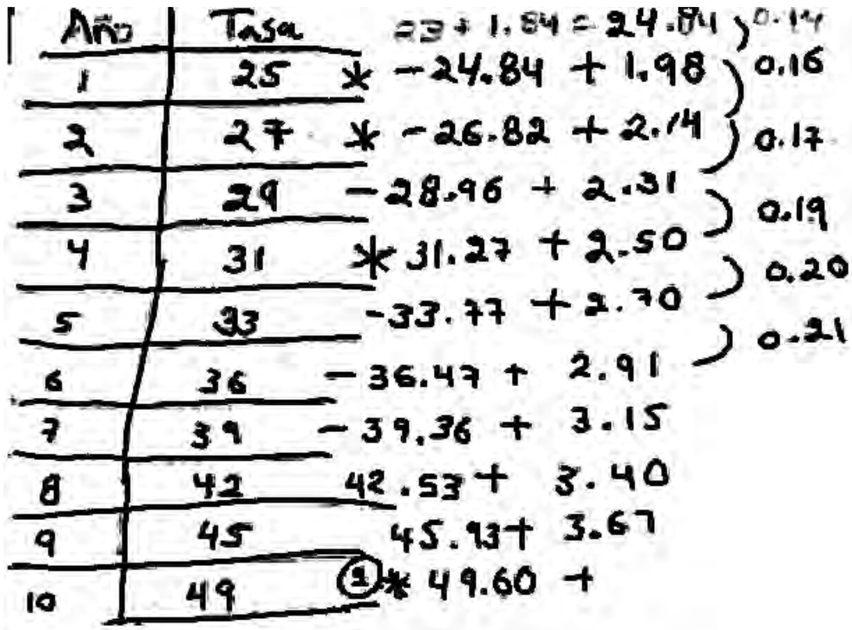


Figura 4. 5 Búsqueda de patrones a partir del numérico recursivo tabular empleado por equipo 1.

Además del análisis del proceso recursivo, los estudiantes revisaron la diferencia entre los incrementos de la población (Figura 4.5, derecha), señalando con líneas curvas las cantidades a las cuales calculaban dicha diferencias.

4.2.1.4 Cuarto ciclo de entendimiento: Expresión algebraica

El inciso 2 del problema fue planteado con el objetivo de que los estudiantes, a partir de casos particulares analizados en la solución del primer inciso, generaran modelos que sirvieran para cualquier situación similar. Se pretendió apoyar la generalización a partir de casos particulares. Los procedimientos construidos por la mayoría de los equipos para resolver el inciso 2 de la Actividad 2 les ayudaron a responder el inciso 4 del problema, simultáneamente. Los estudiantes pospusieron la solución del inciso 3.

Procedimiento algebraico recursivo. Los estudiantes del equipo 1 buscaron “la fórmula” para calcular la población de manatíes en cualquier periodo de tiempo. Plantearon una expresión algebraica (Figura 4.6) de tipo recursiva, donde a la población inicial de manatíes le sumaron el incremento de esa población al transcurrir un periodo (0.08). De acuerdo con sus procedimientos obtuvieron una nueva población (NM).

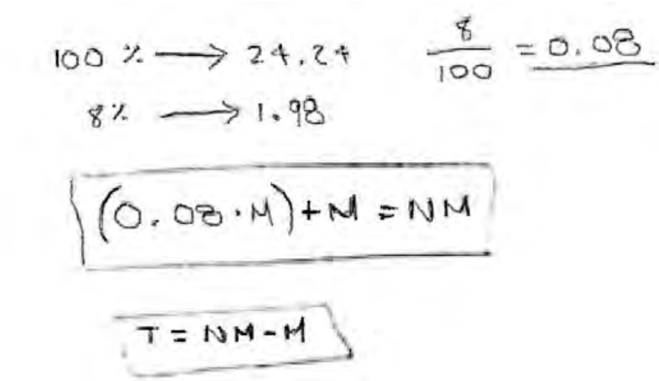


Figura 4. 6 Desarrollo de simbolismo algebraico del equipo 1.

El equipo 2 no propuso alguna expresión algebraica.

Procedimiento algebraico exponencial. Los equipos 3 y 4, a partir de los modelos recursivos que emplearon en su segundo ciclo de comprensión para resolver el inciso 1 del problema, emplearon una expresión algebraica de tipo exponencial. Para responder al inciso 2, reconocieron que el problema se parecía a un problema abordado semanas atrás y que la solución les serviría para responder el inciso 4. La expresión exponencial la tomaron de apuntes previos.

Identificaron que la población inicial de manatíes (23) era un factor constante y escribieron:

$$23(1+n)^{\wedge x}$$

La base $(1+n)$ es el incremento de la población determinada por la tasa de crecimiento. El exponente x es el periodo en el cual se desea conocer la población de manatíes (Figura 4.7). Los estudiantes incluyeron en su expresión el símbolo $\wedge$ para indicar que debían elevar la base a la potencia x, esto debido a que la tecla de la calculadora con ese símbolo les permitió realizar dicha operación.

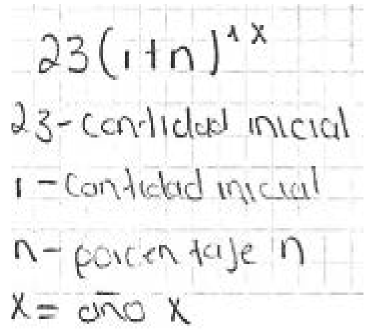


Figura 4. 7 Solución general empleando expresión exponencial del tema progresiones y sucesiones, equipo 3.

Una vez construida la expresión los estudiantes procedieron a sustituir los datos correspondientes: $n = 0.08, x = 10{,}20{,}30$ (Figura 4.8).

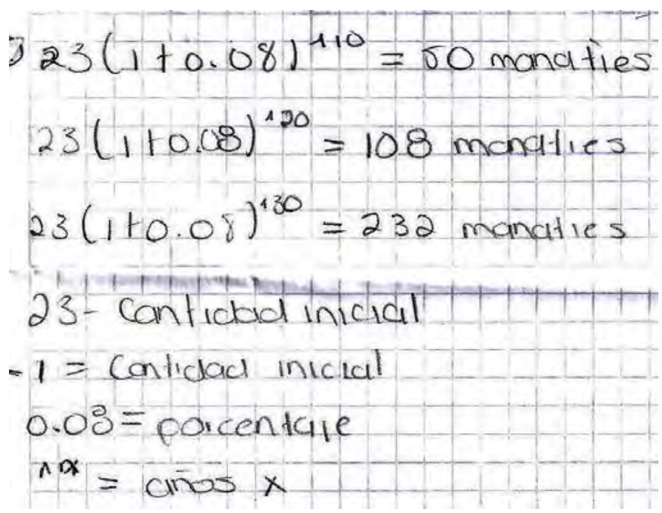


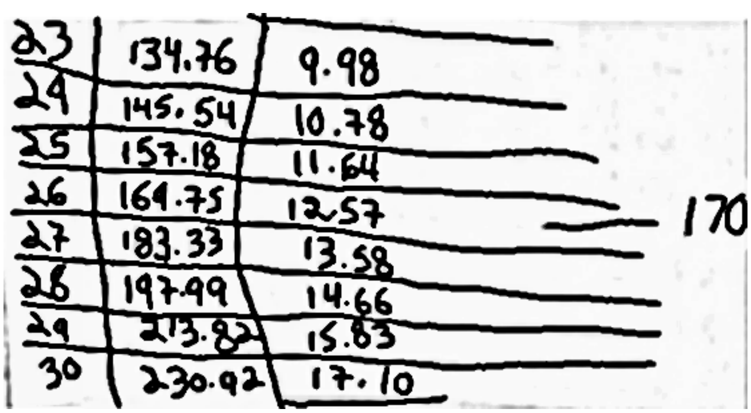
Figura 4. 8 Solución para periodos de 10, 20 y 30 años empleando expresión exponencial de conocimientos previos, equipo 3.

En la figura 4.8 se observa cómo los estudiantes obtuvieron las poblaciones que tendrían en el santuario para 10, 20 y 30 años.

4.2.1.5 Quinto ciclo de entendimiento: Razonamiento bidireccional

El objetivo del tercer inciso (¿En qué año alcanzará la población 170 manatíes?) como se mencionó en la metodología, era dar la oportunidad para que el estudiante reflexionara sobre varios aspectos. Primero que se diera cuenta de que tenía dos cantidades variando, las cuales dependían una de la otra: la población y el tiempo: *P* (*t*). La variación y dependencia podía observarse en la tabla y en la expresión algebraica construida por ellos. Segundo, se pretendía que los estudiantes observaran que a partir del dato *tiempo* podían determinar la *población*, pero también a partir del dato de la *población* podían o debían encontrar una manera para calcular el tiempo que tardarían los manatíes en reproducirse para lograr tener esa población.

El equipo 1 dio solución al inciso 3 de la actividad utilzando procedimientos numéricos recursivos (Figura 4.9). Para el periodo de 20 a 30 años los estudiantes del equipo 1 organizaron una tabla con tres columnas, donde representaron los periodos transcurridos, la población que se alcanzaba en determinado periodo y el incremento de la población necesario para obtener la población del siguiente periodo. Identificaron que el tiempo en el que el santuario alcanzaría 170 manatíes sería cerca de los 26 años, consecuencia de haber redondeado el resultado de la población final en sus procedimientos recursivos.



23	134.76	9.98
24	145.54	10.78
25	157.18	11.64
26	169.75	12.57
27	183.33	13.58
28	197.99	14.66
29	213.82	15.83
30	230.92	17.10

170

Figura 4. 9 Pensamiento bidireccional a partir de modelo tabular recursivo, equipo 1.

El equipo 2 continuó con su procedimiento lineal. Empleó ese razonamiento para encontrar que la población de 170 manatíes se alcanzaba a los 73 años (Figura 4.10).

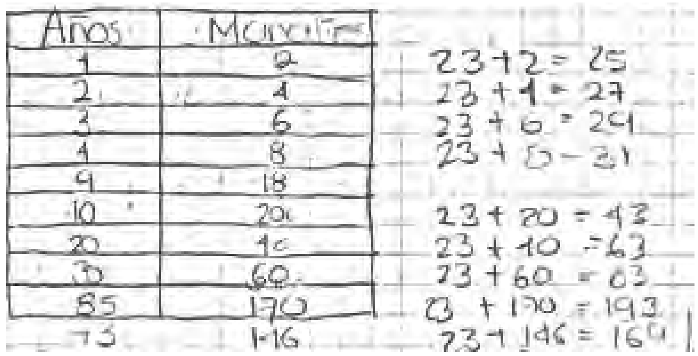


Figura 4. 10 Pensamiento reversible tabular de crecimiento lineal, equipo 2.

Los equipos 3 y 4 emplearon la “fórmula” construida (Figura 4.8). Explicaron “lo resolvimos al tanteo, íbamos cambiando los años, hasta que nos dio un valor cercano a los 170 manatíes que era a los 26 años. Se pasa un poco, pero si redondeamos quedaría en 170” (Figura 4.11).

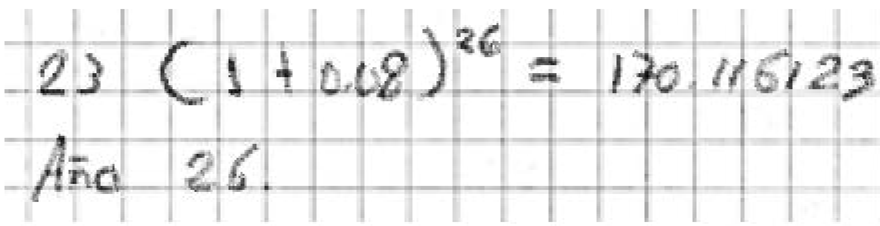


Figura 4. 11 Razonamiento bidireccional al tanteo empleando expresión algebraica, equipo 4.

En la expresión que se muestra en la figura 4.11 los estudiantes fueron sustituyendo diferentes valores numéricos (correspondientes a años) en el exponente hasta obtener una población cercana a los 170 manatíes que solicitaba el inciso 3 del problema 1.

El docente cerró la sesión cuando los estudiantes terminaron de resolver el inciso 3. Solicitó la elaboración de la carta como tarea para presentar en la segunda sesión. Dejó abierta la opción de realizarla en rotafolio o de forma digital[9].

4.2.1.6 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación de la primera y segunda actividad

[9] Con la palabra “forma digital” nos referimos a una presentación en formato de PowerPoint.

A partir de los procedimientos de los estudiantes para resolver la actividad 2, se observaron ciertos conocimientos previos. Por ejemplo, se encontró que los estudiantes poseían ciertas habilidades para identificar datos, incógnitas, variables y para construir relaciones entre éstas (tabulares por ejemplo). Lo cual se pudo observar cuando partieron de resolver la situación planteada para periodos cortos de tiempo (primer inciso de la actividad 2), inclusive podría mencionarse que identificaron ciertos patrones de comportamiento (construcción de modelo lineal y recursivo) y las relaciones entre la variación de la población con respecto al tiempo. No obstante, escribir de forma simbólica presentó dificultad para la mayor parte de los equipos, ya que sólo un equipo bosquejó una expresión algebraica a partir de su propio análisis recursivo y por lo tanto comprendió el origen de ésta. Otros dos equipos también bosquejaron una expresión algebraica pero no surgió a partir de su análisis numérico, sino como un algoritmo memorizado.

Se observó que la mayoría de los estudiantes tenía cierta comprensión de los conceptos de razón, proporción y tasa de cambio porque todos los equipos lograron identificar la tasa de crecimiento anual, aunque los equipos 2 y 4 no lograron explicar su procedimiento. Al parecer la regla de tres simple fue un algoritmo de rutina empleado anteriormente, por el equipo 2, para resolver actividades similares a ésta.

A pesar de que los estudiantes no mostraron conocimiento de la función logarítmica, manifestaron habilidades de razonamiento bidireccional al resolver el inciso 3 empleando las representaciones tabulares y algebraicas desarrolladas por ellos mismos.

Además se observó en los estudiantes ciertas habilidades en la descripción, interpretación y explicación verbal de situaciones donde intervienen los conceptos antes mencionados. En las evidencias se pueden apreciar solamente procedimientos numéricos debido a que se les dificultaba plasmar de forma escrita sus ideas.

A continuación se presenta un resumen de los niveles de entendimiento que mostraron los estudiantes antes de la discusión grupal (Tabla 4.1, columna 2) generada para analizar los procedimientos emprendidos para resolver la actividad 2 y se describe cada uno de los ciclos, de acuerdo con los conocimientos (Tabla 4.1, columnas 4, 5, 6 y 7):

Ciclos de entendimiento		**Conocimientos y habilidades exhibidos por los estudiantes**	**Equipos**			
			1	**2**	**3**	**4**
1	**Cualitativo**	Descripción	Reconocieron el contexto del problema	Reconocieron el contexto del problema	No reconocieron el contexto del problema	Reconocieron el contexto del problema
2	**Representación numérica**	Determinación de la tasa de cambio	Utilizaron proporciones	Utilizaron "Regla de tres simple"	Utilizaron "Regla de tres simple"	Utilizaron proporciones
		Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio	Realizó análisis y utilizó cantidades decimales. Redondeó la población final.	Redondeó de la tasa de cambio	No hubo análisis	No hubo análisis
3	**Identificación de patrones**	Identificación de variables y dependencia	Sí	Sí	Sí	Sí
		Método utilizado	Numérico recursivo tabular para incisos 1 y 2	Lineal para 1 y 2	Numérico recursivo para inciso 1	Numérico recursivo para inciso 1
4	**Generalización**	Planteamiento de expresión	Expresión recursiva	No	Expresión exponencial	Expresión exponencial
5	**Razonamiento bidireccional**	Modelo a partir del que dieron solución	Tabular recursivo	Tabular lineal	Expresión exponencial	Expresión exponencial

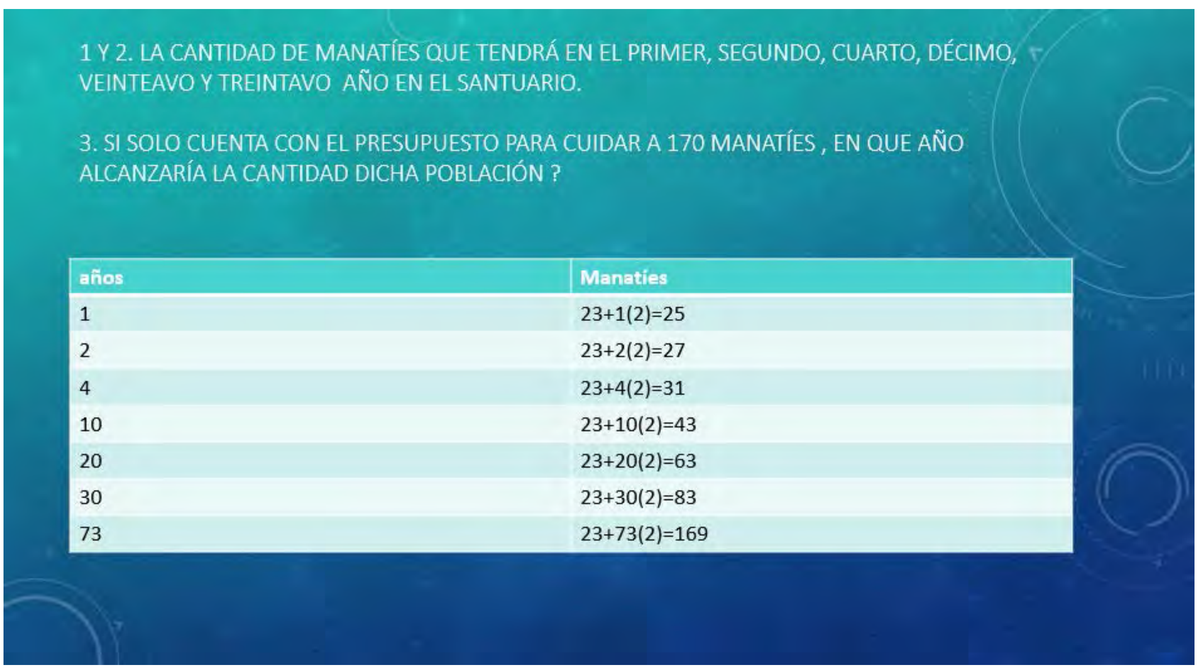
Tabla 4. 1 Resumen de resultados derivados de la implementación de la primera y segunda actividad

En la implementación de las actividades 1 y 2 se observó que el 75% del grupo reconoció el contexto del problema, es decir, se sintió familiarizado con él, ya que conocían a los manatíes. Con respecto a determinar la tasa de cambio sólo el 50% utilizaron proporciones. El 50% analizó las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio. El 100% del grupo identificó variables de los cuales el 75% utilizó un procedimiento numérico recursivo y el 25% utilizó un procedimiento lineal. El 100% del grupo generó un razonamiento bidireccional pero 0% empleó los logaritmos.

4.2.1.7 Presentación de modelos, retroalimentación y evaluación, así como de conceptos matemáticos inmersos en ellos

En la segunda sesión se generó la discusión grupal, con base en los procedimientos construidos para resolver la actividad 2. Expusieron tres de los cuatro equipos en el siguiente orden: 2, 1 y 4. El orden fue decidido por el docente en función de discutir los diferentes modelos, del más burdo al más complejo: *El modelo lineal, el modelo recursivo y el modelo exponencia*l construido. Debido a que los equipos 3 y 4 tenían procedimientos similares sólo se le solicitó a uno que expusiera.

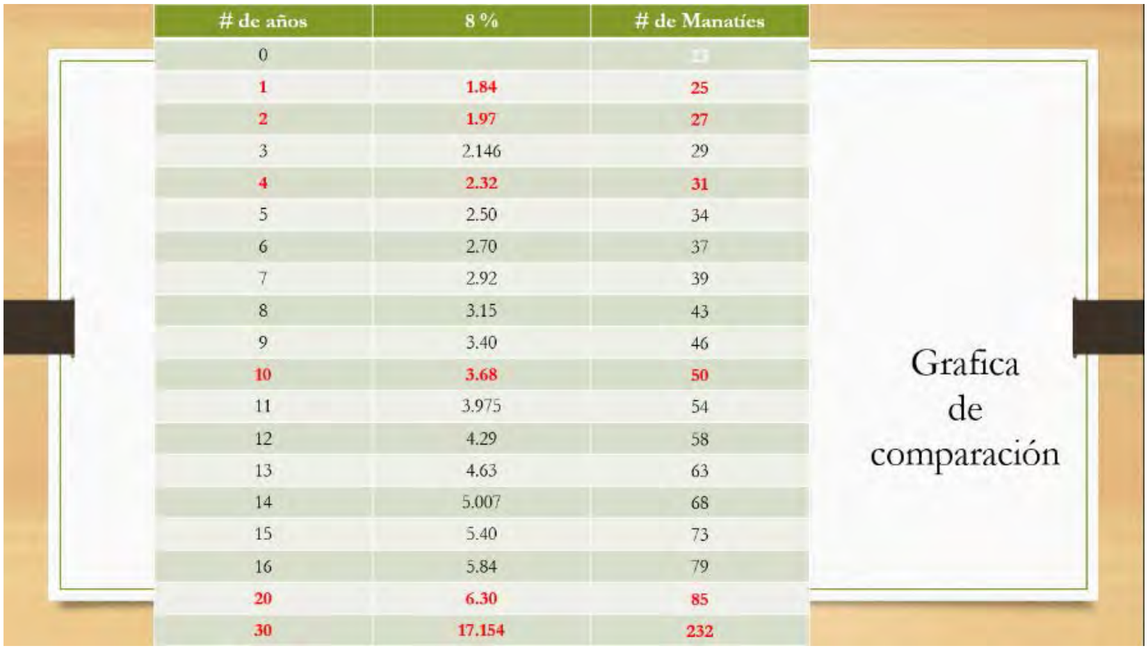
El modelo lineal. El equipo 2 presentó y explicó su procedimiento en el aula (Figura 4.12). El docente generó reflexión sobre éste y el equipo recibió retroalimentación de los otros equipos. La observación general que recibieron fue que el 8% lo pudieron haber calculado utilizando la población de cada periodo antes de obtener la nueva población; por lo tanto, la cantidad de manatíes nacidos en cada periodo no era constante. El equipo 2 no logró comprender las ideas.



años	Manatíes
1	23+1(2)=25
2	23+2(2)=27
4	23+4(2)=31
10	23+10(2)=43
20	23+20(2)=63
30	23+30(2)=83
73	23+73(2)=169

Figura 4. 12 Tabla de datos elaborada por el equipo 2 en PowerPoint

El modelo algebraico recursivo. Se continuó con la presentación del equipo 1, quien también realizó una presentación digital. Explicó el procedimiento tabular recursivo antes descrito[10]. El equipo 1 explicó que aunque no incluyó en su presentación (Figura 4.12) la cantidad de manatíes que resultarían para los periodos entre 20 y 30 años, tuvo que calcularlos pues siempre requerían conocer la población al principio del periodo para conocer la del final.



# de años	8 %	# de Manatíes
0		[illegible]
1	1.84	25
2	1.97	27
3	2.146	29
4	2.32	31
5	2.50	34
6	2.70	37
7	2.92	39
8	3.15	43
9	3.40	46
10	3.68	50
11	3.975	54
12	4.29	58
13	4.63	63
14	5.007	68
15	5.40	73
16	5.84	79
20	6.30	85
30	17.154	232

Figura 4. 13 Tabla de datos elaborada por el equipo 1 en PowerPoint

El equipo explicó que para resolver el inciso 2 de la Actividad 2, usaron el mismo procedimiento empleado para resolver el primer inciso (Figura 4.13). Requirieron conocer la población al final del tercer periodo, aunque no se les solicitó, para poder calcular la población al final del cuarto periodo. Con color rojo marcaron las poblaciones solicitadas en la Actividad 2 (Figura 4.14). Dijeron que en el año 26 se alcanzaría la población de 170 manatíes.

[10] Sección 4.2.1.3 Tercer ciclo de entendimiento: Identificación de patrones.

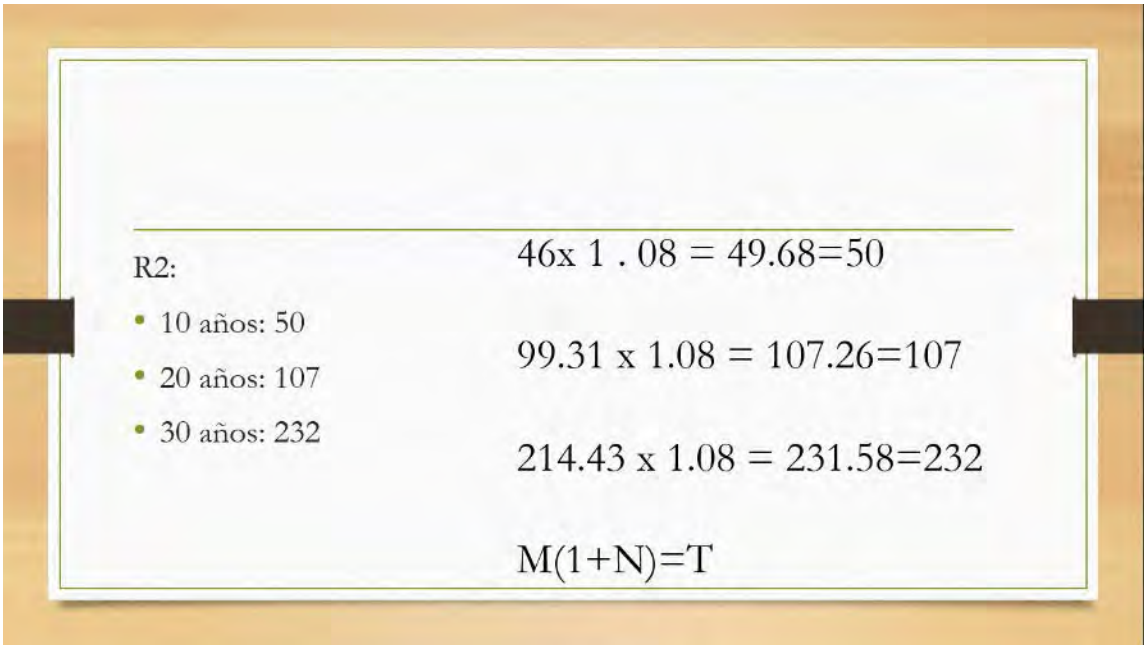


Figura 4. 14 Exposición de forma numérica recursiva empleado por equipo 1.

Al presentar la solución para el inciso 4 de la Actividad 2 (Figura 4.15), el equipo 1 mostró una expresión diferente a la que habían generado en su modelo original. En lugar de escribir $T = MN + M$ los estudiantes escribieron $M(1.08) = T$.

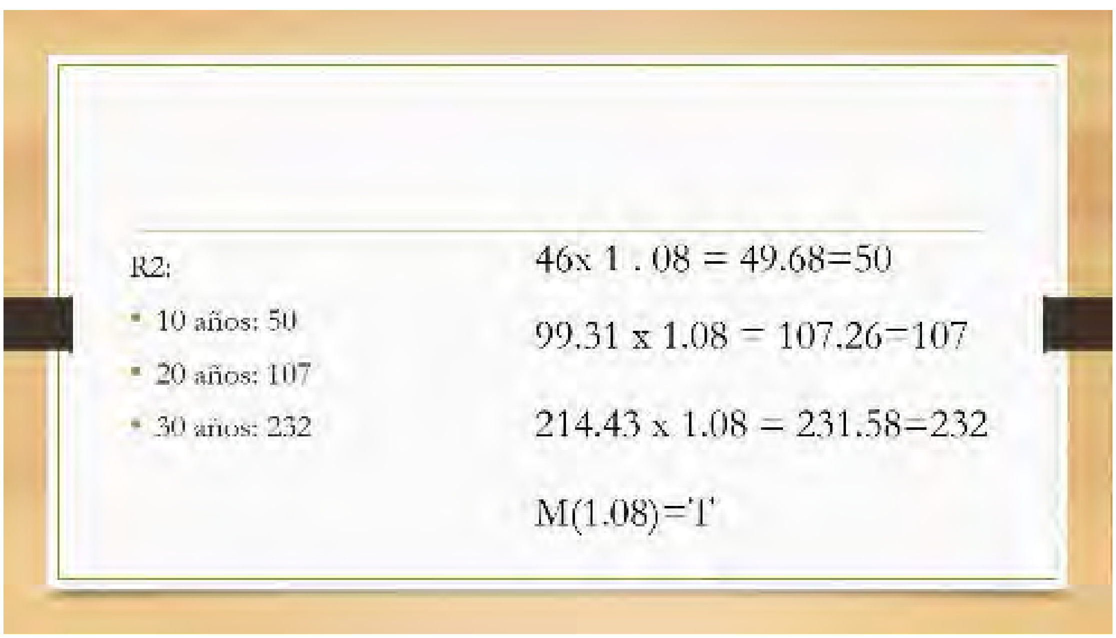


Figura 4. 15 Modificación de expresión algebraica generada por el equipo 1.

El equipo 1 expresó verbalmente “que habían construido inicialmente una fórmula $T = MN + M$, pero que la pudieron descomponer y finalmente les quedó de la forma $M(1.08) = T$”. Al finalizar la presentación un estudiante preguntó “¿De dónde salió el 1.08?”, para lo cual el equipo repitió la explicación anterior. El docente solicitó al equipo aclarar su respuesta. El equipo escribió la expresión $M(1.08) = T$ y desarrolló la expresión para mostrar que $T = MN + M$ era igual a $T = 0.08M + M$ y por lo tanto $M(1.08) = T$. El grupo manifestó haber comprendido el procedimiento, su dificultad había estado relacionada con la factorización.

El modelo algebraico exponencial. El equipo 4 no preparó su presentación en formato digital. Emplearon plumones y pintarrón para su exposición. Expusieron cómo resolvieron el inciso 1 del problema explicando que emplearon la “regla de tres simple” (Figura 4.16). Obtuvieron que el incremento para la población de manatíes en el primer año sería 1.84, lo sumaron a la población inicial del periodo (23) y el resultado fue 24.84; encerraron ambas cantidades (Figura 4.16). Su procedimiento lo señalaron con el número 1. De la misma manera escribieron sus operaciones para obtener la población de manatíes en los periodos 2, 3 y 4 (26.82, 28.96 y 31.27).

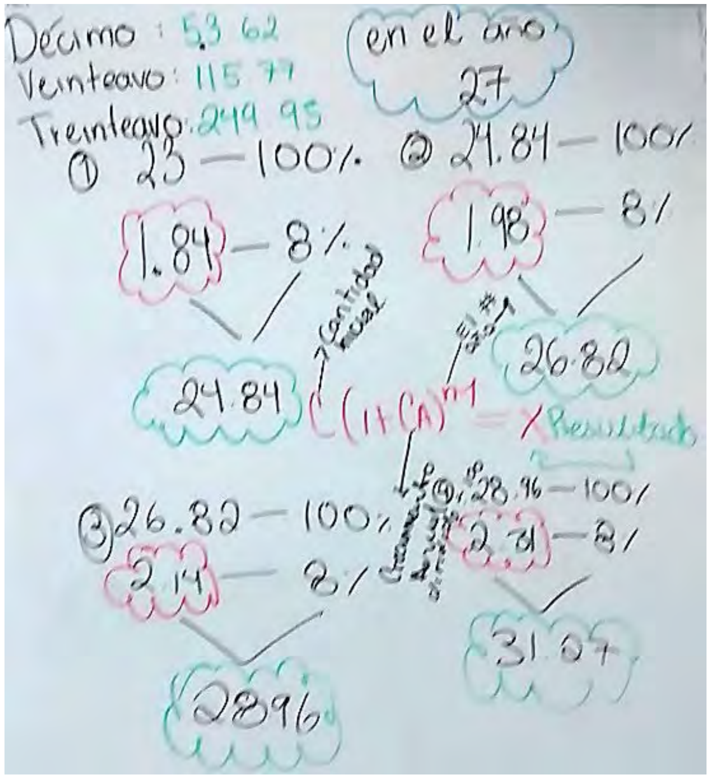


Figura 4. 16 Exposición del equipo 4 empleando "regla de tras simple" y solución general a partir de expresión exponencial del tema progresiones y sucesiones.

El equipo 4 expuso que la razón por la cual emplearon la expresión utilizada para resolver el segundo inciso del problema: $C(1+CA)^{n-1}$ fue que se parecía a un problema antes resuelto (Figura 4.16). Los estudiantes explicaron y escribieron qué representaba cada término de la expresión empleada: C cantidad inicial; CA crecimiento anual de manatíes; n el número de año.

La población que tendrían para los periodos solicitados en el inciso 2 del problema 1 (décimo: 53.62, veinteavo 115.77, treintavo 249.95) los escribieron arriba de los procedimientos realizados (parte superior izquierda de la Figura 4.16). Finalmente explicaron, que para encontrar el año en el cual se alcanzarían 170 manatíes en el santuario, inciso 3 de la actividad 2, fueron sustituyendo en la expresión diferentes periodos hasta que encontraron un valor cercano al solicitado (170).

En seguida se inició la discusión grupal:

> Integrante del equipo 1: ¿Por qué les da que en 27 años alcanzan los 170 manatíes? Son 26 años [El estudiante que había empleado un método recursivo mostró interés en el uso de la expresión exponencial]
>
> Integrante del equipo 4: Porque la fórmula así lo pide, de los años que son, hay que restarle uno, si da 26, pero después de restarle uno [El estudiante evidenció que su respuesta provenía de un algoritmo aprendido de memoria, el cual se le dificultó explicar].
>
> Docente: ¿Puedes explicarnos por qué el exponente representa los años transcurridos de los cuales se desea conocer la población?
>
> Integrante del equipo 4: La verdad no recuerdo, pero la fórmula es así.
>
> Docente: ¿La expresión que empleaste funciona para los periodos cortos del primer inciso?
>
> Integrante del equipo 4: Sí, sí funciona.
>
> Docente: Ayúdanos a calcular la población para el primer año usando tu expresión por favor, que cada quien lo verifique con sus calculadoras.
>
> Integrante del equipo 4: No me da lo mismo.
>
> Docente: ¿Los demás qué resultados tenemos?
>
> Integrante equipo 2: Da diferente, se corre un lugar los resultados [Se refería a que no era necesario restarle una unidad al exponente. Este estudiante había resuelto de forma lineal la actividad 2].
>
> Integrante equipo 3: Es que la diferencia es porque en el problema que resolvimos con el otro maestro, las cantidades eran al principio del mes y en cambio en este lo calculamos para el final del año, por eso no se debe restar [El estudiante trató de dar significado a la expresión exponencial en términos de la actividad 2].

Al término de la discusión grupal, el docente apoyó a los estudiantes para que a partir del modelo recursivo reconstruyeran la expresión exponencial que ya habían identificado y la comprendieran.

De acuerdo con la información proporcionada por el problema, el docente simbolizó la población inicial como $M_0 = 23$.

El docente preguntó al grupo cómo representarían la población al final del primer periodo, a lo cual un estudiante respondió "M_1". El docente y el grupo utilizaron la expresión $M(1.08) = T$ y reescribieron el procedimiento recursivo de la siguiente manera:

$$M_1 = M_0(1.08) = 24.84$$

$$M_2 = M_1(1.08) = 26.83$$

M_2 lo reescribieron en términos de M_0

$$M_2 = M_0(1.08)(1.08) = 26.83$$

$$M_2 = M_0(1.08)^2$$

Al observar esta expresión algebraica los estudiantes del grupo comprendieron de dónde procedía el exponente de la expresión exponencial $C(1+CA)^{n-1}$ y corroboraron que debía ser n tal como un integrante del equipo 3 lo propuso.

El docente aprovechó el contexto de los procedimientos utilizados por los estudiantes al resolver la actividad 2 para explicar brevemente los conceptos de razón, proporción, tasa de cambio, función exponencial y logarítmica.

Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual a partir de las ideas discutidas en clase, además se les entregó el problema *Manatíes enfermos* para que lo resolvieran de forma individual. El proceso de solución se discutió en la siguiente sesión.

4.2.1.8 Análisis del trabajo individual de los estudiantes, posterior al trabajo en equipo y discusión grupal nuevamente de las actividades 1 y 2

50% del grupo inició resolviendo la actividad 2 empleando modelos numéricos (estudiantes A, B, C, F y G). Un estudiante incluyó una nota indicando “Razón: Relación de 2#. Proporción: Relación de 2 razones” (Figura 4.17, derecha). El otro 50% del grupo no incluyó sus operaciones numéricas en sus procedimientos. A continuación se describen con más detalle los modelos emprendidos para cada inciso.

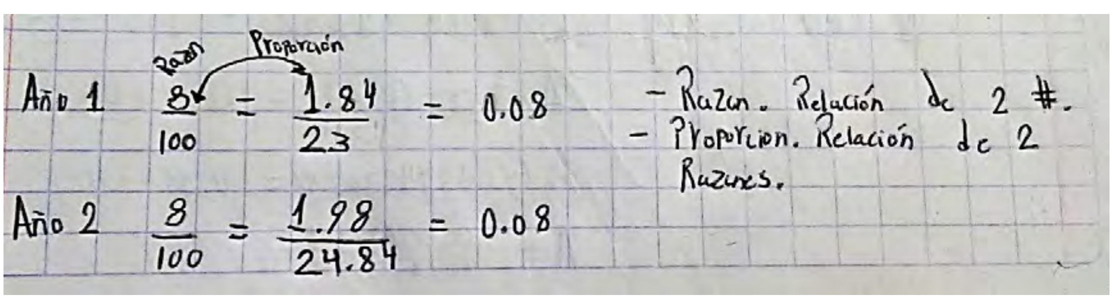


Figura 4. 17 Empleo de modelo numérico comparando razones.

Primer inciso. El 40% del grupo (estudiantes A, C, F, G) reportó procedimientos *numéricos* para resolver el inciso 1 de la actividad 2, al parecer buscaron justificar la posterior inclusión de una expresión algebraica para resolver el inciso 1 de la actividad 2. Los estudiantes A y C lo hicieron empleando expresiones recursivas (Figura 4.17).

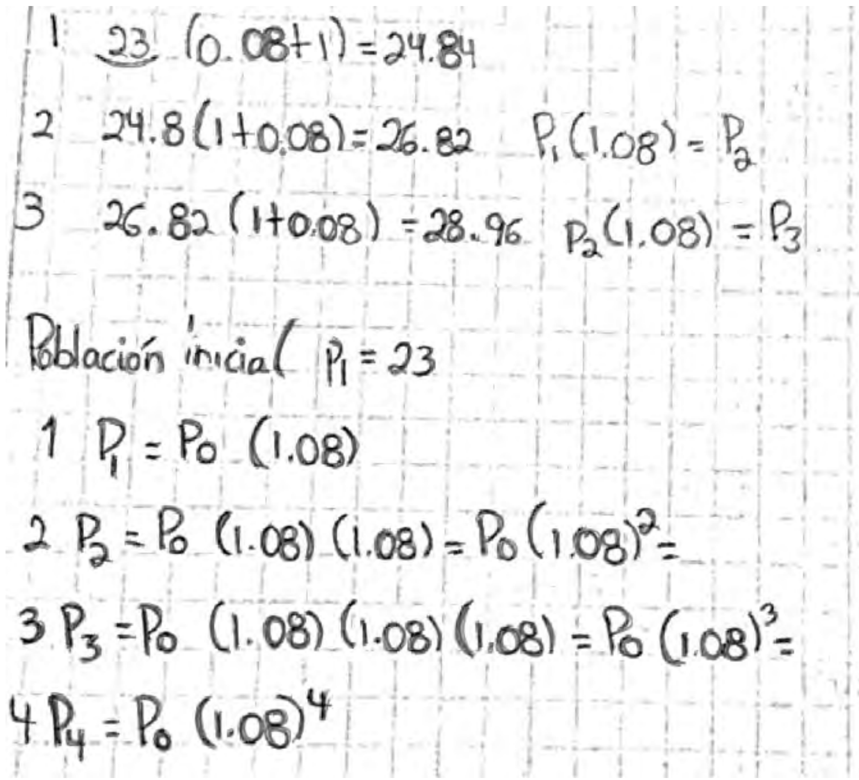


Figura 4. 18 Búsqueda de patrones en solución de primer inciso.

En sus procedimientos (Figura 4.18) presentaron en forma factorizada la cantidad correspondiente a la población al principio del periodo:

$23(0.08+1)=24.84$

$24.84(0.08+1)=26.82$

$26.82(0.08+1)=28.96$

Su representación fue *algebraica recursiva*, ya que la población al final del periodo dependía de la población al inicio del periodo. P_0 era la población inicial, P_1 la población al final del primer año, P_2 la población al final del segundo año y así sucesivamente. Subyacente a sus procedimientos existía la variable P_n: donde P representaba la población y n el periodo al que correspondía dicha población.

$$P_1(1.08) = P_2$$
$$P_2(1.08) = P_3$$

Partiendo de esta expresión algebraica recursiva, los estudiantes calcularon la población al final de cualquier periodo a partir de la población inicial.

$$P_0 = 23$$
$$P_1 = P_0(1.08)$$
$$P_2 = P_0(1.08)(1.08) = P_0(1.08)^2$$
$$P_3 = P_0(1.08)(1.08)(1.08) = P_0(1.08)^3$$

Para calcular la población del cuarto periodo sólo presentaron una expresión exponencial en la que existía una relación entre el exponente de ésta y el periodo que en el cual se evaluaba.

$$P_4 = (1.08)^4$$

Los estudiantes F y G, por su parte, emplearon también un modelo numérico recursivo apoyado por la "regla de tres simple[11]" (Figura 4.19).

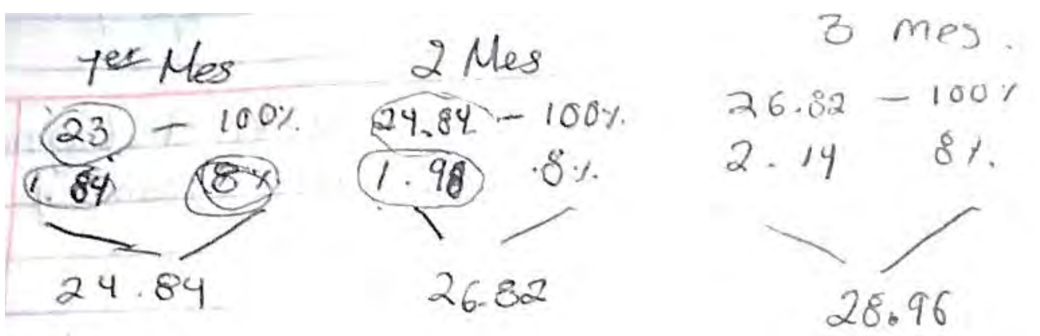


Figura 4. 19 Procedimiento numérico recursivo para primer inciso.

El 60% del grupo (estudiantes B, D, E, H, I, J) resolvió el inciso 1 de la actividad 2 empleando la *expresión exponencial* que surgió de la discusión en clase. Señalaron

---

[11] Apartado 4.2.1.2 Segundo ciclo de entendimiento: Representación numérica y numérica tabular.

qué representaba cada uno de los elementos de ésta (Figura 4.20), si correspondían a constantes o variables y en su caso si a la variable independiente o dependiente.

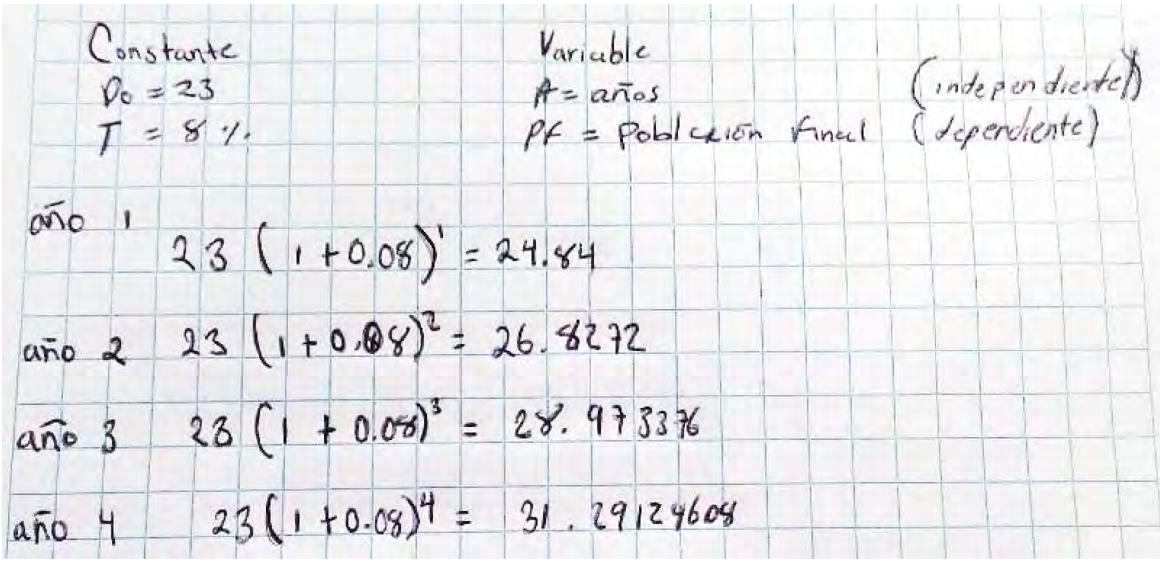


Figura 4. 20 Empleo de modelo algebraico para primer inciso: Expresión exponencial.

Segundo y cuarto inciso. Para la resolución del segundo y cuarto inciso, el 90% del grupo emplearon el modelo algebraico exponencial (Figura 4.21) y lo explicaron verbalmente.

- Descripción cualitativa del estudiante B para el cuarto inciso, implicó generalización: "Para la cuatro se usa el mismo solos [*sic*] se sustituyen las constantes por los deseados"
- Descripción cualitativa del estudiante H para el cuarto inciso, implicó generalización: "Se usa la misma fórmula sólo se cambia el número de pob [*sic*] inicial y la tasa".

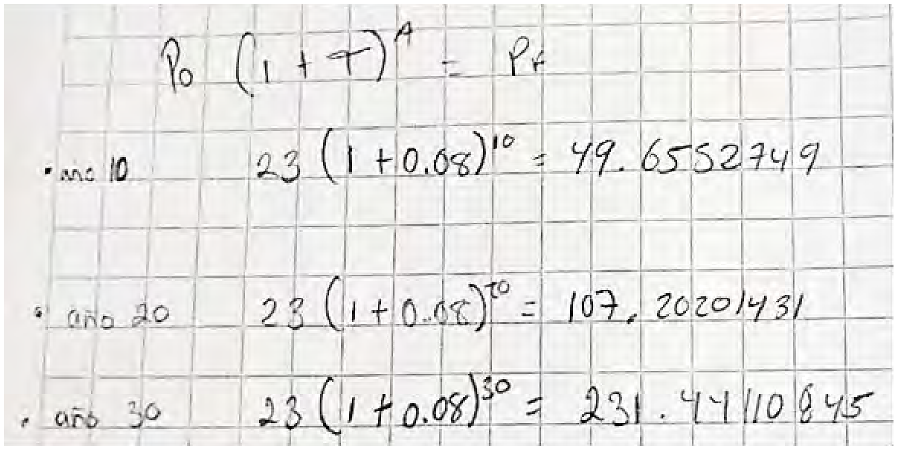


Figura 4. 21 Empleo de modelo algebraico para segundo y cuarto inciso: Expresión exponencial.

Tercer inciso. Como solución al tercer inciso, 60 % del grupo (A, B, C, D, E y J) emplearon logaritmos para despejar el tiempo en el cual se alcanzaría la población de 170 manatíes (Figuras 4.22).

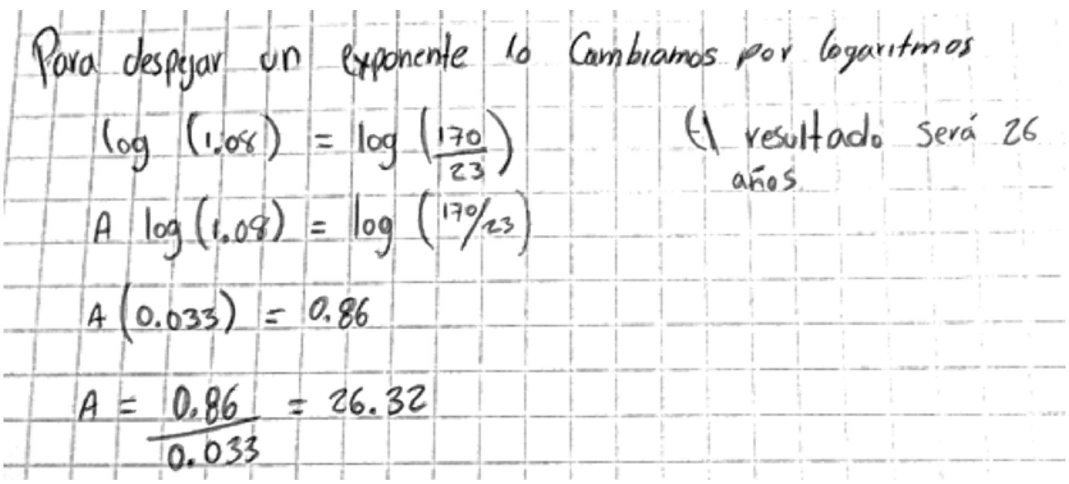


Figura 4. 22 Respuesta de estudiante B para tercer inciso: Empleo de logaritmos. "Para despejar un exponente lo cambiamos por logaritmos"

40% del grupo (F, G, H, I) resolvieron el inciso 3 de la actividad 2 al tanteo[12], pero empleando la expresión exponencial (Figura 4.23). Ejemplo de este tipo de solución es la respuesta del estudiante I para el tercer inciso. Empleó la expresión exponencial

[12] *Sección 4.2.1.5 Sexto ciclo de entendimiento: Razonamiento bidireccional*

y la evaluó para diferentes cantidades numéricas al tanteo: "A los 26 años alcanzará su máximo el límite para cuidar manatíes, es simple con la regla de arriba”.

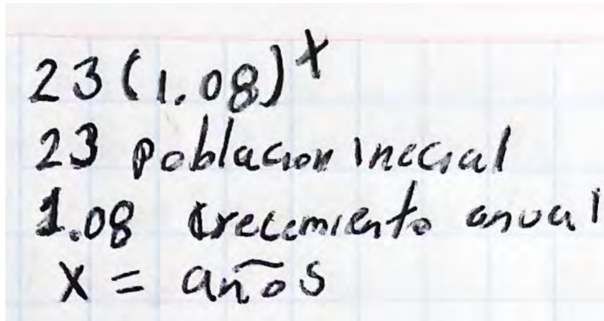


Figura 4. 23 Respuesta de estudiante I para el tercer inciso de la Actividad 2.

El uso de modelos empleados por los estudiantes y explicados en los párrafos anteriores se resume en la Tabla 4.2. En la primera fila se indican los conocimientos y habilidades exhibidas por los estudiantes al resolver la actividad 2 y en las siguientes diez filas se hace una descripción breve por estudiante (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J).

Conocimientos y habilidades exhibidos por los estudiantes		Determinación de la tasa de cambio	Análisis de la tasa de cambio	Método numérico utilizado	Planteamiento de expresión algebraica	Modelo empleado en el razonamiento bidireccional
Estudiantes	A	Utilizaron proporciones	Observaron que era creciente y manejaron números enteros	Expresión recursiva	Expresión recursiva	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	B	Utilizaron proporciones	Análisis de la tasa de cambio	Ninguno	Planteamiento de expresión algebraica	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	C	Utilizaron proporciones	No hubo análisis	Expresión recursiva	Expresión recursiva	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	D	No se cuenta con información	No hubo análisis	Ninguno	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	E	No se cuenta con información	No hubo análisis	Ninguno	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	F	Utilizaron proporciones	No hubo análisis	Numérico recursivo para inciso 1	Expresión exponencial	Prueba y error a partir de expresión algebraica de la función exponencial
	G	Utilizaron proporciones	No hubo análisis	Numérico recursivo para inciso 1	Expresión exponencial	Prueba y error a partir de expresión algebraica de la función exponencial
	H	No se cuenta con información	No hubo análisis	Ninguno	Expresión exponencial	Prueba y error a partir de expresión algebraica de la función exponencial
	I	No se cuenta con información	No hubo análisis	Ninguno	Expresión exponencial	Prueba y error a partir de expresión algebraica de la función exponencial
	J	No se cuenta con información	No hubo análisis	Ninguno	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica

Tabla 4. 2 Conocimientos y habilidades por estudiantes para actividad Ayuda a Saori como tarea extra clase.

Posterior al trabajo en equipo y la discusión grupal, los estudiantes entregaron el trabajo de forma individual. Se observó cierto desarrollo en habilidades como la descripción, interpretación y explicación de situaciones donde interviene la función exponencial y sus conceptos asociados, pero de forma escrita (sección 4.2.1.7). Ésto no se había observado en el desarrollo de la actividad en forma grupal. Por ejemplo en algunos de sus modelos de solución los estudiantes explicaron en qué consistían los procedimientos realizados y argumentaron sus resultados.

4.2.2 Actividad 3. Modelación de una Actividad de decrecimiento poblacional que implica una función exponencial decreciente de la forma $f(x) = k(1+c)^x$ donde $x \in Z^+, k = 153, c = -0.30$

La tarea fue entregada por 8 de los 10 estudiantes del grupo (estudiantes A, B, C, D, F, H, I, J). En seguida se describen los procedimientos utilizados por los estudiantes. Nos referiremos a estos ocho estudiantes como el 100% en los siguientes párrafos.

Identificación de datos y variables. El 100% de los estudiantes identificó los datos y lo que representaba cada uno de ellos en el contexto del problema, sólo el 12.5% lo explicitó (estudiante A). Por ejemplo, en la Figura 4.24 se observa que el estudiante intentó explicar verbalmente una relación proporcional entre la población para la cual debían generar el modelo y la razón de cambio encontrada “Pero namas tengo 153 y no llego a 250 cómo le restaría los 75”.

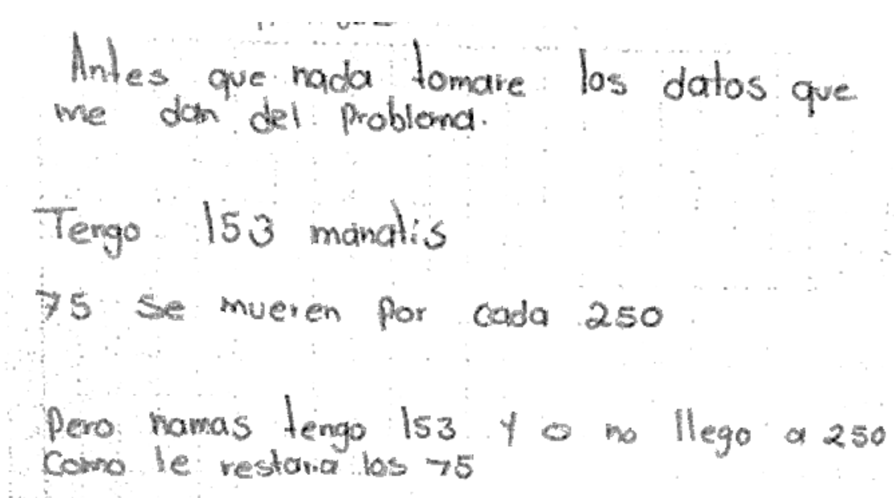


Figura 4. 24 Análisis cualitativo Actividad 3. Estudiante A.

Identificación de tasa de cambio. El 63% del grupo (A, B, C, F y H) calculó la tasa de decremento de la población para el primer año a partir de la población inicial de los manatíes empleando proporciones, el otro 37% no la calculó.

Los estudiantes B, C, F y H, calcularon la tasa de cambio entre los manatíes muertos con respecto a una población total. Un procedimiento que representa los modelos desarrollados fue el del estudiante C (Figura 4.25). El resultado que obtuvieron (*0.3*) al calcular la razón de 75 de 250 lo multiplicaron por 100. Determinaron así la tasa de decremento en la población de los manatíes como “30% anual”. Su forma de explicar que dicho porcentaje era igual a $\frac{30}{100}$ fue mediante una flecha.

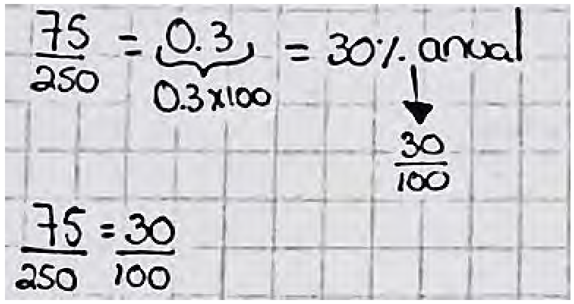


Figura 4. 25 Cálculo de la tasa de decremento para Actividad 3. Procedimiento 1

El estudiante A empleó un procedimiento diferente. Calculó la tasa de decremento de la población a partir de la población inicial de los manatíes planteando diferentes razones que fueran proporcionales (Figura 4.26). El estudiante observó la existencia de una relación entre la cantidad de manatíes muertos (75 manatíes) sobre cierta población (250 manatíes); dividió ambas cantidades entre 5, obteniendo una nueva razón de 15 manatíes muertos sobre una población de 50 (Figura 4.26, mitad superior). El estudiante multiplicó la razón de 15 por 4, 3 y 2 (60, 45 y 30). Posiblemente su finalidad fue encontrar la relación de manatíes que mueren de una población de 100 manatíes (Figura 4.26, mitad inferior).

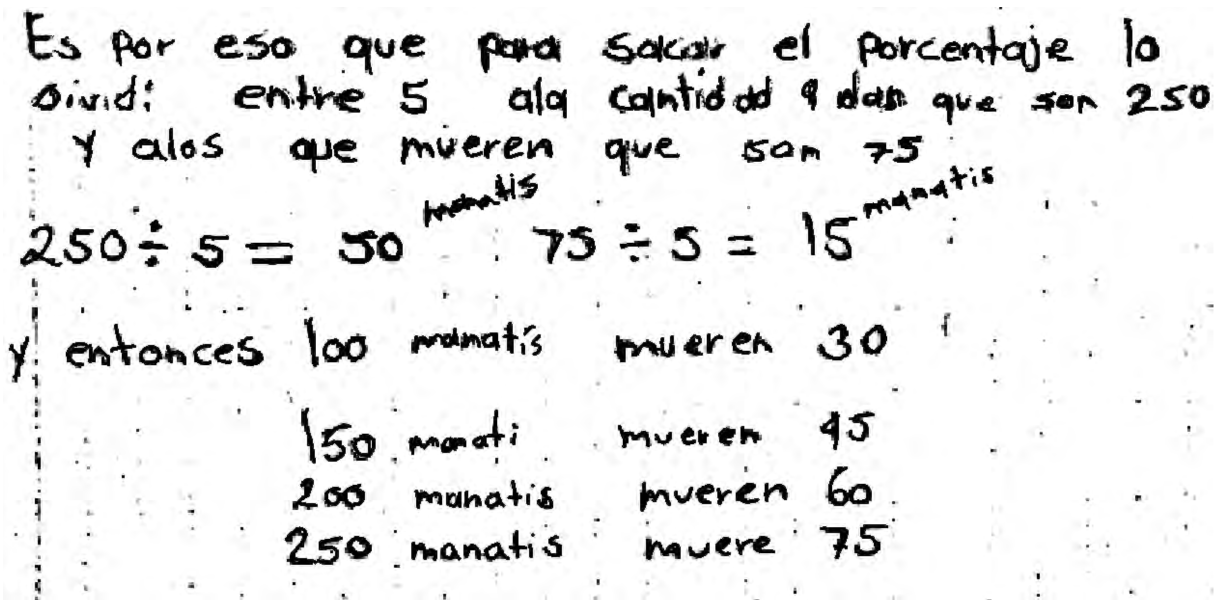


Figura 4. 26 Cálculo de la tasa de decremento para Actividad 3. Procedimiento 2.

Por otra parte el 38% (estudiantes D, I, J) restante de los estudiantes no presentó algún procedimiento en el que se especificara cómo determinaron la tasa de cambio decreciente para la Actividad.

Identificación de Modelo exponencial. El 12.5% del grupo (Estudiante A) explicó que para calcular la población al final del primer periodo debía calcular el decremento del 30% sobre la población que obtuvo al inicio del periodo (Figura 4.30, extremo superior):

$$153 + 153 \times .30$$

Posiblemente el estudiante A observó que el procedimiento era similar al surgido en la Actividad 2 y erróneamente en esta parte de su procedimiento el decremento lo sumó en lugar de restarlo.

En el modelo se observa el intento de explicar la factorización: “para el 153 lo sustituimos por el uno”:

$$153(1-.30)^{a}$$

Se observa en el procedimiento que el estudiante continuó observando similitudes con procedimientos surgidos en la Actividad 2, por lo que agregó un exponente (a), que no explicó por el momento (Figura 4.27, centro). Algo relevante fue que el estudiante A corrigió la suma que debió surgir como la base de su procedimiento inicial, por una resta, posiblemente reconociendo que se trataba de una situación de decrecimiento exponencial aunque no lo expresó directamente. Terminó el procedimiento explicando que el valor de la base de su expresión exponencial era 0.70 al realizar la resta dentro del paréntesis: "y se resta lo del paréntesis que quedaría .70"

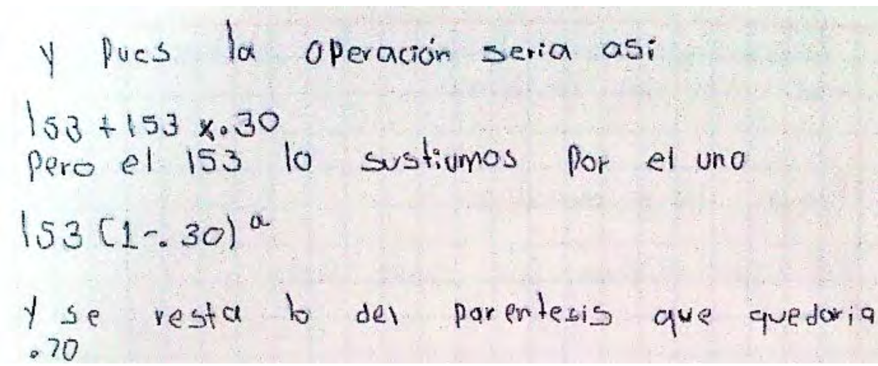


Figura 4. 27 Identificación de patrones para Actividad 3. Procedimiento único.

El 100% del grupo (Todos los estudiantes que entregaron la Actividad) logró construir la expresión algebraica exponencial que describía la situación. Sólo el estudiante C explicó la similitud que observó con la expresión de la Actividad 2 (Figura 4.28), donde identificó que era una situación de decremento poblacional y restó la tasa en lugar de sumarla.

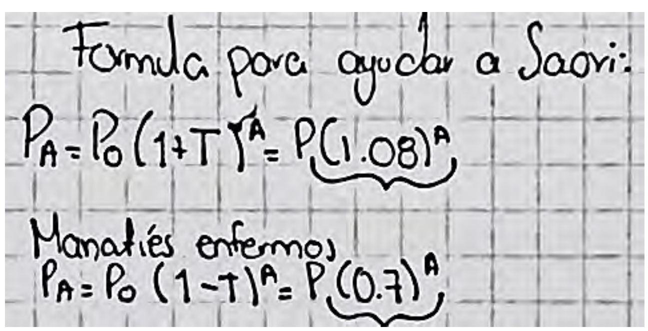


Figura 4. 28 Generalización para Actividad 3. Procedimiento 1.

Los estudiantes B, D, H, I y J explicaron los elementos de la expresión algebraica exponencial que emplearon. Se ejemplifican dichos modelos con el realizado por el estudiante H (Figura 4.29).

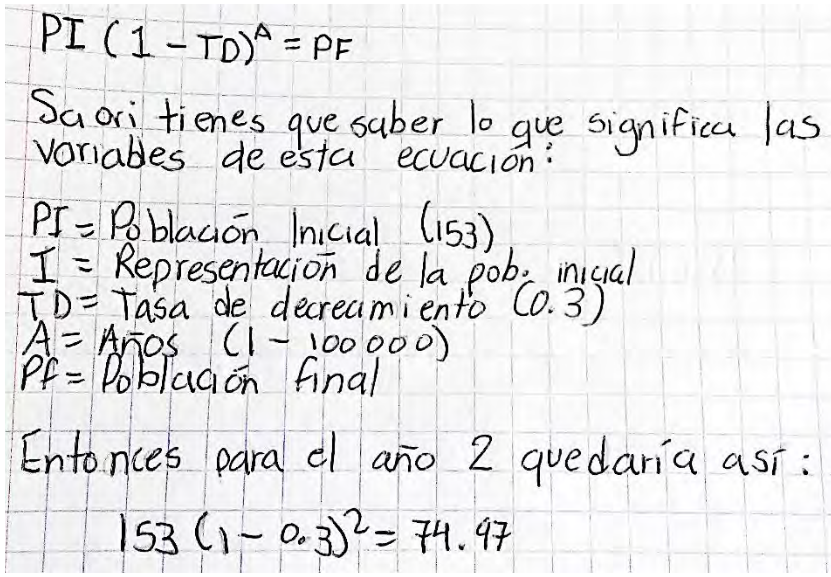


Figura 4. 29 Generalización para Actividad 3. Procedimiento 2.

El estudiante H presentó en su procedimiento (Figura 4.29) la expresión algebraica siguiente:

$$PI(1-TD)^{A} = PF$$

Y explicó lo que representaba cada uno de los elementos de la expresión.

$PI = Población\ inicial\ (153)$

$1 = Representación\ de\ la\ \ población\ inicial$

$TD = Tasa\ de\ crecimiento\ (0.3)$

$A = Años\ (1-100\,000)$

$PF = Población\ \ final$

El estudiante identificó que la expresión algebraica planteada le era útil para resolver éste y otros problemas similares; es decir, observó que había variables en su expresión algebraica y escribió al respecto en su carta: "Saori tienes que saber lo que significa las variables de esta ecuación" (Figura 4.29). El estudiante indicó en paréntesis los valores que correspondían a cada variable de acuerdo con el problema. Trató de expresar que el tiempo (A) era una variable cuyo rango de valores podía estar entre el 1 y el 100 000: $A = Años\ (1 - 100\ 000)$

Pensamiento bidireccional. 25% del grupo (estudiantes H, I) no reportó solución al inciso 3. 75% del grupo si lo hizo y se describen sus procedimientos a continuación mediante el uso de logaritmos y el despliegue de cálculos a manera de tabla de datos, ambos con el uso del modelo algebraico exponencial.

37.5% del grupo (estudiantes A, C y F) intentó resolver la Actividad empleando la función logarítmica (Figura 4.30).

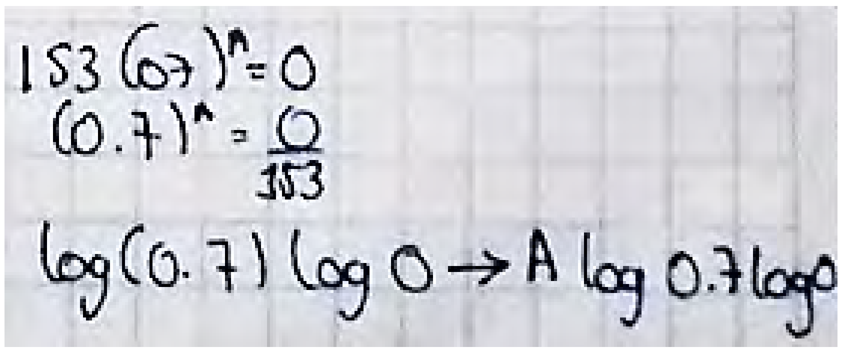


Figura 4. 30 Razonamiento bidireccional para Actividad 3. Respuesta empleando procedimiento 2.

Los estudiantes escribieron una ecuación exponencial decreciente en la que igualaron a cero la población que tendría el santuario en cualquier periodo A: $153(0.7)^A = 0$

Comenzaron a despejar la incógnita A:

$$(0.7)^A = \frac{0}{153}$$

Se observó que los estudiantes tuvieron dificultades al emplear los logaritmos pues desapareció la igualdad de su expresión: $A\log(0.7)Log0$

37.5% del grupo (estudiantes B, D, J) resolvió la situación planteada empleando la expresión exponencial decreciente. El procedimiento se puede ejemplificar con el realizado por el estudiante B (Figura 4.31).

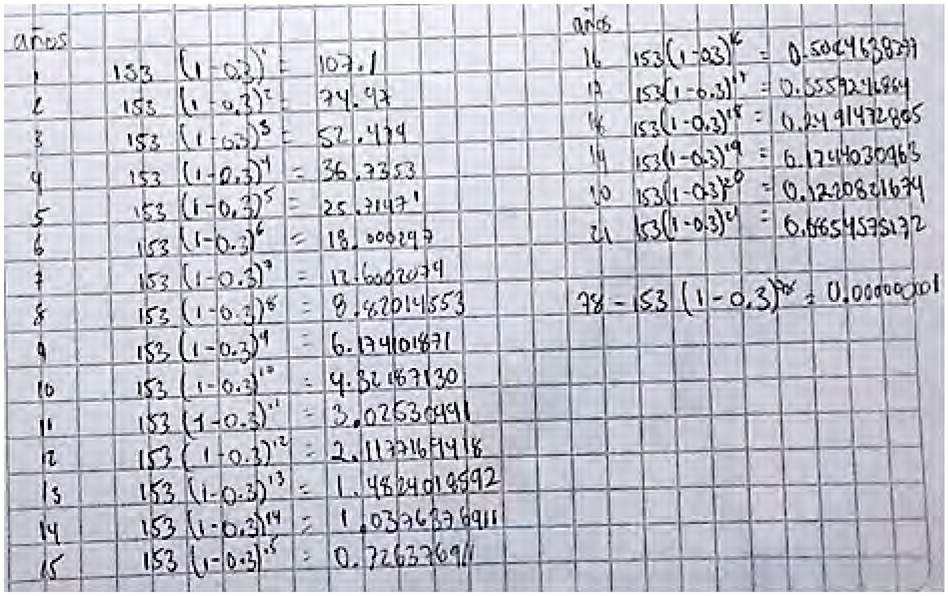


Figura 4. 31 Razonamiento bidireccional para Actividad 3. Procedimiento 1.

El estudiante B calculó la población desde el primer periodo hasta transcurrido el periodo de veintiún años y calculó además la población que tendría, pero de forma aislada, para 78 años.

La respuesta que plantearon para determinar cuándo el santuario se quedaría sin manatíes puede ejemplificarse con la del estudiante J: “ $153(1-0.3)^{15} = 0.0.726376911$ Al quedarse sin número entero la población final de manatíes, supondremos que no quedarán manatíes. Esta reducción de manatíes es en poco tiempo ya que no habrá crecimiento de la población por que se separan las hembras de los machos, por lo que será sólo decreciente”.

El estudiante J explicó que el procedimiento sólo consideraba el decremento de la población “Esta reducción de manatíes es en poco tiempo ya que *no habrá crecimiento de la población* porque se separaron las hembras de los machos, por lo que *será sólo decreciente*”. 62.5% del grupo (estudiantes B, D, H, I, J) llegó a mencionar que el problema correspondía a una situación de tasa decreciente y el 37.5% restante (estudiantes A, C, F) hacía referencia a una resta: “la tasa se resta”.

4.2.2.1 Presentación de modelos, retroalimentación y evaluación, así como de conceptos matemáticos inmersos en ellos en discusión grupal

En la tercera sesión se generó la discusión grupal, con base en los procedimientos construidos para resolver la Actividad 3. El docente guió la discusión realizando preguntas con el fin de reflexionar sobre los conocimientos de función exponencial, variación y tasa de cambio.

El docente preguntó al grupo ¿Cómo comenzaron a resolver el problema? Para lo cual el grupo señaló que debieron determinar la tasa de decremento. Lo indicaron inclusive estudiantes que en su tarea no presentaron información de haberlo analizado. El docente invitó a que explicara su procedimiento un estudiante que no lo hubiese externado en su tarea.

El estudiante D señaló que la tasa de decremento $\left(\frac{75}{250}\right)$ la obtuvo dividiendo la cantidad de manatíes muertos (75) entre la población a la que corresponde (250) y enseguida presentó la función exponencial que le permitió resolver el problema:

$$153(1-0.3)^{A}$$

$$153(1-0.3)^{1} = 107.1$$

El docente aprovechó la expresión $153(1-0.3)^{A}$ para reflexionar acerca de qué tipo de función exponencial era (creciente o decreciente), preguntó ¿Por qué se resta 0.3 a 1? El grupo explicó que se trataba de una función exponencial decreciente debido a que la población decrecía.

Partiendo del razonamiento bidireccional utilizado por los estudiantes al responder la pregunta ¿Cuándo se quedaría sin manatíes el santuario? El docente apoyó a los estudiantes para que también la respondieran utilizando logaritmos. El docente cerró la Actividad 3 generando una breve reflexión sobre los conceptos de dominio, rango, función exponencial y logarítmica.

4.2.2.2 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación de la Actividad 3

La regla de tres simple ya no fue empleada para resolver actividades similares a ésta. En la discusión grupal se determinó la importancia de identificar la tasa de decrecimiento anual como procedimiento inicial.

Transferencia. Los estudiantes mostraron habilidades para transferir los conocimientos y métodos utilizados para resolver las Actividades 1 y 2 a la Actividad 3. El 100% de los estudiantes del grupo logró construir la expresión algebraica exponencial decreciente $153(1-0.30)^{A}$: 12.5% deduciéndolo de un método recursivo y el 87.5% a partir de la expresión exponencial construida de las Actividades 1 y 2 de la secuencia.

Razonamiento bidireccional. Sólo 37.5% de los estudiantes mostró habilidad de razonamiento bidireccional. Empleó la función exponencial para diferentes periodos hasta obtener una población cercana a cero (78 años); reflexionó sobre los valores del rango de la función exponencial y determinó que el santuario se quedaría sin manatíes a partir de que la población diera valores menores a uno. 25% de los estudiantes no reportó información de éste razonamiento. 37.5% utilizó la función logarítmica a manera de algoritmo memorizado para resolver el problema, pero las dificultades con el manejo algebraico les impidió llegar a una conclusión.

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos de los estudiantes observados a partir de los trabajos escritos y entregados en forma individual de la Actividad 3 (Tabla 4.3)

Conocimientos y habilidades exhibidos por los estudiantes		Determinación de la tasa de cambio	Análisis de la s cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio	Planteamiento de expresión algebraica	Razonamiento bidireccional
Estudiantes	A	Utilizaron proporciones	La tasa se resta	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	B	Utilizaron proporciones	Identificación de tasa como decreciente	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función exponencial
	C	Utilizaron proporciones	La tasa se resta	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	D	No presentó información	Identificación de tasa como decreciente	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función exponencial
	E	No entregó			
	F	Utilizaron proporciones	La tasa se resta	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función logarítmica
	G	No entregó			
	H	Utilizaron proporciones	Identificación de tasa como decreciente	Expresión exponencial	No presentó información
	I	No presentó información	Identificación de tasa como decreciente	Expresión exponencial	No presentó información
	J	No presentó información	Identificación de tasa decreciente como y valores enteros para la población final	Expresión exponencial	A partir de expresión algebraica de la función exponencial

Tabla 4. 3 Conocimientos exhibidos por estudiantes en Actividad 3

En los modelos construidos por los estudiantes para solucionar la Actividad 3 se puede observar que no solamente presentaron cálculos numéricos, sino que interpretaron y explicaron en qué consistieron sus procedimientos. Sus habilidades de descripción escrita mejoraron.

Con respecto a la habilidad de predicción se observó que todos los estudiantes construyeron para ello una expresión algebraica exponencial.

4.2.3 Actividad 4. Modelación gráfica de una Actividad de crecimiento poblacional que implica una función exponencial creciente de la forma $f(x) = k(1+c)^{a}$ donde $x \in Z^{+}, k = 7,23,45; c = 0.08$

Para la resolución de la Actividad 4[13] se modificó la conformación de los equipos del grupo debido a que algunos estudiantes llegaron tarde. Se trabajaron las Actividades 2 y 3, para las cuales se les solicitó en la sesión previa al menos una computadora portátil por equipo. Estas actividades se diseñaron para abordarse con Net Logo. Los estudiantes no tenían experiencia con el software.

El docente solicitó cada equipo modelar en Net Logo un crecimiento poblacional plantaedo en la Actividad 4 (Anexo). Los estudiantes debían obtener la población que tendría cada uno de los santuarios en 10, 20, 30, 40 y 50 años. Una de las dudas que surgieron inicialmente fue cómo utilizar Netlogo para analizar la situación planteada. El docente describió brevemente la interfase del software para que los estudiantes pudieran utilizarla.

Primer ciclo de comprensión: Identificación de datos y variables en el modelo gráfico de NetLogo. El equipo 1 inició tratando de generar la expresión algebraica para responder el inciso 1. El docente les recordó que podían hacerlo pero que debían obtener la información empleando el software. Un integrante del equipo explicó que mediante la gráfica se podía obtener la población en cada periodo solicitado: "Es fácil sólo pones la población inicial del santuario y va creciendo la gráfica, lo paras y te pones por ejemplo sobre el 10, que es el tiempo que pasa primero, luego vas subiendo hasta que estés sobre la gráfica y se ve qué población habrá". El estudiante se refirió a determinar las coordenadas (x, y) de puntos específicos sobre la gráfica. El equipo 2 acordó obtener la información a partir de la gráfica también. Los estudiantes identificaron la variación conjunta entre las variables población y tiempo, y la relación entre éstas a partir de la gráfica.

[13] Para conocer la descripción y objetivos revisar sección 3.2.1.5 donde se describe la cuarta Actividad. El título de la Actividad es Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo.

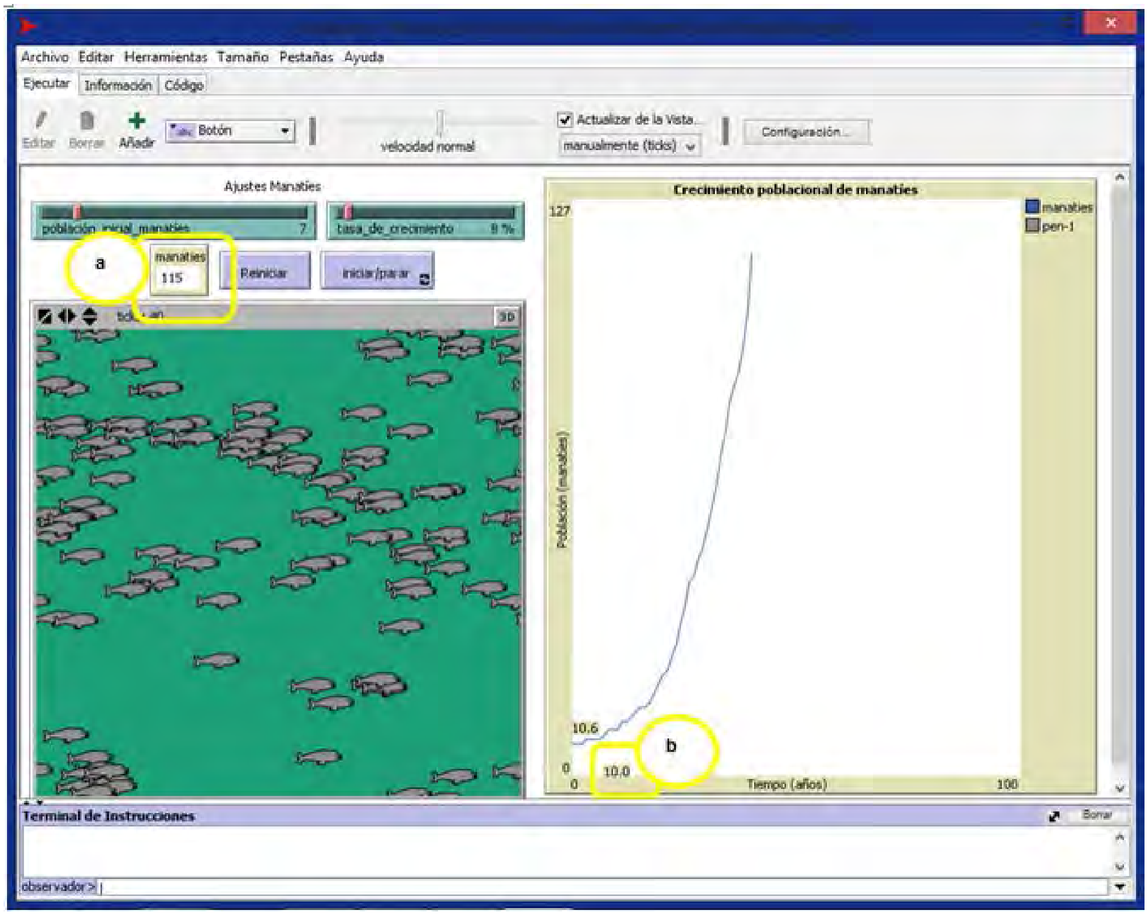


Figura 4. 32 Numérico gráfico inciso 1 de Actividad 4. Equipo 3

La primera idea del equipo 3 fue tomar la información de un cuadro de la ventana de NetLogo que indicaba la cantidad de manatíes (el cuadro se puede observar en la parte superior izquierda de la Figura 4.32 y se señaló con la letra a encerrada en un círculo amarillo). El inconveniente que encontró este equipo fue ¿Cómo saber a qué tiempo correspondía la población del recuadro? Otro estudiante del mismo equipo sugirió emplear la gráfica al observar que el eje de las abscisas representaba los años y el eje de las ordenadas la cantidad de manatíes (Figura 4.32, parte inferior derecha, letra b).

Los estudiantes tuvieron una segunda dificultad, la cual expresaron de la siguiente manera: “El programa no nos da la misma población cuando repetimos la gráfica para los años que nos piden” “Obtenemos resultados diferentes a cuando usamos la fórmula”. El docente aprovechó para generar una reflexión sobre el crecimiento poblacional real y los resultados de un modelo matemático como el construido y comentó: “Si contamos los manatíes que hay inicialmente en un lugar y calculamos, mediante la expresión algebraica de la función exponencial, ¿cuántos tendríamos por ejemplo al final de cada uno de los próximos 5 años? y si luego al final de cada uno de los próximos 5 años contamos a los manatíes en el santuario ¿Serían idénticos los resultados si los comparamos entre sí?” Los estudiantes respondieron: “Por eso cuando se usa la fórmula da decimales, porque no es exacto” (Equipo 3); “Podría ser que en algún año cambie porque se enfermen y mueran pero se curen” (Equipo 2). Los estudiantes llegaron a la conclusión de que la representación algebraica de la función exponencial obtenida servía como un modelo, el cual permitía obtener valores cercanos a la realidad.

Segundo ciclo de comprensión: Sistematización de información en tabla de datos. Los tres equipos (100% del grupo) sistematizaron la información generada respecto al crecimiento poblacional por el software para cada uno de los santuarios modelados. Los estudiantes organizaron su información en tablas, un ejemplo de éstas es la realizada por el equipo 3 (Figura 4.33).

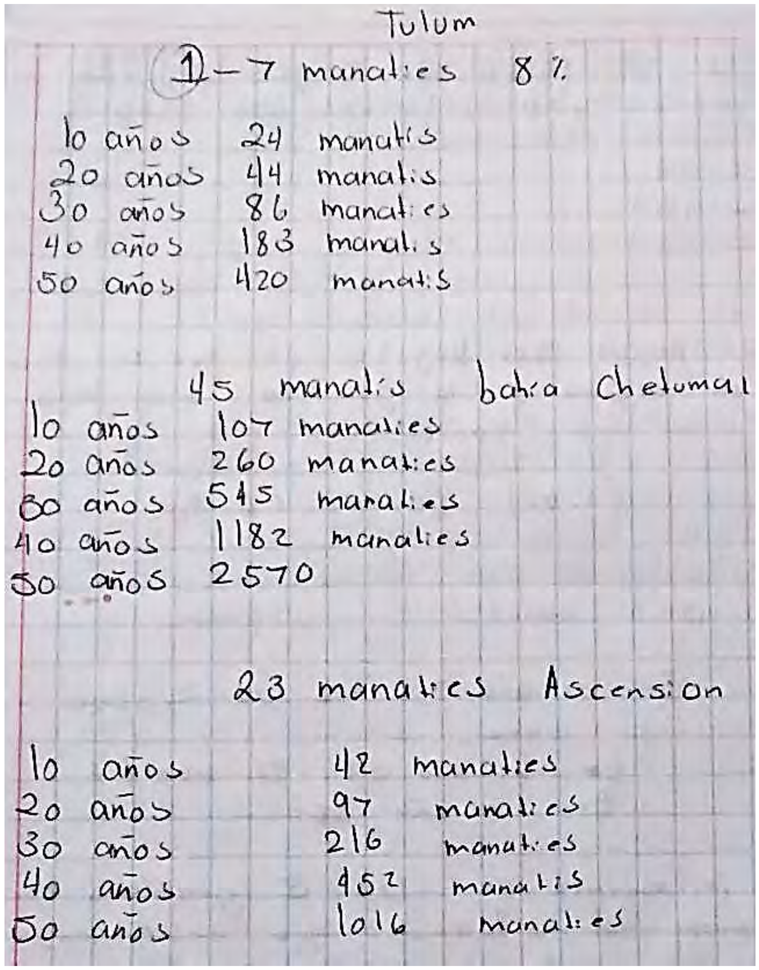


Figura 4. 33 Análisis cualitativo para inciso 1, Actividad 4. Modelo del equipo 3.

Cada equipo realizó tres tablas, titulando a cada una con el nombre del santuario y su población inicial de manatíes. Usaron dos columnas, en una enlistaron los periodos y en la otra la población que se solicitaba conocer para cada uno de los periodos.

Tercer ciclo de comprensión: Identificación de la tasa de cambio. Después de haber recopilado la información de la población que cada santuario tendría en cada periodo (10, 20, 30, 40, 50 años) se les plantearon preguntas a los equipos para que analizarán la información. En el inciso dos de la Actividad 4 (Anexo) se preguntó: ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes en las diferentes localidades?

Los tres equipos (100% del grupo) analizaron la razón de cambio entre las poblaciones al final de los periodos solicitados para poder describir cómo era el incremento. El procedimiento realizado por el equipo 2 ejemplifica lo realizado por el resto de los equipos (Figura 4.34).

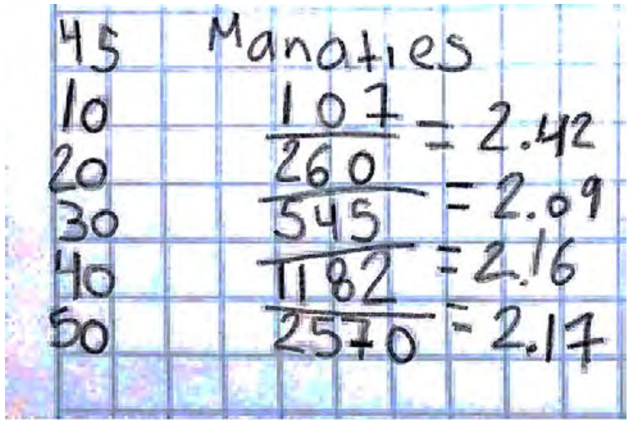


Figura 4. 34 Análisis numérico para inciso 2, Actividad 4. Modelo equipo 2.

En la primera fila de la Figura 4.34 se observa cómo los estudiantes del equipo 2 señalaron que la información de la tabla correspondía a cierto santuario, cuya población inicial de manatíes era de 45. En la primera columna escribieron los periodos señalados en la pregunta 2 de la Actividad 4 (Anexos, actividad 4). En la segunda columna escribieron la población de manatíes encontrada, correspondiente a cada periodo. En esa misma columna se observa el signo de igualdad, casi enseguida de cada cantidad numérica, seguido de otro número. Por ejemplo, el equipo 2 escribió 107=2.42; la cantidad de 2.42 resultó de dividir 260 entre 107. Este procedimiento lo utilizó en cuatro ocasiones:

$$\frac{260}{107} = 2.42,\ \frac{545}{260} = 2.09,\ \frac{1182}{545} = 2.16,\ \frac{2570}{1182} = 2.17.$$

A partir del análisis numérico mencionado anteriormente, los equipos solicitaron asesoría del docente: “Estamos en el inciso 2 y calculamos las razones, pero ¿Cómo le hacemos si las razones son diferentes?” “Los valores se alejan mucho del 1.08 que nos debe dar”. Los estudiantes no identificaban que la tasa solicitada era diferente a la anual, que habían estado trabajando. El docente intentó generar reflexión acerca de la tasa de cambio promedio y el cambio en ésta cuando se evalúan las razones en diferentes periodos de tiempo (10, 20, 30, 40 y 50 años). La reflexión realizada por el equipo 3 es similar a la abordada con cada equipo:

> Docente: ¿A qué periodos de tiempo corresponde cada población que obtuvieron?
>
> Estudiante J: Para 10, 20, 30, 40 y 50 años.
>
> Docente: ¿Cómo es el crecimiento de la población en esos periodos?
>
> Estudiante J: Nos da diferente al 1.08, se acerca más a 2.
>
> Docente: ¿Cuánto tiempo debía transcurrir para obtener un incremento del 8% en la población?
>
> Estudiante D: Nos servía para calcular la población cuando pasaba un año. [El estudiante trata de explicar que 8% era una tasa de crecimiento anual]
>
> Estudiante J: Entonces las razones son diferentes porque las poblaciones con que se calculan son de diferente tiempo. [El estudiante se percata que la tasa de crecimiento cambia si se calcula anual o por decenas de años]
>
> Estudiante B: Aunque se parecen de todos modos son diferentes entre sí.
>
> Docente: ¿Podrían determinar un valor que represente al conjunto de valores que encontraron? [El docente intentó promover que los estudiantes calculen la tasa de cambio promedio]
>
> Estudiante D: Déjenos pensarlo un poco.

A partir de la reflexión generada, los equipos 2 y 3 (66% del grupo) explicaron que el crecimiento variaba debido a que las razones no eran constantes, lo cual se ejemplifica con la respuesta del equipo 3: "El crecimiento varía ya que no da el mismo resultando en las razones". La respuesta del equipo 1 (33% del grupo) al inciso 2 de la Actividad 4 muestra cómo los estudiantes relacionaron el comportamiento de la información obtenida a partir de las razones de cambio calculadas con un crecimiento poblacional exponencial, evidencia de ello es la respuesta del equipo 1: "Es exponencial porque va creciendo la población".

Identificación de intersecciones, dominio y ordenadas en torno a la gráfica de la función exponencial. En el inciso 3 de la Actividad 4 se les solicitó a los equipos observar la intersección de la curva con el eje de las ordenadas en cada gráfica.

Los tres equipos (100% del grupo) asociaron la intersección con el periodo en el cual iniciaba la gráfica. El equipo 3 (33.33% del grupo) en un intento de explicar qué significaba lo señalaron de forma similar a la respuesta del equipo 3: "Es el punto de origen de las funciones. Representa el año 2000".

Para el inciso 4 los estudiantes debían responder ¿En cada gráfica la ordenada al origen puede ser negativa? ¿Por qué? En los equipos hubo al menos un integrante que cuestionó ¿Qué es la ordenada? Duda que fue aclarada entre ellos, dada una discusión dentro del mismo equipo. Las frases utilizadas fueron las siguientes: “recuerdo que lo habíamos visto antes”, “es el eje de las y”, “es lo que va creciendo: la población de manatíes”.

El 100% del grupo identificó de acuerdo al contexto del problema que la ordenada al origen no podía ser negativa. Por ejemplo, el equipo 1 determinó: “No puede ser negativa ya que la población va en aumento”.

Mientras que los equipos 2 y 3 (70% del grupo) justificaron su respuesta de acuerdo con los valores de las ordenadas en el origen que ya conocían. Se puede observar en la respuesta dada por el equipo 3: “No puede ser negativo ya que no habría población alguna y la gráfica solo daría las coordenadas (0,7) (0,23) (0,45)”.

El inciso 5 de la Actividad 4 consistió en determinar ¿Cómo es el dominio y rango en cada gráfica? y ¿Por qué? Se observó que los estudiantes identificaron que el dominio correspondía a números enteros.

Dos terceras partes del grupo (equipos 2 y 3) manifestaron esa comprensión al señalar que el dominio aumentaba año con año, inclusive lo relacionaron con la variable independiente. Se ejemplifica esto con la respuesta del equipo 3: “El dominio aumenta año con año. Por lo tanto varía de 1 en 1 la cual será la variable independiente. El rango aumenta impredeciblemente por la situación que nos propone el programa, el rango será los valores que tomé y. Será la variable dependiente”

La tercera parte restante del grupo (equipo 1) indicó que el incremento de la población se calculaba cada 10 años: “El dominio si es constante porque lo vamos aumentando cada 10 años y el rango tiene [sic] a cambiar porque cada gráfica es diferente por las poblaciones”. Todos los equipos mostraron dificultad al tratar de describir el rango.

El objetivo del inciso 6 fue que los estudiantes explicaran los valores del dominio y rango en el contexto de la Actividad. La pregunta que se les planteó fue la siguiente: ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?

A partir de la respuesta de los tres equipos (100% del grupo), se observó que asociaron el concepto del dominio con el eje de las x y con los años transcurridos; también se observó que los estudiantes asociaron el concepto de rango con el eje de las y, y con la población. La respuesta del equipo 2 lo ilustra: “Los valores de x significan el tiempo que transcurre los cuales son los años” "Los valores de y es el crecimiento de la población de manatíes".

Los estudiantes para responder el inciso 7 de la Actividad 4 (Anexos, actividad 4) de la secuencia debían determinar ¿En cuánto tiempo se alcanza una población de 2500 manatíes? Los tres equipos (100% del grupo) obtuvieron la información de la gráfica generada para cada santuario y la registraron: “7 manatíes en año 77 nos da 2,500” “23 manatíes en el año 50” “45 manatíes en el año 36”.

Los estudiantes centraron su atención inicial en el eje de las y. Observaron el valor de la población final de manatíes que se esperaba alcanzar (2500 manatíes) (Figura 4.35a) y después lo relacionaron con el tiempo en el cual se alcanzó, ubicado en el eje de las abscisas (Figura 4.35b).

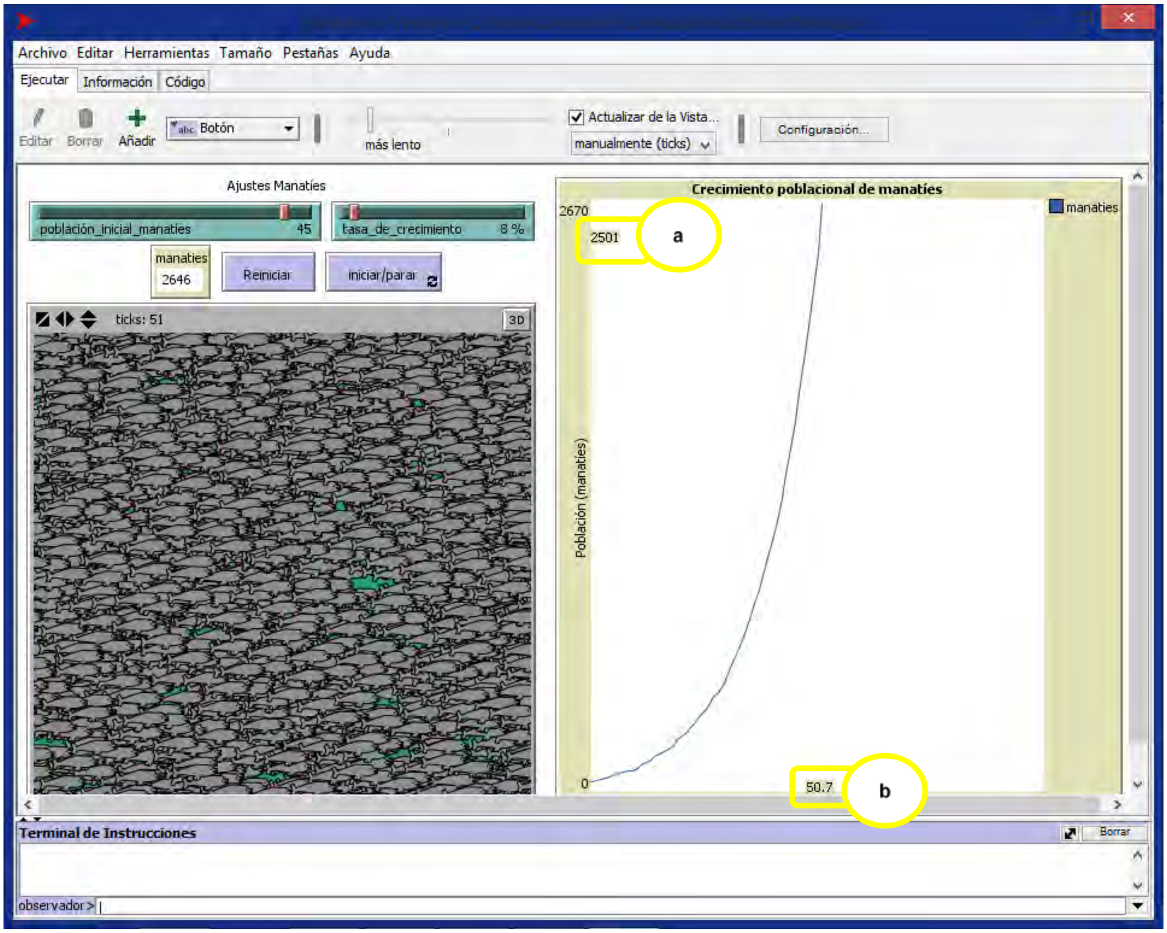


Figura 4. 35 Razonamiento bidireccional gráfico. Inciso 8 de Actividad 4.

4.2.3.1 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación de la Actividad 4

Para resolver la Actividad 4, se observaron ciertos conocimientos previos de los estudiantes a partir de sus procedimientos. Por ejemplo, se encontró que la mayoría de los estudiantes poseían ciertas habilidades para identificar datos, variables y para construir relaciones entre éstos en las gráficas (equipos 1 y 2). Esto se pudo observar cuando partieron de relacionar coordenadas (la población según el tiempo transcurrido) en las gráficas construidas en NetLogo para resolver la situación planteada para el primer inciso de la Actividad 4 (Anexos, actividad 4) donde se solicitaba a cada equipo que señalara la población que tendría cada uno de los santuarios en 10, 20, 30, 40 y 50 años. Inclusive escribir de forma simbólica se presentó como propuesta en uno de los equipos (equipo 1), al construir la función a partir de su propio análisis gráfico. En los otros dos equipos no surgió el bosquejo de una expresión algebraica (2 y 3).

Se observó que los estudiantes modificaron el conocimiento que tenían para analizar la tasa de cambio, debido a que todos los equipos cambiaron el procedimiento que utilizaron en la Actividad 2 para identificar la tasa de crecimiento anual (la regla de tres simple) por el análisis de la razón de cambio entre las poblaciones al final de los periodos solicitados para poder describir cómo era el incremento en el inciso dos. Sin embargo, los estudiantes mostraron tener dificultades al identificar la tasa de crecimiento y determinar si era constante o no, así como determinar si la tasa que encontraron era anual o para una diferente cantidad de tiempo.

Los estudiantes mostraron cierta comprensión al analizar la intersección de las gráficas con las ordenadas. El 100% del grupo la asoció al periodo en que iniciaba la gráfica y de éstos sólo un 33% explicitó relacionarlo con la población inicial y por ello consideraban que no podía ser negativa. No obstante los estudiantes lo consideraban como “el origen de la función”.

Al analizar el dominio y rango de la función los estudiantes no mostraron dificultad al asociarlos al contexto del problema. Además, lograron identificar que el dominio correspondía a números enteros positivos, sin embargo analizar los valores del dominio les causó dificultad debido a la aleatoriedad que proporcionaba el software NetLogo al simular una situación real. El objetivo de que los estudiantes identificaran que los valores del rango correspondían a los números reales enteros positivos no se logró en un principio.

Con la cuarta Actividad finalmente se pudo observar que los estudiantes fueron capaces de realizar un razonamiento bidireccional a partir de la representación gráfica.

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos exhibidos por los estudiantes para resolver la Actividad 4 antes de la discusión grupal (Tabla 4.4):

Conocimientos y habilidades exhibidos por los estudiantes		**Equipos**		
		1	2	3
Identificación de variables y dependencia		A partir de la gráfica, ubicación de coordenadas y relación con función algebraica Empleo de representación tabular	A partir de la gráfica, ubicación de coordenadas. Empleo de representación tabular	A partir de la gráfica, ubicación de coordenadas. Empleo de representación tabular
Análisis de tasas de cambio crecientes a partir de tablas	Método empleado	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final del periodo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final del periodo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final del periodo.
	Explicación de los estudiantes	Crecimiento exponencial	Crecimiento variado por obtener razones no constantes	Crecimiento variado por obtener razones no constantes
Interpretación de la intersección en las ordenadas cuando se varía $\boldsymbol{k}$ en la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = k(1+c)^x}$		Escribieron: Es el origen de la función. Valor positivo debido a que la población va en aumento.	Escribieron: Origen de la función. No puede ser negativa $\boldsymbol{k}$ ya que no habría población alguna.	Escribieron: Origen de la función. Representa el año 2000. No puede ser negativo ya que no habría población alguna.
Análisis del dominio de la función exponencial		Escribieron: Correspondiente a números enteros por el crecimiento cada 10 años.	Escribieron: Correspondiente a números enteros por el incremento anual.	Escribieron: Correspondiente a números enteros por el incremento anual. Asociaron a la variable independiente.
Análisis del rango de la función exponencial		Escribieron: Cambia debido a las poblaciones.	Escribieron: Impredecible debido al programa.	Escribieron: Impredecible debido al programa. Asociaron a la variable dependiente.
Razonamiento bidireccional empleando la gráfica de la función exponencial		No hubo dificultad para determinar el tiempo.	No hubo dificultad para determinar el tiempo.	No hubo dificultad para determinar el tiempo.

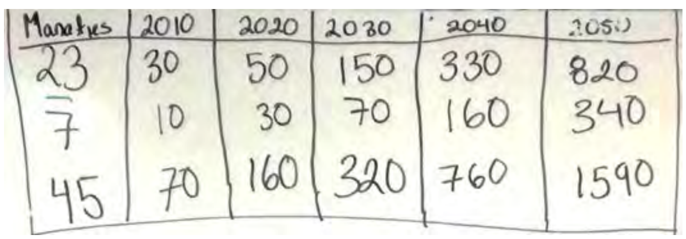
Tabla 4. 4 Conocimientos y habilidades exhibidos por estudiantes en Actividad 4

4.2.3.2 Presentación de respuestas en discusión grupal, retroalimentación y evaluación de la Actividad 4

En la quinta sesión se generó la discusión grupal, con base en los análisis realizados para resolver las Actividades 4 y 5. El docente apoyó la discusión realizando preguntas con el fin de apoyar la reflexión en los estudiantes sobre los conocimientos de función exponencial, variación y tasa de cambio.

4.2.3.2.1 Identificación de variables y dependencia

La reflexión de la Actividad 4 fue iniciada por el docente solicitando que cada equipo escribiera en el pintarrón las respuestas para el inciso 1 de la Actividad 4 ¿Qué población habrá dentro de 10, 20, 30, 40, 50 años? Los estudiantes escribieron su información en tablas como la del equipo 1 (Figura 4.36). En la primera columna organizaron la población inicial para cada santuario, y en las columnas de la segunda a la sexta la población que tendría cada santuario en periodos de cada 10 años.



Manatíes	2010	2020	2030	2040	2050
23	30	50	150	330	820
7	10	30	70	160	340
45	70	160	320	760	1590

Figura 4. 36 Presentación respuesta del inciso 1 de la Actividad 4 al grupo, equipo 1

4.2.3.2.2 Análisis de tasas de cambio crecientes

El análisis de tasas de cambio crecientes se dio de manera muy dirigida por el docente. Entre las primeras discusiones que generaron los estudiantes acerca de la información conseguida fue “el programa nos daba diferentes resultados” “es mejor hacerlo con la fórmula tardamos menos”. Lo cual aprovechó el docente para que los estudiantes reflexionaran acerca de la información de una situación real con los resultados obtenidos de modelos matemáticos y la utilidad de estos últimos. Las reflexiones de los estudiantes fueron en torno a que en dicho intervalo de tiempo diferentes situaciones podrían afectar el crecimiento poblacional de los manatíes, y por lo tanto las poblaciones finales serían diferentes. Los estudiantes concluyeron que “la fórmula” les podría servir para estimar aproximadamente la población que tendrían en cierto intervalo de tiempo.

Enseguida el grupo sugirió emplear la expresión construida por ellos en la Actividad 1 de la secuencia:

$$PI(1+TD)^{A}=PF$$

Donde sustituyeron TD por 0.08 que representaba el 8% que crece la población de manatíes, PI por cualquiera de las poblaciones iniciales (7, 23, 45) y los valores de A los obtuvieron restando al año final el valor del año inicial (por ejemplo $A=2020-2000=20$.

Los estudiantes construyeron las expresiones:

$$7(1.08)^{A}=PF$$
$$23(1.08)^{A}=PF$$
$$45(1.08)^{A}=PF$$

Al analizar las respuestas para el inciso 2 de la Actividad 4: ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes entre las diferentes localidades? Los estudiantes manifestaron tener dificultades al identificar la tasa de crecimiento, determinar si era constante o no, así como si ésta era anual, bianual u otro periodo. El docente solicitó que explicaran cómo habían determinado que el incremento era diferente. Un integrante del equipo 2 explicó que podía determinar el incremento por ejemplo al dividir la población final del año 2010 que era de 50 manatíes entre la población del año 2000 que era de 23 manatíes (Figura 4.37). Se observó que el estudiante aún tenía dificultad en comprender qué representa la razón que obtuvo, pues la señaló como porcentaje (2.17%).

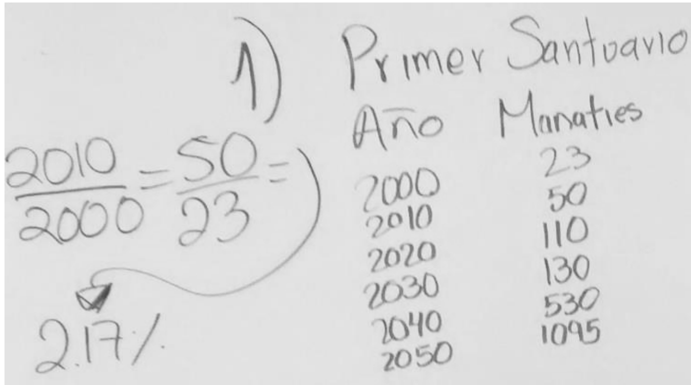


Figura 4. 37 Presentación de respuesta al inciso 2 de la Actividad 4, equipo 2

Los estudiantes al intentar dar significado a cada elemento de la forma algebraica de la función exponencial, en particular a la tasa de cambio, concluyeron que se debían utilizar diferentes tasas de crecimiento correspondientes a diferentes periodos de años (Figura 4.38).

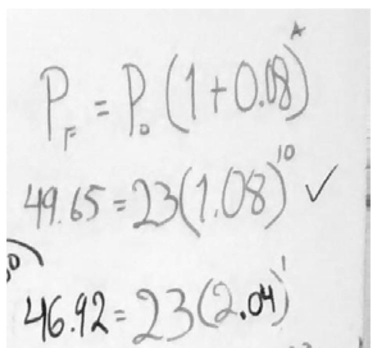


Figura 4. 38 Reflexión grupal de respuesta al inciso 2 de la Actividad 4.

Los estudiantes sugirieron la construcción de una expresión para determinar la población correspondiente a un crecimiento por cada decena de años (Figura 4.39).

Los estudiantes comentaron que los resultados obtenidos entre ambas expresiones eran diferentes (figuras 4.38 y 4.39). Un estudiante recordó al grupo que de hecho las razones eran diferentes al calcularlas entre las poblaciones de periodos consecutivos, pero que los valores eran cercanos a 2. El docente a partir de la observación del estudiante invitó a reflexionar al grupo "¿Cómo podemos calcular a partir de esas diferentes tasas una que tenga un valor cercano a todas?" Debido a que los estudiantes no dieron algún comentario el docente les planteó otra pregunta "Cuando les dan sus calificaciones de los diferentes cursos al final del semestre ¿Cómo son? ¿Cómo pueden determinar su desempeño en el semestre?” Un estudiante respondió de forma natural “Aaaaaah pues con un promedio”. El docente aprovechó la respuesta del estudiante para mencionar que la tasa de crecimiento promedio se llamaba así porque se obtienía del promedio de tasas de crecimiento poblacional entre diferentes años.

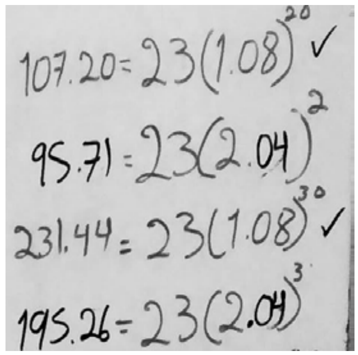


Figura 4. 39 Reflexión grupal acerca de tasa promedio de cambio, de respuesta al inciso 2 de la Actividad 4.

4.2.3.2.3 Análisis gráfico de la variación del parámetro k en la función $f(x) = k \cdot a^x$

El docente solicitó que un integrante de cada equipo dibujara en el pintarrón la gráfica correspondiente a cada santuario (Figura 4.40), lo cual sirvió para reflexionar las respuestas a los incisos 3, 4, 5, 6 y 7 de la Actividad 4.

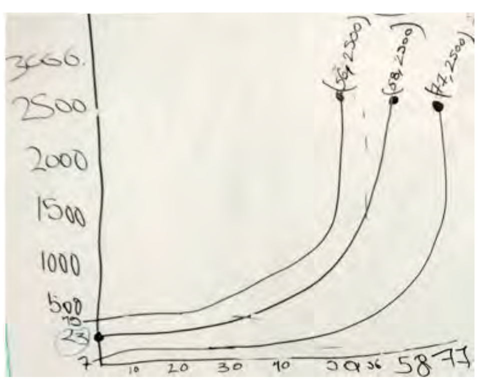


Figura 4. 40 Reflexión grupal acerca de intersección en la ordenada, de respuesta al inciso 3 de la Actividad 4.

Se observó que las preguntas planteadas en la Actividad 4 apoyaron a los estudiantes a observar características que les servirían para bosquejar la gráfica correspondiente a una función exponencial.

4.2.3.2.4 Interpretación de la intersección en las ordenadas

Los estudiantes iniciaron con ideas como las siguientes: “las ordenadas son los valores de la y” “es el origen de la función” “es la población en el año 2000”. Los estudiantes relacionaban el concepto de función con “es la fórmula que usamos para calcular la población que tendríamos en cierto tiempo”. El docente explicó que las funciones se pueden usar para describir la solución de un problema matemático, en forma de una igualdad entre dos expresiones matemáticas y el concepto de función es una relación de un conjunto sobre otro.

El docente continuó con la reflexión de la pregunta 4 de la Actividad 4 “Entonces ¿En cada gráfica la ordenada al origen podría ser negativa? ¿Por qué?” La respuesta de los estudiantes fue “No podría ser negativa porque no tendría sentido que la cantidad de manatíes lo sea” Para apoyar la reflexión acerca del concepto de función exponencial el docente cuestionó a los estudiantes ¿Podría ser negativa nuestra ordenada en el origen en otra situación? Los estudiantes sugirieron que en otra situación podría ser aunque no se les ocurría alguna.

4.2.3.2.5 Análisis del dominio y rango de la función $\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^x}$

Para la pregunta 5 de la Actividad 4 ¿Cómo es el dominio y rango en cada gráfica? ¿Por qué? Los equipos de los estudiantes expresaron las respuestas de sus trabajos escritos:

El docente a partir de las respuestas de los estudiantes apoyó a que éstos identificaran que el dominio de una función es el conjunto de todos los valores independientes posibles que una función puede tener y su rango es el conjunto de todos los valores dependientes posibles que ésta puede producir. Además, los estudiantes representaron en intervalos el dominio y rango en el que se encontraba definida la función para la Actividad 4 (Figura 4.41). Por ejemplo, para el santuario con población inicial de 23 manatíes los estudiantes definieron que los valores del rango podían ser “a partir de la población inicial (23 manatíes) hasta infinito (∞), que tendría que ser positivo y entero que represente la población al final de un tiempo”. Para el dominio indicaron que éste debía ser “a partir del año en que se realizó el primer censo de manatíes (2000) o bien cuando no ha transcurrido ningún año, hasta infinito (∞) el año en que se nos pidan conocer la población, que tiene que ser positivo y entero”.

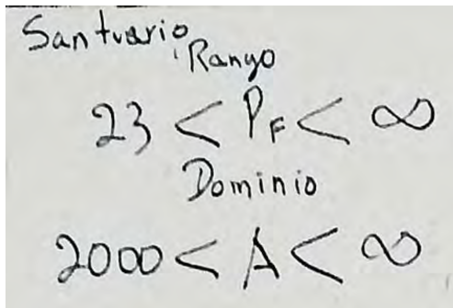


Figura 4. 41 Intervalos del dominio y rango en el que se encontraba definida la función para la Actividad 4 identificados por los estudiantes

4.2.3.2.6 Razonamiento bidireccional empleando la gráfica de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}(\mathbf{1} + \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{x}}$

Para finalizar la Actividad 4 se reflexionó el séptimo y último inciso de ésta “*Si el presupuesto para la manutención de los santuarios sólo alcanzará para cuidar 2500 manatíes por localidad ¿En cuánto tiempo estimas que se alcanzará una población de 2500 manatíes en cada localidad?”* Los estudiantes mostraron razonamiento bidireccional al conectar el modelo gráfico con el algebraico.

Dicha conexión se pudo percibir cuando los estudiantes reflexionaron sobre “¿Cómo obtuvieron esas respuestas?” “¿Existe otra forma de determinar el tiempo en que cada santuario tendría 2500 manatíes?” Los estudiantes describieron cómo utilizaron la gráfica generada por NetLogo para responder las preguntas. Relacionaron los valores población-tiempo en un orden inverso al empleado, tiempo-población. Como solución alternativa sugirieron que se podía haber utilizado la función exponencial, despejar el tiempo y emplear logaritmos.

4.2.4 Actividad 5. Modelación gráfica de una Actividad de crecimiento poblacional que implica una función exponencial creciente de la forma $f(x) = k(1+c)^x$ donde $x \in Z^+, k = 10; c = 0.05, 0.08, 0.10$

La hoja con la Actividad 5 se entregó a los estudiantes junto con la Actividad 4 y también se utilizó el Software NetLogo para su implementación.

Identificación de la tasa de cambio. Para responder el primer inciso de la Actividad 5: ¿Cómo es la población después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional? El procedimiento inicial de los tres equipos (100% del grupo) fue determinar la tasa de crecimiento para cada localidad.

El 66.66% del grupo (equipos 2 y 3) escribió el procedimiento llevado a cabo, mediante el cual obtuvo la tasa de cambio. Las evidencias del equipo 3 ejemplifican el procedimiento de ambos equipos (Figura 4.42). El equipo 3 dividió la cantidad de manatíes nacidos (3 manatíes) entre la población de manatíes del primer año (30 manatíes), determinando la tasa de crecimiento anual (10%).

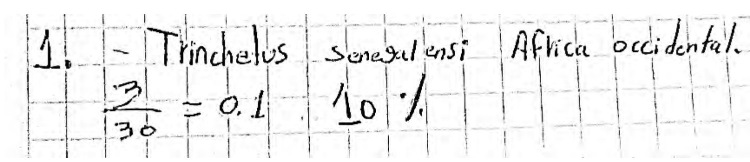
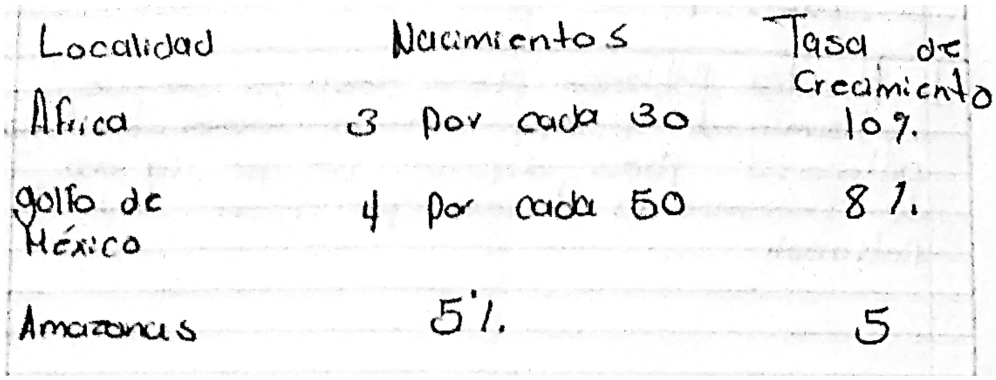


Figura 4. 42 Determinación de tasa, inciso 1 de Actividad 5. Equipo 3.

El 33.33% del grupo (equipo 1) entregó su información (Figura 4.43) sin presentar operaciones. En la tabla los estudiantes relacionaron para cada localidad (África y Golfo de México) los nacimientos que tuvieron por año por población y determinaron la tasa de crecimiento (10%).

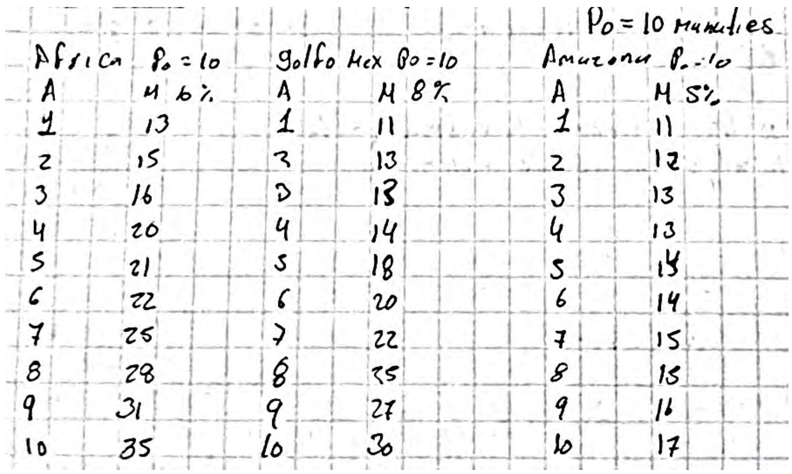


Localidad	Nacimientos	Tasa de Crecimiento
Africa	3 por cada 30	10%
golfo de México	4 por cada 50	8%
Amazonas	5%	5

Figura 4. 43 Determinación de tasa, inciso 1 de Actividad 5. Equipo 1.

Posteriormente, los estudiantes introdujeron en el software NetLogo la población inicial (10 manatíes) y la tasa de crecimiento anual que calcularon para cada santuario. Una vez que corrieron el programa los tres equipos (100% del grupo) recolectaron y organizaron en tablas la información correspondiente a la población de manatíes en periodos que ellos determinaron.

Sistematización de información en tablas de datos. El 66.66% del grupo (equipos 1 y 2) registró la población que tendría para diez años en cada localidad (Figura 4.44). Un modelo que ejemplifica es el del equipo 2, el cual realizó tres tablas, una para cada localidad (África, Golfo de México, Amazonas). Cada tabla tenía dos columnas, en la primera enlistaban los años (A) y en la segunda la población de manatíes (M) correspondiente. Se puede observar que los estudiantes simbolizaron la población inicial como $P_0 = 10$; indicaron la tasa de crecimiento, para cada localidad, a un costado de los encabezados de las columnas M.

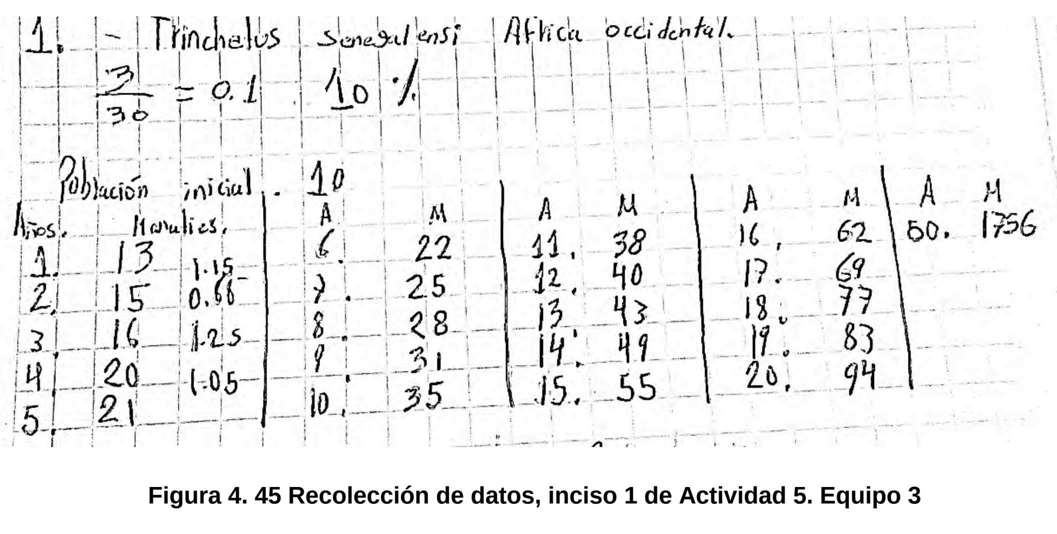


Po = 10 manatíes

Africa Po = 10		Golfo Mex Po = 10		Amazonas Po = 10	
A	M 6%	A	M 8%	A	M 5%
1	13	1	11	1	11
2	15	2	13	2	12
3	16	3	13	3	13
4	20	4	14	4	13
5	21	5	18	5	14
6	22	6	20	6	14
7	25	7	22	7	15
8	28	8	25	8	15
9	31	9	27	9	16
10	35	10	30	10	17

Figura 4. 44 Recolección de datos, inciso 1 de Actividad 5. Equipo 1.

El 33.33% restante del grupo (equipo 3) registró la población correspondiente a cada localidad durante veinte años (Figura 4.45). Este equipo también realizó tres tablas, una para cada localidad (África, Golfo de México, Amazonas), y relacionó los años (A) con la población de manatíes alcanzada en cada periodo (M). Se puede observar que los estudiantes indicaron en la parte superior de la tabla la localidad a que correspondía la información y enseguida indicaron el procedimiento para calcular la tasa de crecimiento para cada localidad. En las primeras columnas de la tabla (Figura 4.45) se observan unas cantidades entre cada par de población; por ejemplo, entre 13 y 15 manatíes está 1.15. Estas cantidades (1.5, 0.66, 1.25, 1.05) son razones que calcularon los estudiantes buscando el patrón del incremento entre las poblaciones.



1. - Trinchelus senegalensi África occidental.

$\frac{3}{30} = 0.1$. 10 %

Población inicial . 10

Años.	Manatíes.		A	M	A	M	A	M	A	M
1	13	1.15	6	22	11	38	16	62	50	1756
2	15	0.66	7	25	12	40	17	69		
3	16	1.25	8	28	13	43	18	77		
4	20	1.05	9	31	14	49	19	83		
5	21		10	35	15	55	20	94		

Figura 4. 45 Recolección de datos, inciso 1 de Actividad 5. Equipo 3

Identificación de población final y su relación con la tasa de cambio en la gráfica de la función exponencial. Los tres equipos (100% del grupo) analizaron la información recabada y a partir de ella respondieron el inciso 1 de la Actividad 5: ¿Cómo es la población después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional?, coincidiendo que “a mayor tasa de crecimiento crece más rápido la población”. Los estudiantes respondieron de forma cualitativa sin incluir que el crecimiento era de tipo exponencial. La idea puede verse expresada en la respuesta del equipo 2: *“Vemos que los que tienen más alta la tasa de crecimiento y la población inicial vemos que crece más rápido la población que si es menos la tasa de crecimiento”.*

Para el inciso 2 de la Actividad 5: ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional? se presentaron dos tipos de respuestas.

Los equipos 1 y 3 (66.66% del grupo) respondieron que no se podía determinar debido a que el programa les simulaba una situación real, pero señalaban que dependía de la tasa. Ejemplo de esta respuesta es la del equipo 3: “El incremento varía dependiendo la situación real que nos propone el programa, por lo que no es predecible. Dependiendo también de que tasa hablemos”

El equipo 2 (33.33% del grupo) comparó la población inicial de manatíes del Amazonas con la final, cuya tasa de crecimiento era del 5% anual, y concluyó que la población casi se duplicó: “Vemos que el incremento es casi el doble que el del amazonas”

Identificación de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas. Para el inciso 3 de la Actividad 5, se solicitó a los estudiantes que observaran la intersección de la curva con el eje de las ordenadas en cada gráfica y respondieran la pregunta ¿Qué significa el punto de intersección? El 100% de los equipos lo identificó como el origen, el inicio de la función o la población inicial. Los equipos 1 y 2 (66.66% del grupo) mostraron dificultad al intentar escribir las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con las ordenadas, esto se puede apreciar en la respuesta del equipo 1: “La intersección se hace en 0.10 en todas las gráficas o inicio de la función la cual es el punto de origen". El equipo 3 (33.33% del grupo) solamente mencionó que era la población inicial: "Es donde empieza la función la cual es la población inicial (10)".

4.2.4.1 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación de la Actividad 5

La Actividad 5 tenía como objetivo que los estudiantes complementaran los conocimientos discutidos con la Actividad 4 (Anexo), y que asociaran el comportamiento de la gráfica de la función exponencial con su expresión algebraica $f(x)=k(1+c)^x$ al variar el parámetro c. Con esta Actividad se esperaba que el estudiante identificara el comportamiento y la variación de las gráficas de funciones exponenciales, al correr tres simulaciones con tasa de cambio distinta entre ellas.

Con esta Actividad se pudo observar que la mayoría de los estudiantes relacionó la tasa de crecimiento anual como la razón de manatíes nacidos con respecto a una población en un año. Los estudiantes mediante el empleo de tablas construidas con información extraída de las gráficas mostraron habilidades para identificar datos, variables y para construir relaciones entre éstos en las gráficas.

Al solicitar la descripción sobre los valores del rango de la función cuando se variaba la tasa de crecimiento anual, se observó que los estudiantes solamente lograron argumentarla de forma cualitativa. Además, los estudiantes manifestaron tener dificultades para identificar la tasa de crecimiento y determinarla.

Los estudiantes asociaron la intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas con la población inicial, pero mostraron dificultades al relacionarla con "el origen de la función".

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos exhibidos por los estudiantes en sus reportes escritos de la Actividad 5 antes de la discusión grupal (Tabla 4.5).

Conocimientos y habilidades exhibidos por los estudiantes en sus reportes	Equipos		
	1	2	3
Identificación de variables y dependencia	A partir de la sistematización de la información gráfica	A partir de la determinación de la tasa de crecimiento anual.	A partir de la determinación de la tasa de crecimiento anual.
Determinación de tasas de cambio crecientes	No presentó procedimientos para calcular la tasa de cambio.	Determinación de tasa de crecimiento anual mediante razones.	Determinación de tasa de crecimiento anual mediante razones.
Sistematización de información gráfica en tablas	A partir de tabla con registro de población para cada periodo durante diez años.	A partir de tabla con registro de población para cada periodo durante diez años.	A partir de tabla con registro de población para cada periodo durante veinte años.
Análisis cualitativo de la tasa de crecimiento anual a partir de las gráficas	Expresaron: Crecimiento más rápido a mayor tasa de crecimiento.	Expresaron: Crecimiento más rápido a mayor tasa de crecimiento.	Expresaron: Crecimiento más rápido a mayor tasa de crecimiento.
Análisis cuantitativo de la tasa de crecimiento anual a partir de las gráficas	Calcularon las tasas de cambio entre poblaciones inicial y final. Expresaron: Con variación e impredecible debido a la situación real. El incremento depende de la tasa.	Calcularon las tasas de cambio entre poblaciones inicial y final sólo para una sola localidad. Expresaron: El incremento fue casi el doble.	Calcularon las tasas de cambios entre poblaciones inicial y final. Expresaron: Con variación e impredecible debido a la situación real. El incremento depende de la tasa.
Interpretación y análisis de intersección de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas	Le llamaron origen o inicio de la función, población inicial. Dificultad al escribir las coordenadas.	Le llamaron origen o inicio de la función, población inicial. Dificultad al escribir las coordenadas.	Le llamaron población inicial.

Tabla 4. 5 Conocimientos exhibidos por estudiantes en Actividad 5

En los modelos construidos por los estudiantes para dar solución a las actividades 4 y 5 se observó que desarrollaron cierta habilidad en la interpretación de gráficas de la función exponencial. Esta habilidad era mínima o nula cuando comenzaron a resolver la Actividad 4. Además, los estudiantes mejoraron en su habilidad para describir gráficas de la función exponencial, así como para asociar significado a los parámetros de la forma algebraica de esta función.

En la quinta sesión se generó la discusión grupal, con base en los análisis realizados para resolver las Actividades 4 y 5. El docente generó preguntas con el fin de apoyar la reflexión grupal sobre los conocimientos de función exponencial, variación y tasa de cambio.

4.2.4.2 Presentación de respuestas, retroalimentación y evaluación de las Actividades 5

La reflexión de la Actividad 5 la inició el docente preguntando a los estudiantes “¿Cómo comenzaron a resolver la Actividad 5?”.

4.2.4.2.1 Análisis y determinación de tasa de cambio creciente

Los estudiantes manifestaron que para responder el primer inciso (¿Cómo es la población después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional?) fue necesario determinar la tasa de crecimiento para cada localidad (Figura 4.46). Se observó que los estudiantes en ocasiones explicitaban el crecimiento anual, quizá recordando el concepto de tasa la cual no identificaban al inicio de la secuencia.

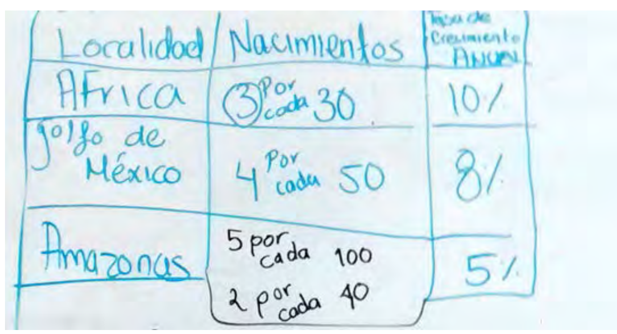


Figura 4. 46 Determinación de tasa, inciso 1 de Actividad 5. Reflexión grupal.

4.2.4.2.2 Análisis gráfico de la variación del parámetro c en la función $\boldsymbol{f(x) = k(1 + c)^x}$

El docente con la finalidad de continuar la reflexión de la Actividad preguntó ¿Podemos responder el primer inciso con esta información? Los estudiantes expresaron “Sólo es una parte de la información que necesitábamos conocer” “Ya que tenemos la tasa de cambio y la población inicial lo ponemos en el programa” “Con el programa podemos ir viendo cuántos manatíes en cada año y lo comparamos” El docente preguntó al grupo si alguien había hecho algo distinto, dado que la respuesta fue negativa solicitó al mismo estudiante del equipo 1 ayudara a registrar la información que sugería el grupo (Figura 4.67).

4.2.4.2.3 Identificación de variables y dependencia

El docente repitió la pregunta ¿Podemos responder el primer inciso con esta información? Los estudiantes respondieron “Podemos comparar las poblaciones finales y vemos que mientras más alta la tasa o la población inicial la población crece más rápido” El docente inició la reflexión en torno a ¿Cuánta información era necesaria para determinar esas observaciones? Los estudiantes del equipo 3 comentaron que ellos habían registrado la población que tendrían para cada localidad durante veinte años, pues recordaron que cuando se calculó la población que habría para pocos periodos el crecimiento exponencial no se observaba. Por su parte los equipos 1 y 2 explicaron que para ellos solamente fue necesario registrar la población que tendrían durante diez años en cada localidad y ese registro ayudaba a identificar cuál población de manatíes “crecía más rápido” (Figura 4.47). El grupo concluyó que mientras más periodos se registraban, más fácil era identificar cuál población creció “más rápido”.

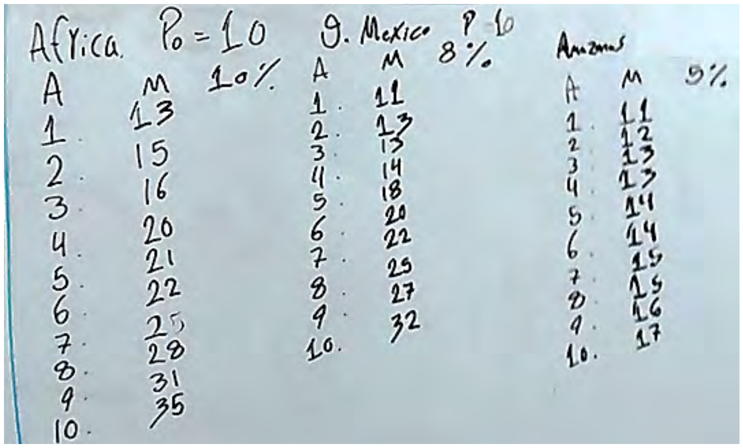


Figura 4. 47 Discusión grupal. Datos, inciso 1 de Actividad 5. Equipo 1.

4.2.4.2.4 Análisis del rango de la función al variar la tasa de crecimiento

El docente invitó a los equipos a comentar sus respuestas del inciso 2 de la Actividad 5 ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional?

En la reflexión se observaron modificaciones para las primeras respuestas que habían formulado los equipos. En el caso de los equipos 1 y 3, que habían respondido “El incremento varía dependiendo la situación real que nos propone el programa, por lo que no es predecible. Dependiendo también de qué tasa hablemos”, los estudiantes determinaron que a pesar de ser una situación real se podía verificar el incremento calculando la razón de cambio entre las poblaciones finales y promediando éstas (tal como se había realizado para el inciso 2 de la Actividad 4). El docente preguntó si estaba de acuerdo todo el grupo; dado que manifestaron estarlo, solicitó al grupo explicar el procedimiento. Los estudiantes ejemplificaron utilizando la información correspondiente a los manatíes africanos. Explicaron que primero debían dividir la población al final de un periodo entre la que tenían al principio para calcular la razón:

$$\frac{15}{13}=1.15 \qquad \frac{16}{15}=1.06 \qquad \frac{20}{16}=1.25 \qquad \frac{21}{20}=1.05 \qquad \frac{22}{21}=1.04$$

$$\frac{25}{22}=1.13 \qquad \frac{28}{25}=1.12 \qquad \frac{31}{28}=1.10 \qquad \frac{35}{31}=1.12$$

Posteriormente, los estudiantes indicaron que tenían que calcular el promedio de las razones obtenidas:

$$\frac{1.15+1.06+1.25+1.05+1.47+1.13+1.12+1.10+1.12}{9}=\frac{10.02}{9}=1.11$$

Finalmente, los estudiantes recordaron que debían restarle 1 a la cantidad obtenida ya que representaba “la población inicial” y sólo requerían conocer el incremento (1.11-1). Cuando obtuvieron 0.11 explicaron que significaba “la parte que incrementaba por cada cien manatíes” que “correspondía a una tasa de crecimiento poblacional del 11% que era cercano a la tasa del 10% anual” planteado por la Actividad.

Otra modificación que se pudo percibir, a partir de la presentación de los equipos 1 y 3, fue que la primera respuesta del equipo 2 “Vemos que el incremento es casi el doble que el del amazonas” cambió por la siguiente: “Dependiendo también de qué tasa hablemos”. El grupo interpretó esta idea cómo “el incremento es más rápido a mayor tasa”.

4.2.4.2.5 Análisis de la tasa de crecimiento anual

Para finalizar la reflexión de la Actividad 5 el docente solicitó a un integrante del equipo 2 que ayudaran a dibujar las gráficas que representaran la Actividad 5 antes de que el grupo compartiera sus respuestas (Figura 4.48). En la gráfica el estudiante ubicó en las abscisas los valores correspondientes a los años y en las ordenadas la correspondiente población de manatíes. Iniciaron el trazo de la gráfica para cada localidad en cero años y diez manatíes. Se puede observar que trazaron una línea punteada perpendicular al eje de las abscisas para encontrar el valor de la población correspondiente a 10 años para cada localidad.

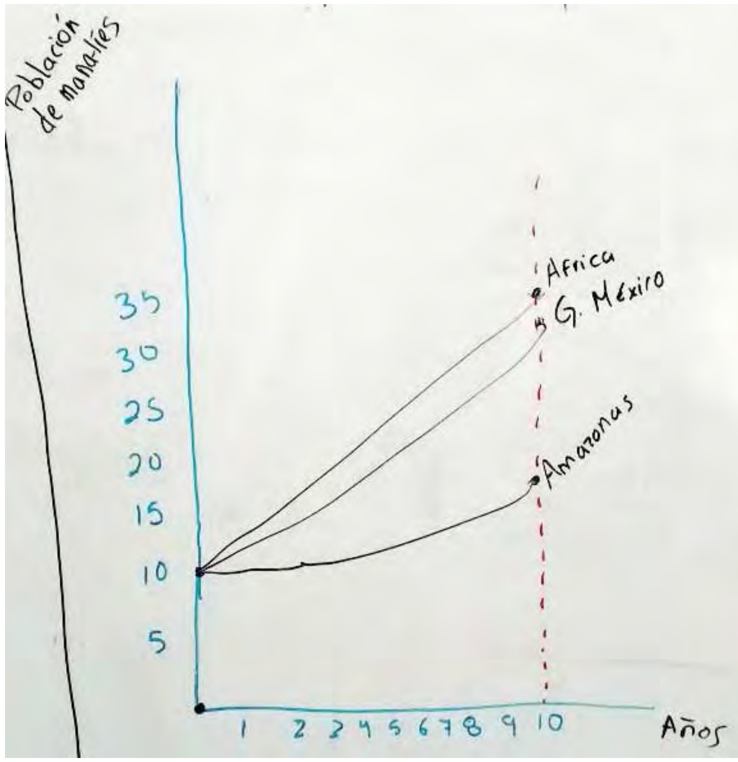


Figura 4. 48 Modelo gráfico de la Actividad 5

El docente cerró la Actividad 5 generando una reflexión que llevó a los estudiantes a identificar que el dominio de la función podía ser de números enteros positivos y negativos y que el rango correspondía a los enteros positivos.

Al término de la discusión grupal, el docente finalizó la sesión solicitando que realizaran de forma individual la Actividad de seguimiento *El Santuario de la Laguna de las Ilusiones* para analizarla en el grupo en la siguiente sesión.

4.2.5 Actividad 6. Modelación de una actividad de crecimiento poblacional que implica la representación algebraica, tabular y gráfica de una función exponencial creciente de la forma $f(x)=k(1+c)^x$ donde $x \in Z^+; k=18; c=0.08$

La actividad número 6 de la secuencia es el *Santuario de la Laguna de las Ilusiones.* Consiste en información del crecimiento poblacional de los manatíes dada en una tabla (población final de cierta cantidad de periodos) y en la gráfica correspondiente, sin incluir la expresión algebraica que la describe (Anexo).

El objetivo de la actividad era evaluar qué tanto los estudiantes podían transferir los conocimientos y métodos utilizados para resolver las actividades 4 y 5, al resolver una nueva situación en la que subyacía una función exponencial creciente $f(x)=k(1+c)^x$. Se pretendía que los estudiantes analizaran la información de la tabla y gráfica; determinaran la variación de la población de manatíes con respecto al tiempo; establecieran la expresión matemática que representaba al conjunto de datos de la población y que hicieran predicciones sobre la cantidad de manatíes en la Laguna de las Ilusiones al cabo de cualquier cantidad de años. Esta sexta actividad de la secuencia fue realizada como tarea extraescolar de forma individual.

4.2.5.1 Descripción de los procedimientos presentados por los estudiantes al realizar la Actividad 6

La tarea fue entregada por 9 de los 10 estudiantes del grupo (estudiantes A, B, C, D, E, F, G, I, J). En seguida se describen los procedimientos utilizados por los estudiantes. Nos referiremos a estos 9 estudiantes como el 100% en los siguientes párrafos.

4.2.5.1.1 Identificación de variables y dependencia

Se identificó que el 100% de los estudiantes inició identificando la relación entre variables a partir de los datos de la tabla y lo que representaba cada uno de ellos en el contexto del problema. Para responder la primera pregunta de la actividad 6 ¿Cómo cambió de cada año la población de manatíes? El 77% del grupo (estudiantes A, B, C, D, E, F e I) presentó la razón de cambio entre pares de cantidades, sin explicar. Ejemplo de estos procedimientos es el realizado por el estudiante A (Figura 4.49).

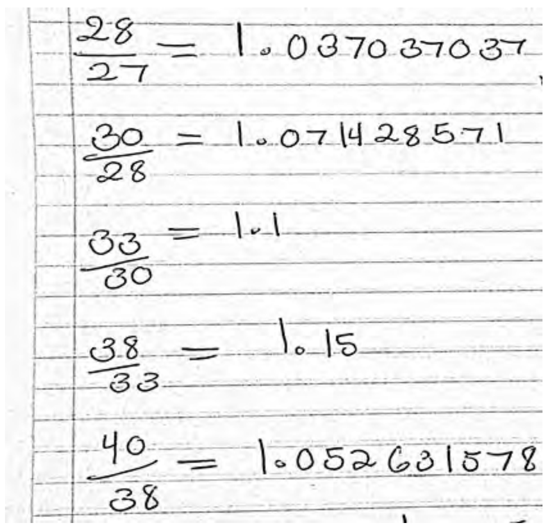


Figura 4. 49 Procedimiento de estudiante A para el inciso 1 de la actividad 6

4.2.5.1.2 Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio

Los estudiantes A, B, C, D, E, F e I calcularon el promedio de las razones mostradas en la Figura 4.49 sin explicitar algo más. Por ejemplo, el procedimiento del estudiante E para el inciso 1 de la actividad 6 consistió en la suma de las razones encontradas y calculó la razón de cambio promedio:

$$1.057+1.0714+1.1+1.1515+1.052=5.4119$$

$$\frac{5.4119}{5}=1.08238$$

El 23% del grupo manifestó además haber tomado la información de la tabla proporcionada en la Actividad 6. El estudiante G por ejemplo realizó una tabla. En la primera columna ordenó los años y en la segunda columna presentó la razón de cambio de las poblaciones inicial y final de cada periodo para determinar la tasa de crecimiento de cada año (Figura 6.50).

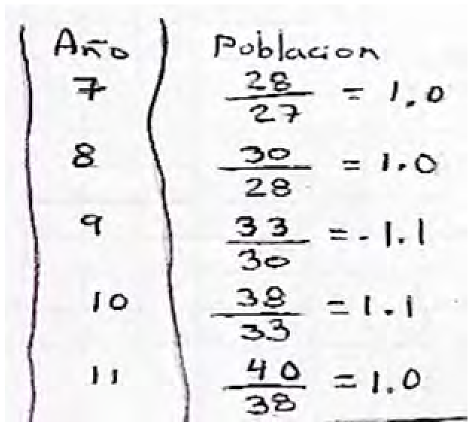


Figura 4. 50 Procedimiento de estudiante G para el inciso 1 de la actividad 6.

4.2.5.1.3 Determinación de la tasa de cambio

En los procedimientos para resolver el inciso 1 de la actividad 6, sólo el 77% (estudiantes B, C, D, F, I y J) explicitó que la población cambiaba a una tasa del 8% anual que determinaron a partir de la razón de cambio promedio calculada. El 33% restante (estudiantes A, E y G) sólo expresó de dónde obtuvo la base de su función exponencial. Ejemplo de los estudiantes que presentaron su razonamiento es el estudiante J, quién además de haber realizado sus cálculos redactó una explicación: “Para hallar el cambio de población anual, tenemos que sacar la razón de dos cantidades proporcionadas y luego sacar el promedio. Este promedio será el crecimiento anual (8%)”. El estudiante trató de explicar que aunque la razón de cambio entre las poblaciones finales no fuese la misma podría determinar la tasa de crecimiento anual a partir del promedio de éstas.

4.2.5.1.4 Razonamiento bidireccional

Con el inciso 2 de la actividad 6 de la secuencia (¿Cuál es la población de manatíes que introdujeron en la Laguna de las Ilusiones?) se pretendía que los estudiantes generaran un razonamiento bidireccional a partir de cualquiera de las representaciones de la función exponencial. El 35% del grupo (estudiantes C, E y F) determinó la población inicial (“para cero años transcurridos”) empleando la función exponencial. Las operaciones del estudiante C representan el procedimiento realizado por estos alumnos (Figura 4.51). El estudiante C representó con $P1$ la población inicial que buscaba. A partir de haber determinado anteriormente la razón de cambio entre poblaciones finales asoció $P1$ a la base de la función exponencial la cual elevó a la séptima potencia. Es decir, para obtener $P1$ consideró la población que tendría el santuario para el séptimo año. El estudiante C escribió el procedimiento de despeje, aunque olvidó igualar 15.75 a P1.

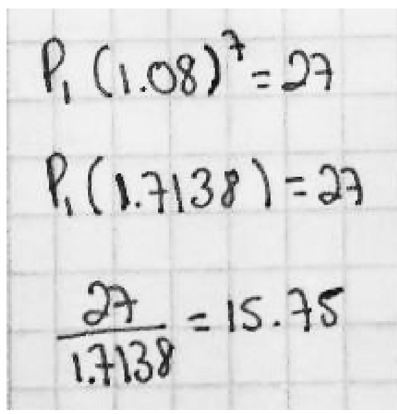


Figura 4. 51 Procedimiento algebraico del estudiante C para el inciso 2 de la actividad 6.

El 22% del grupo (estudiante G y J) explicó haber determinado la población inicial empleando la gráfica de la función exponencial. El estudiante G señaló “Conforme a la gráfica se puede ver que la población inicial es de aprox 20 manatíes en la laguna de las Ilusiones”, y el estudiante J indicó “18 manatíes es la población inicial. Comprobado con NetLogo”.

El 43% restante del grupo no expresó justificación de sus respuestas y sólo señaló que la población inicial era de 18 manatíes.

4.2.5.1.5 Planteamiento de la función exponencial creciente

El 100% de los estudiantes logró responder el inciso 3 de la actividad 6 de la secuencia: Determina la expresión con la cual podemos determinar la cantidad de manatíes en cualquier periodo de tiempo. Los estudiantes expresaron haber construido la función exponencial para la actividad a partir de los procedimientos generado para resolver los dos incisos previos. Ejemplo de este razonamiento es el presentado por el estudiante A: “Y pues cambio 1.08. Para 18 manatis población inicial la expresión sería $P_0(1.08)^1 = P \ldots\ P_i(1.08)^A$”.

4.2.5.2 Presentación de modelos, retroalimentación y evaluación, así como de conceptos matemáticos inmersos en ellos

En la sexta sesión se generó la discusión grupal, con base en los procedimientos construidos por los estudiantes para resolver la actividad 6, los cuales fueron similares. El docente, con el fin de reflexionar sobre los conocimientos de función exponencial, variación, razón y tasa de cambio, solicitó un voluntario para presentar sus procedimientos. El estudiante E participó (Figura 4.52).

Surgió además una discusión a partir de la solución generada para el inciso 2 de la actividad 6 planteada por el estudiante G: “¿Por qué en la gráfica la población inicial era cercana a 20 y despejando nos da 15.75?” [Cuando el estudiante G mencionó “despejando” quiere decir a partir de la expresión algebraica].

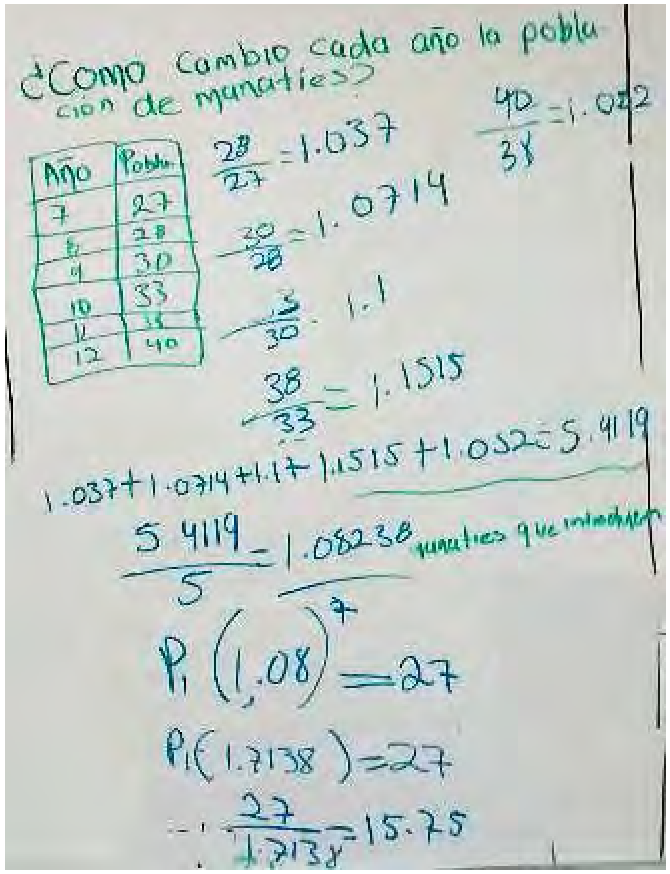


Figura 4. 52 Presentación de procedimientos del estudiante E para la actividad 6.

El docente apoyó con preguntas para reflexionar sobre las dos expresiones con diferente población inicial construidas por ellos mismos ($P = 15.75(1.08)^x$; $P = 18\ (1.08)^x$). Entre las conclusiones surgidas fueron: “Los modelos matemáticos sirven para dar una aproximación de cómo va crecer la población”, “mientras más datos se consideren en la tabla mejor podremos pronosticar nuestra población inicial”, “es mejor utilizar tres decimales que uno al calcular la tasa de crecimiento”.

El docente cerró la actividad 6 con la pregunta ¿Podríamos realizar un análisis como éste para una situación como la de los manatíes enfermos? La finalidad fue introducir la actividad 7 de la siguiente sesión.

4.2.5.3 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación sexta actividad

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos exhibidos por los estudiantes en sus reportes escritos de la actividad 6 antes de la discusión grupal (Tabla 4.6):

Conocimientos exhibidos por los estudiantes		**Identificación de variables y dependencia**	**Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio**	**Determinación de la tasa de cambio**	**Razonamiento bidireccional**	**Planteamiento algebraico de la función exponencial creciente**
Estudiantes	**A**	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación solamente de la base de la función exponencial.	No presentó información	Alcanzado.
	B	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	No presentó información	Alcanzado.
	C	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	Emplearon la función exponencial	Alcanzado.
	D	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	No presentó información	Alcanzado.
	E	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación solamente de la base de la función exponencial.	Emplearon la función exponencial	Alcanzado.
	F	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	Emplearon la función exponencial	Alcanzado.
	G	A partir de los datos de la tabla. Explicitándolo	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación solamente de la base de la función exponencial.	Emplearon representación gráfica. Observó intersección.	Alcanzado.
	H	No presentó información				
	I	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	Emplearon representación gráfica. Observó intersección.	Alcanzado.
	J	A partir de los datos de la tabla. Explicitándolo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa del 8% anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	Emplearon representación gráfica. Observó intersección.	Alcanzado.

Tabla 4. 6 Conocimientos exhibidos por estudiantes en actividad 6

Al concluir la Actividad 6 se observó que los estudiantes generaron cierta habilidad para interpretar y relacionar diferentes representaciones de la función exponencial creciente; asociar sus características a conceptos matemáticos; construir una representación a partir de otra.

4.2.6 Actividad 7. Modelación algebraica, tabular y gráfica de una actividad de decrecimiento poblacional que implica una función exponencial decreciente de la forma $\boldsymbol{f(x) = k(1-c)^x}$ donde $x \in \mathbb{Z}^+; k = 101, 117; c = 0.77, 0.84$

La séptima actividad de la secuencia fue realizada como tarea extraescolar de forma individual, consistió en el análisis de la forma gráfica de la función exponencial decreciente. La actividad *7* (Anexo) es posterior a las actividades programadas a realizar con ayuda del software NetLogo y consiste en que el estudiante le explique a Saori cómo es la disminución en la población de manatíes considerando que sería afectada por dos factores que generan tasas de mortalidad diferentes. Al estudiante se le entrega una tabla con información acerca de crecimiento poblacional de manatíes en un periodo de 6 a 10 años y una gráfica la cual incluye la población de manatíes en función del tiempo, en un periodo de 0 hasta 15 años. El estudiante debía deducir la población inicial, la tasa de decrecimiento así como la expresión algebraica exponencial $f(x) = k(1-c)^x$que le pudiera ayudar a conocer la población restante al final de cada año a partir de la información proporcionada. La expresión debería ayudarle para analizar una situación similar cuya población inicial fuera diferente.

Los objetivos eran que los estudiantes le dieran significado a los conceptos como variación, tasa de cambio, dominio y rango, al variar los parámetros de la función exponencial en su representación gráfica. Se pretendía que los estudiantes analizaran una familia de problemas cuyo comportamiento siguiera un modelo exponencial decreciente.

4.2.6.1 Descripción de los procedimientos presentados por los estudiantes al realizar la actividad 7

La tarea fue entregada por todo el grupo del cual sólo el 30% del grupo (estudiantes D, E y J) describió detalladamente sus procedimientos. Los cuales se describen en seguida.

4.2.6.1.2 Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio decreciente

De acuerdo con las respuestas de los estudiantes se pudo observar que el 100% del grupo (estudiantes A, B, C, D, E, F, G, H, I y J) inició la identificación de variables y dependencia a partir de las tablas que se les entregaron. Determinaron la razón de cambio entre la población final e inicial de cada periodo proporcionada por la tabla. El procedimiento del estudiante E es un ejemplo en el cual se puede observar cómo identificó que podía abordar las dos situaciones de la actividad (accidentes de pesca y caza con arpón) empleando el mismo procedimiento. Es decir, el estudiante E transfirió conocimiento (Figura 4.53).

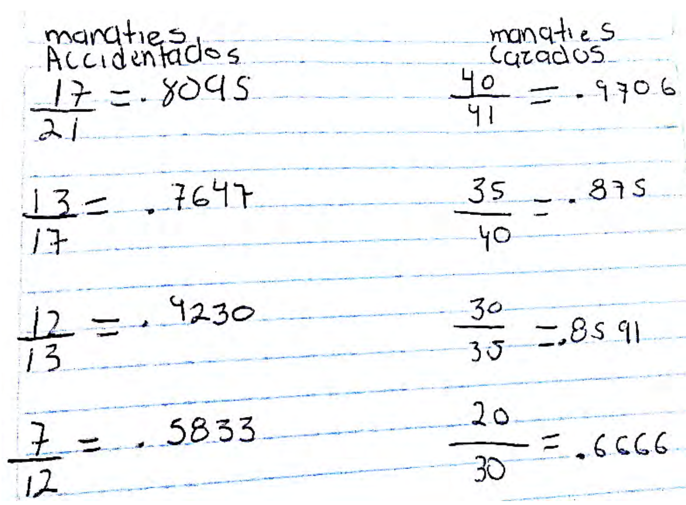


Figura 4. 53 Cálculo de razones de cambio por el estudiante E para la actividad 7.

El 100% del grupo calculó una razón de cambio promedio con las razones de cambio obtenidas. Por ejemplo, en el procedimiento del estudiante I se puede observar que sumó las razones de cambio (3.08069944) y las dividió entre cuatro que fue la cantidad de razones determinadas:

$$\frac{3.08069944}{4} = 0.77$$

Sólo el 30% del grupo (estudiantes D, E y J) además de sus procedimientos numéricos incluyó la explicación de estos. Evidencia de ello es la redacción presentada por el estudiante J: “Para determinar la tasa de mortalidad debemos sacar el promedio con los datos que nos proporcionan. Dividir $\frac{P_i}{P_f}$ (población inicial entre población final), luego sumarlos y dividirlos entre la cantidad de resultados, nos dará 0.77 y 0.84”. El estudiante explicó que primero debía calcular la razón de cambio entre la población inicial y final de cada periodo, una vez determinados obtuvo la razón de cambio promedio anual para cada situación de la actividad (manatíes accidentados y manatíes cazados). Los estudiantes D y E calcularon la razón de cambio al dividir $\frac{P_f}{P_i}$, lo cual ayudó a reflexionar sobre la información que proporcionaba cada tasa de cambio en la sesión de discusión en clase (Sección 4.2.6.2).

4.2.6.1.3 Determinación de la tasa de cambio decreciente

Sólo el 30% del grupo (estudiantes A, C y F) determinó cuál fue la tasa de cambio decreciente. El procedimiento que se empleó puede ser ejemplificado con el del estudiante C:

$$1 - T = 0.77 \qquad -1T = -0.23$$

$$-T = 0.77 - 1 \qquad T = \frac{-0.23}{-1}$$

$$-T = -0.23 \qquad T = 0.23$$

El estudiante relacionó la razón de cambio promedio encontrada (0.77) con la base de la función exponencial construida en una actividad anterior ($1 - T$). Igualó $1 - T = 0.77$ y posteriormente despejó T, encontrando $T = 0.23$.

4.2.6.1.4 Razonamiento bidireccional

El 70% del grupo (estudiantes A, B, D, E, G, I y J) realizó un razonamiento bidireccional a partir de la expresión algebraica obtenida, al buscar la población inicial que se solicitaba para cada situación de la actividad 7 (mortalidad por enmalles y mortalidad por caza con arpón). Ejemplo de ello son los procedimientos del estudiante E (Figura 4.54), quien construyó una función exponencial. Para ello uso la razón de cambio obtenida de la población final e inicial de cada periodo, la población al final (21 manatíes) del sexto año (exponente 6); representó como incógnita al valor de la población inicial (Mai) y obtuvo su valor (100.76).

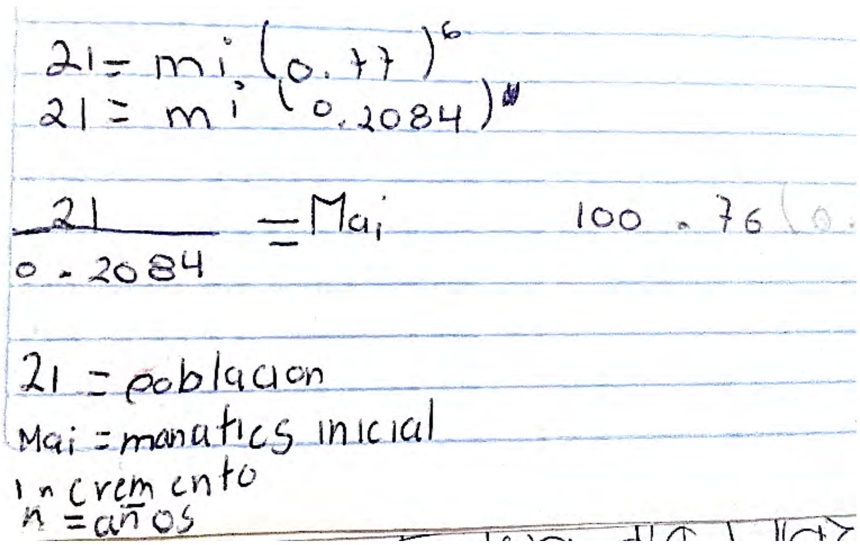


Figura 4. 54 Análisis bidireccional realizado por el estudiante E para la actividad 7. Determinación de población inicial empleando información de representación tabular en función exponencial.

El 30% del grupo no calculó la población inicial (estudiantes C, F y H).

4.2.6.1.5 Planteamiento expresión exponencial decreciente

El 80% de los estudiantes (A, B, D, E, G, H, I y J) construyó y propuso el empleo de la función exponencial decreciente como un método que le serviría a Saori para determinar si debería dejar libres a los manatíes de su santuario. La función exponencial fue construida a partir de la información generada en sus procedimientos previos. Transfirieron el conocimiento utilizado al resolver la actividad 6 de la secuencia. Ejemplo de este razonamiento es el presentado por el estudiante J, quien construyó una función exponencial para la situación de enmalles ($P_F = 100.76(0.77)^A$) y otra para situación de caza por arpón ($P_F = 116.74(0.84)^A$). Reconoció que podía utilizar éstas para el santuario de Chetumal pero empleando la población inicial correspondiente. En la Fig. 4.55 se observa la transferencia de sus procedimientos: "Para determinar la del santuario de Chetumal, usaremos la misma solo cambiaremos la población inicial".

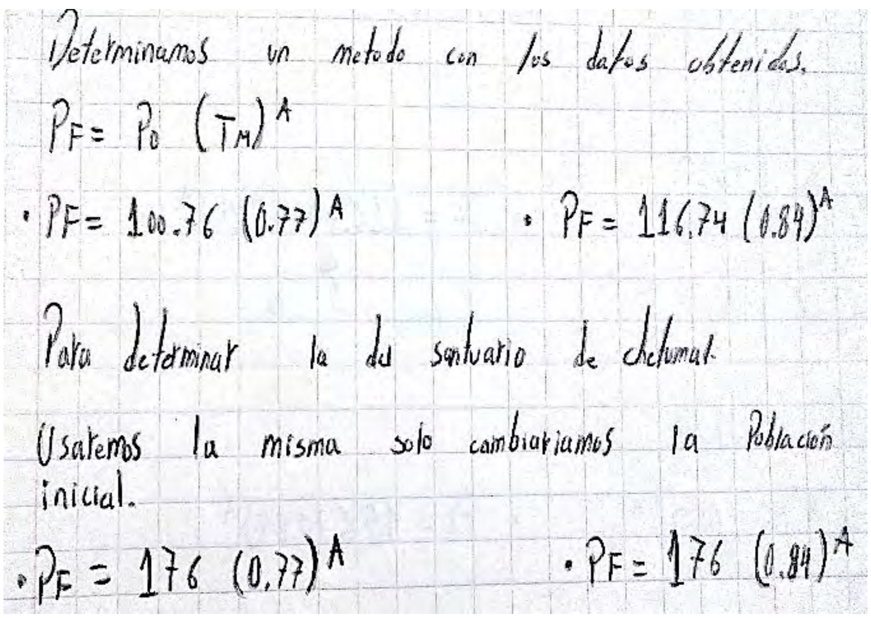


Figura 4. 55 Planteamiento de la función exponencial decreciente por el estudiante J para la actividad 7. Transferencia de los procedimientos empleados en la actividad 6.

El 20% del grupo (estudiantes C y F) no logró plantear la función exponencial decreciente. Empleó un procedimiento recursivo.

4.2.6.2 Presentación de modelos, retroalimentación y evaluación, así como de conceptos matemáticos inmersos en ellos

La séptima sesión consistió en la discusión grupal con base en los procedimientos construidos para resolver la actividad 7. El docente a partir de los procedimientos realizados por los estudiantes solicitó a los estudiantes F y A que compartieran sus procedimientos para reflexionar a partir de ellos. En el orden en que se mencionan los estudiantes fue en el que presentaron sus procedimientos, decisión tomada por el docente con el fin de complementar ambos modelos.

El estudiante F quien presentó primero, explicó sus procedimientos recursivos (Figura 4.56). Inicialmente, intentó explicar que la tasa de cambio decreciente la obtuvo a partir de calcular la razón de cambio entre la población inicial y final de cada periodo $\left(\frac{176}{100}\right)$, el resto del grupo no estuvo de acuerdo y comentó "no en ese orden se calculaba la razón de cambio". Los estudiantes se referían a que la comparación debía realizarce de forma inversa $\left(\frac{100}{176}\right)$. El estudiante F no se convenció al recibir el comentario de sus compañeros, pero cambió sus procedimientos empleando uno al cual nombraban "regla de tres simple" (Figura 4.57) con el cual logró terminar de explicar la solución de la actividad.

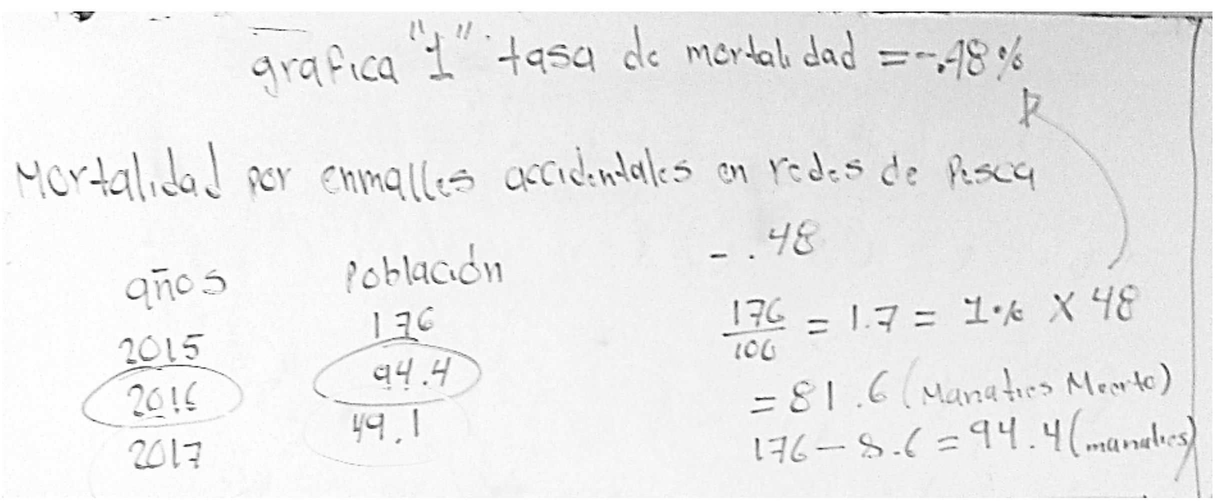


Figura 4. 56 Presentación de primer procedimiento del estudiante F para la actividad 7. Determinación de razón de cambio.

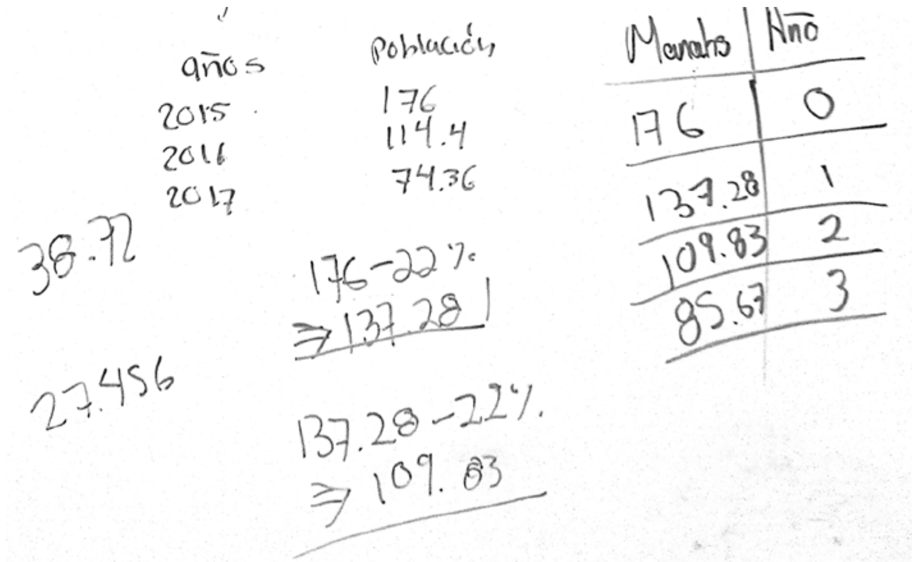


Figura 4. 57 Presentación de segundo procedimiento del estudiante F para la actividad 7. Empleo de "regla de tres simple"

El estudiante A explicó la construcción y el empleo de la función exponencial decreciente como el método que le serviría a Saori para determinar si debería dejar libres a los manatíes de su santuario (Figura 4.58). La conclusión de este estudiante fue que deberían liberar sólamente a una parte de la población, ya que si liberaran a la totalidad y sucedieran tanto las muertes por redes como por arpón, la población de manatíes disminuiría a una tasa del 41% por año.

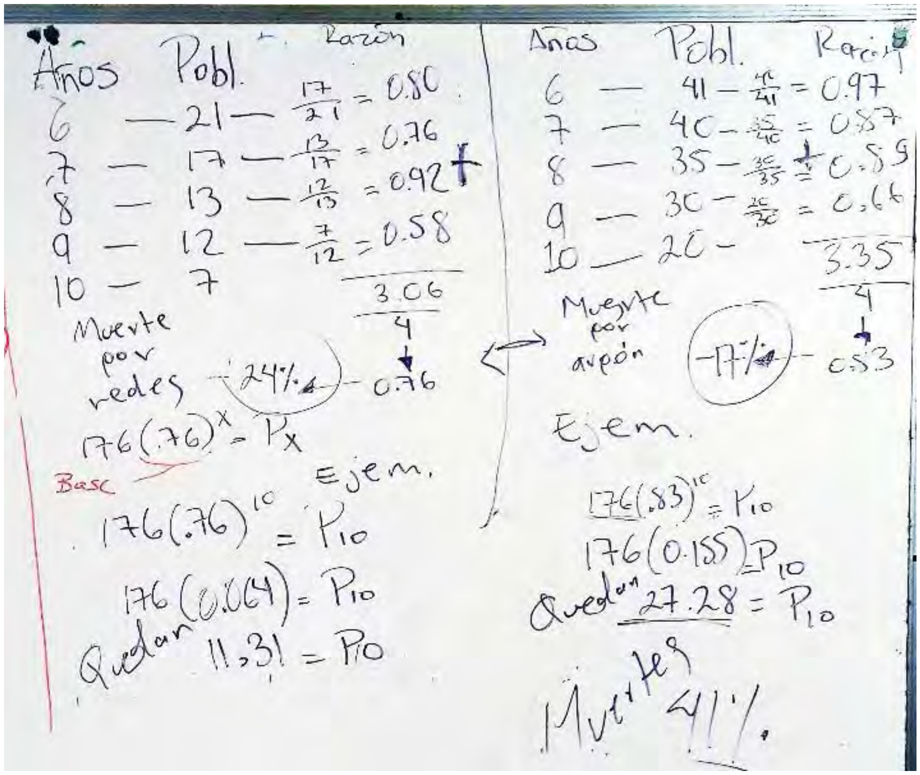


Figura 4. 58 Procedimientos presentados por el estudiante A para la actividad 7. Empleo de función exponencial decreciente.

El docente cerró la actividad preguntando qué procedimiento preferirían y por qué. El grupo comentó que el empleo de la función exponencial era un procedimiento “rápido”, con esto se referían a que no requerían emplear métodos recursivos.

4.2.6.3 Observaciones de los resultados obtenidos con la implementación séptima actividad

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos exhibidos por los estudiantes en sus reportes escritos de la actividad 7 antes de la discusión grupal (Tabla 4.7):

Conocimientos exhibidos por los estudiantes		**Identificación de variables y dependencia**	**Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio decreciente**	**Determinación de la tasa de cambio decreciente**	**Razonamiento bidireccional**	**Planteamiento expresión exponencial decreciente**
Estudiantes	**A**	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa decreciente del 24% para enmalles y del 17% por caza con arpón anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	B	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	C	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa decreciente del 23% para enmalles y del 17% por caza con arpón anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	No hubo	No la planteó
	D	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	E	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	F	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	Determinación de tasa decreciente del 23% para enmalles y del 17% por caza con arpón anual, a partir de razón de cambio promedio obtenida.	No hubo	No la planteó
	G	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	H	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	No hubo	Alcanzado
	I	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado
	J	A partir de los datos de la tabla. Sin explicitarlo.	A partir de la razón de cambio entre población inicial y final en cada periodo,	No la determinó	A partir de información tabular construcción de función exponencial.	Alcanzado

Tabla 4. 7 Conocimientos exhibidos por estudiantes en la actividad 7

En la Actividad 7 se observa que los estudiantes mejoraron su habilidad para describir de forma escrita las situaciones y para transferir sus modelos empleados en actividades en las que se trabajó con la función exponencial creciente a situaciones relacionadas con la función exponencial decreciente.

4.2.7 Evaluación. Modelación de una actividad que implica las representaciones de la función exponencial creciente de la forma $f(x)=k(1+c)^{x}$ **donde** $x\in Z^{+};\ k=2000;\ c=0.24, 0.02$. **Modelación de una actividad que implica las representaciones de la función exponencial decreciente de la forma** $f(x)=k(1-c)^{x}$ **donde** $x\in Z^{+};\ k=6400;\ c=-0.30$

La octava actividad (Anexo) de la secuencia fue una actividad de adaptación de modelos que realizaron los estudiantes de forma individual a modo de evaluación del aprendizaje logrado al final de la secuencia. En esta actividad, implementada en la octava sesión de clases, se requería de un anális basado tanto en la función exponencial creciente como decreciente.

La Actividad 8 consistía en que el estudiante debía explicar a José a qué tasa de interés debía invertir cierta cantidad de dinero considerando que quería alcanzar un *fondo* para comprar una consola de videojuegos, dado que existían dos tasas de inversión distintas para diferentes periodos. El estudiante debía explicar a José cómo se devaluaba el valor la consola de videojuegos considerando que una vez adquirido el aparato, éste disminuía a una tasa del 30% anual.

El estudiante debía deducir que la tasa de crecimiento a 2% mensual era mejor que la de 24% anual; debía construir la función algebraica exponencial $f(x)=k(1+c)^{x}$ que le pudiera ayudar a conocer en qué periodo alcanzaría José el ahorro deseado. Además, el estudiante debía deducir la expresión algebraica exponencial $f(x)=k(1-c)^{x}$que le pudiera ayudar a conocer en qué periodo la consola dejaría de tener valor, por lo tanto también requería utilizar logaritmos.

4.2.7.1 Descripción de los procedimientos presentados por los estudiantes al realizar la actividad 8

La tarea fue entregada por todo el grupo al docente. En seguida se presentan los procedimientos utilizados por los estudiantes.

4.2.7.1.2 Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio creciente

El 20% del grupo (alumnos B y E) inició determinando el incremento que tendría el dinero invertido en el primer periodo para cada tasa de crecimiento de cada opción de inversión (Figura 4.59). Los procedimientos del estudiante B son un ejemplo, en el cual se puede observar cómo empleó el procedimiento al que nombraba, desde actividades anteriores, "regla de tres simple" para calcular el incremento en el primer periodo correspondiente a la tasa de inversión mensual del 2%. Posteriormente, se observa que el estudiante consideró que el incremento mensual (40 mensual) sería constante y determinó el incremento para un año (4800 anual) multiplicándolo por los doce meses. Finalmente, el estudiante escribió que la proporción del incremento mensual con respecto al fondo inicial correspondía a la tasa de crecimiento

$$\frac{480}{2000} = 0.24$$

Se observa que el estudiante empleó el mismo procedimiento para la tasa anual, es decir, el estudiante B transfirió conocimiento (Figura 4.59).

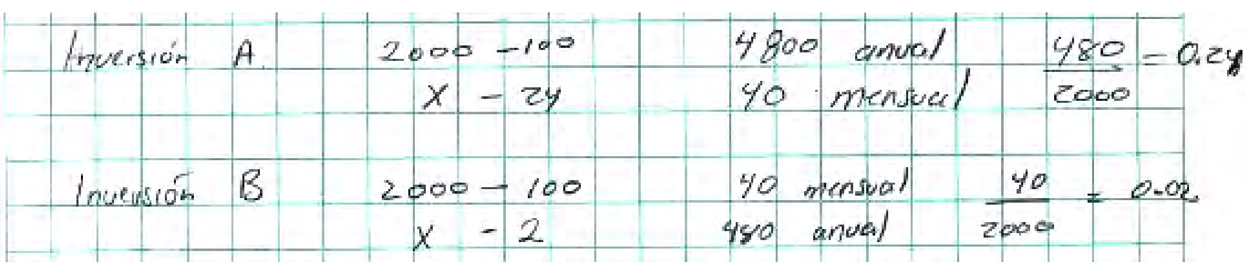


Figura 4. 59 Procedimientos presentados por el estudiante B para la actividad 8. Determinación del incremento para cada tasa de inversión en el primer periodo

El 10% del grupo (alumno F) también realizó el procedimiento nombrado como "regla de tres simple" hasta el quinto periodo (Figura 4.60).

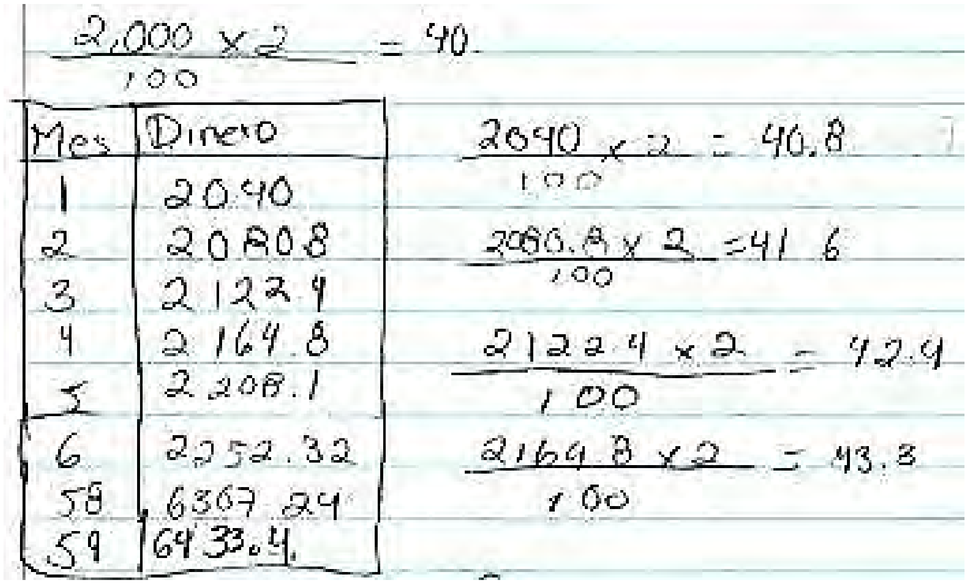
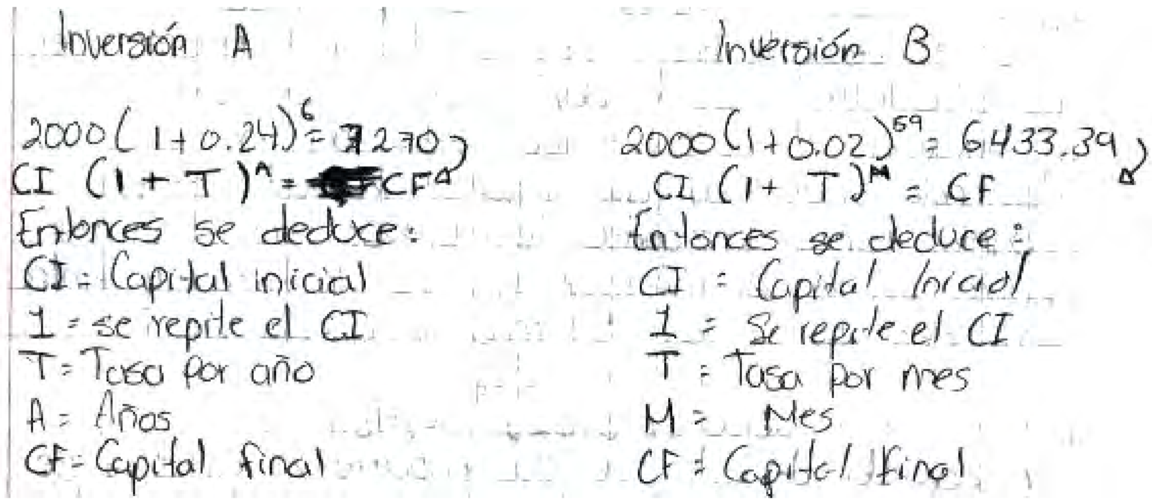


Figura 4. 60 Procedimientos presentados por el estudiante F para la actividad 8. Determinación del incremento para cada tasa de inversión en el primeros cinco periodos.

Estos estudiantes modificaron el procedimiento inicial de *regla de tres* para emplear posteriormente una expresión exponencial.

4.2.7.1.3 Planteamiento expresión exponencial creciente

El 100% del grupo (estudiantes A, B, C, D, E, F, G, H, I y J) logró plantear una expresión exponencial. Cada estudiante empleó su propia simbología para representar los términos, ejemplo de ello son los registros del estudiante H (Figura 4.61). Se puede observar que el estudiante construyó una expresión que le fue de utilidad para calcular el ahorro de acuerdo con cada tasa planteada, si era anual ($2000(1+0.24)^{6} = 7270$) o si era mensual ($2000(1+0.02)^{59} = 6433.39$).



Inversión A

$2000(1+0.24)^6 = 7270$

$CI\ (1+T)^A = CF^A$

Entonces se deduce:

CI = Capital inicial

1 = se repite el CI

T = Tasa por año

A = Años

CF = Capital final

Inversión B

$2000(1+0.02)^{59} = 6433.39$

$CI\ (1+T)^M = CF$

Entonces se deduce:

CI = Capital Inicial

1 = Se repite el CI

T = Tasa por mes

M = Mes

CF = Capital final

Figura 4. 61 Procedimientos presentados por el estudiante F para la Actividad 8. Determinación del la expresión exponencial para calcular el incremento para cada tasa de inversión en el primeros cinco periodos.

4.2.7.1.4 Razonamiento bidireccional correspondiente a la tasa de cambio creciente

El 100% del grupo (estudiantes A, B, C, D, E, F, G, H, I y J) eligió la inversión B (Figura 4.62) como la que permitiría a José alcanzar su ahorro en el menor tiempo. En seguida se muestran los procedimientos que justificaron esta elección.

El 60% del grupo (estudiantes B, C, E, F, G, H) determinó al “tanteo” el periodo en el cual José alcanzaba el ahorro requerido. El procedimiento del estudiante G es un ejemplo de lo que los estudiantes nombran como “tanteo”. Construyó una expresión exponencial para la tasa de inversión anual (Figura 4.62, izquierda) y fue sustituyendo diferente cantidad de años (valores del exponente) hasta que encontró que en el sexto año José alcanzaba el ahorro deseado ($2000(1+.24)^6 = 7240.43$). Se puede observar que el estudiante utilizó solamente valores que correspondían a los números enteros positivos; transfirió conocimiento al emplear el mismo procedimiento para la tasa mensual (Figura 4.62, derecha), donde sustituyó valores de 5 en 5 y encontró que en el sexto año José alcanzaría el ahorro deseado ($2000(1+.24)^6 = 7240.43$).

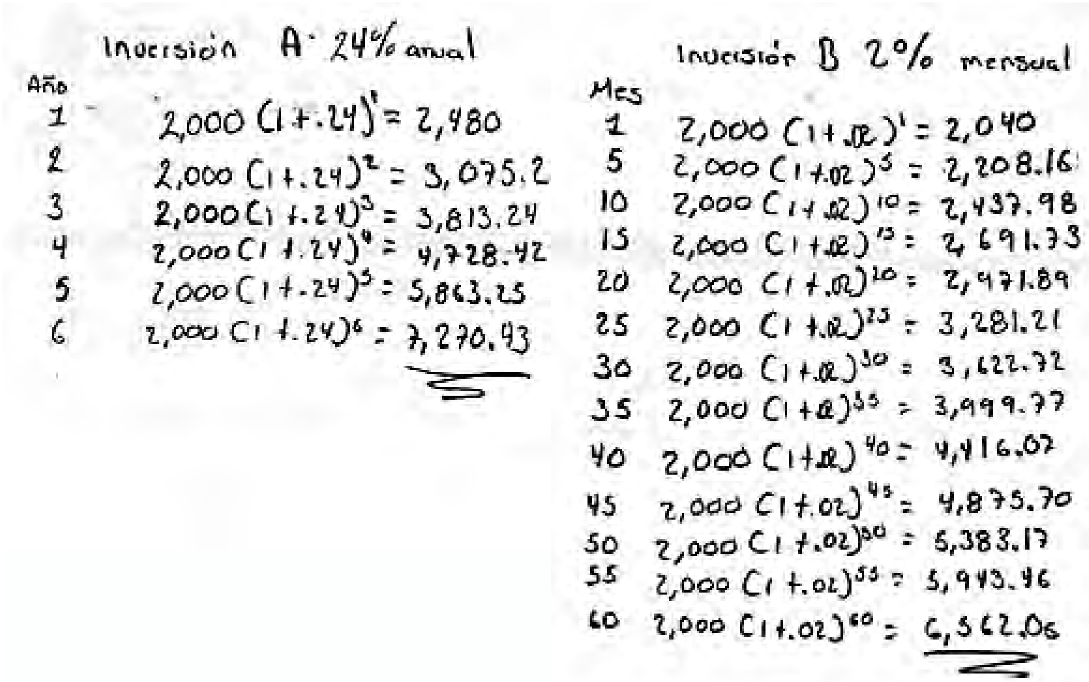


Figura 4. 62 Procedimientos presentados por el estudiante G para la actividad 8. Comparación del incremento para cada tasa de inversión.

El otro 40% del grupo (estudiantes A, D, I, J) determinó el periodo en el que José alcanzaba el ahorro deseado de acuerdo con cada tasa empleando logaritmos; el procedimiento del estudiante D (Figura 4.63) es un ejemplo. El estudiante despejó el exponente (periodo en años) en la expresión exponencial para la inversión anual A $(2000(1.24)^{A} = 6400)$. El estudiante mostró cierta dificultad para expresar el uso de logaritmos ya que escribió $Log\ A1.24 = \log 32$ en lugar de $ALog\ 1.24 = \log 32$, pero en su calculadora realizó correctamente las operaciones. Esta dificultad se observó en los procedimientos de los estudiantes A, D y J.

El estudiante D empleó el mismo procedimiento en la expresión exponencial para la inversión B (Figura 4.64). Es decir transfirió su conocimiento.

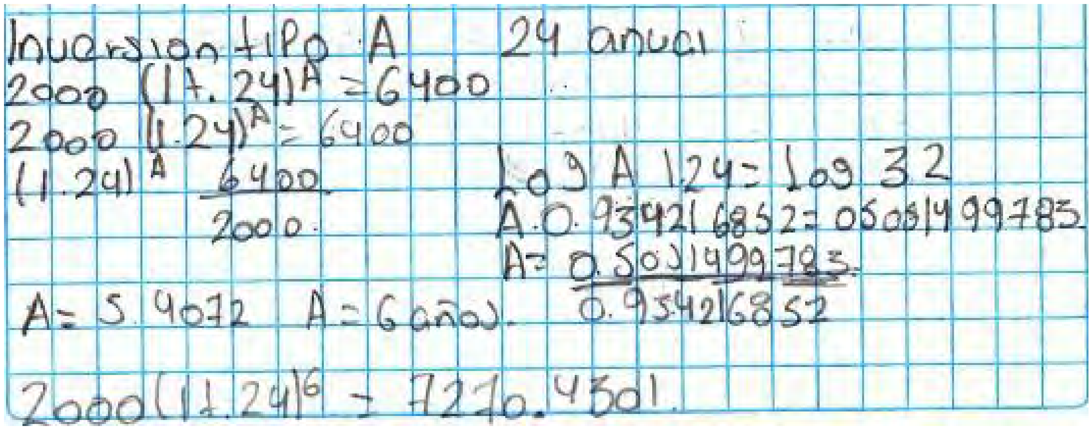


Figura 4. 63 Procedimientos presentados por el estudiante D para la Actividad 8. Determinación del periodo para la inversión tipo A empleando logaritmos.

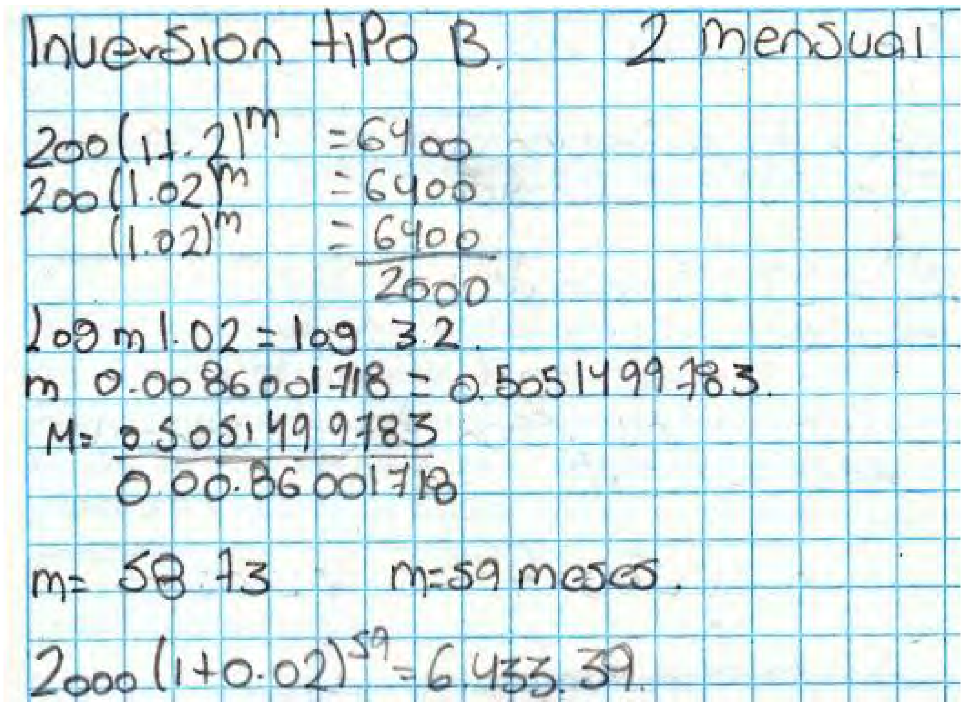


Figura 4. 64 Procedimientos presentados por el estudiante D para la Actividad 8. Determinación del periodo para la inversión tipo B empleando logaritmos.

Todos los estudiantes, sin importar el procedimiento empleado, lograron identificar que cada tasa de inversión correspondía a diferentes periodos y determinar una equivalencia entre ellas para poder compararlas. La explicación del estudiante H ejemplifica el razonamiento empleado (Figura 4.65). Para la inversión B (interés 2% mensual) el estudiante H dividió la cantidad de meses (en la que determinó que José alcanzaría el ahorro deseado) entre doce ($59/12 = 4.9$). El resultado de 4.9 lo convirtió a 4 años 11 meses, el cual pudo comparar con el tiempo en que alcanzaría el ahorro con la inversión A (interés 24% anual). El estudiante concluyó que convenía más la inversión B.

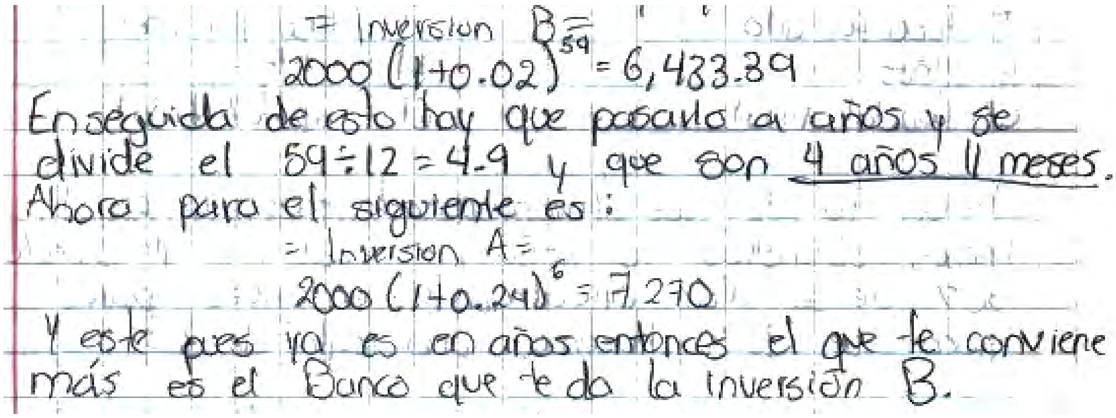

17 Inversion B_{59} =
$2000(1+0.02)^{59} = 6,433.39$
Enseguida de esto hay que pasarlo a años y se divide el $59 \div 12 = 4.9$ y que son 4 años 11 meses.
Ahora para el siguiente es:
= Inversion A =
$2000(1+0.24)^{6} = 7,270$
Y este pues ya es en años entonces el que te conviene más es el Banco que te da la inversión B.

Figura 4. 65 Procedimientos presentados por el estudiante H para la Actividad 8. Determinación del periodo para la inversión tipo B empleando logaritmos.

4.2.7.1.5 Representación gráfica correspondiente al problema de tasa de cambio creciente: variación, tasa de cambio, dominio, rango y ceros de la función

El 30% del grupo (estudiantes B, H, I) graficó solamente el incremento de la inversión elegida B. El estudiante B marcó con puntos las coordenadas correspondientes a los años transcurridos y el ahorro que tendría José, además los unió (Figura 4.66). Lo cual fue diferente a la gráfica realizada por los estudiantes H e I, quienes no los unieron, ejemplo de ello es la gráfica del estudiante I (Figura 4.67).

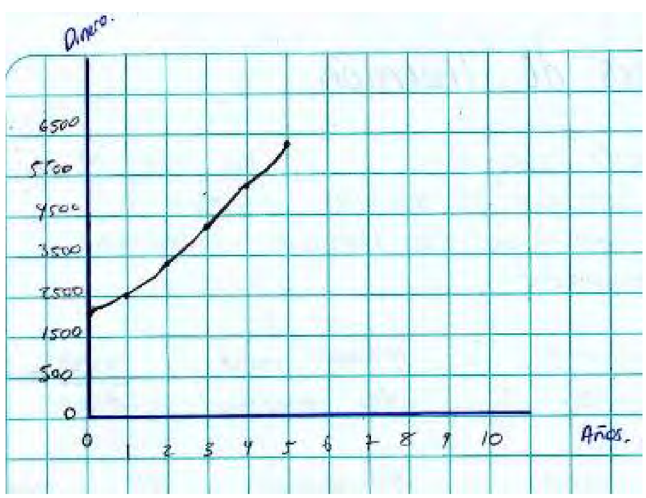


Figura 4. 66 Representación gráfica del estudiante B para la Actividad 8. Incremento para la inversión tipo B.

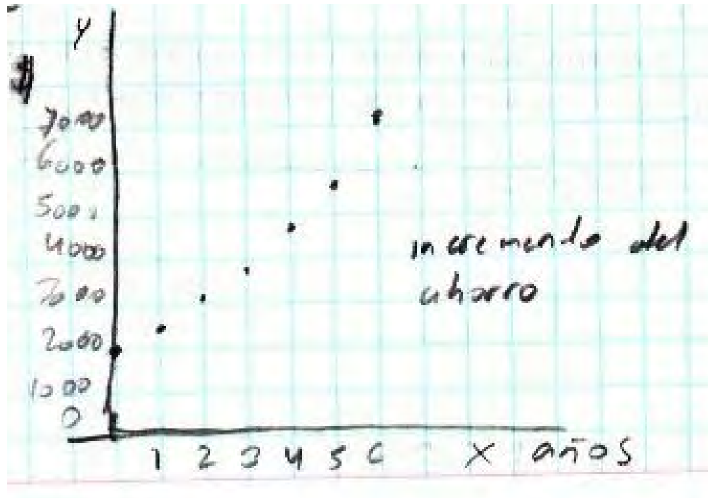


Figura 4. 67 Representación gráfica del estudiante I para la Actividad 8. Incremento para la inversión tipo B.

El otro 70% del grupo (estudiantes A, C, D, E, F, G, J) graficó el incremento de ambas inversiones. En este caso se observó que los alumnos C, E, F y G realizaron las gráficas por separado. De estos, los estudiantes E y G realizaron ambas gráficas sin ningún problema. Incluso el alumno E describió “se puede apreciar que va aumentando cada vez más a diferencia que a la primera” (Figura 4.68), el estudiante realizó una descripción cualitativa tratando de indicar que la gráfica de la inversión A (tasa 24% anual) requería mayor tiempo para alcanzar el ahorro ($6400) que la gráfica de la inversión B (tasa 2% anual).

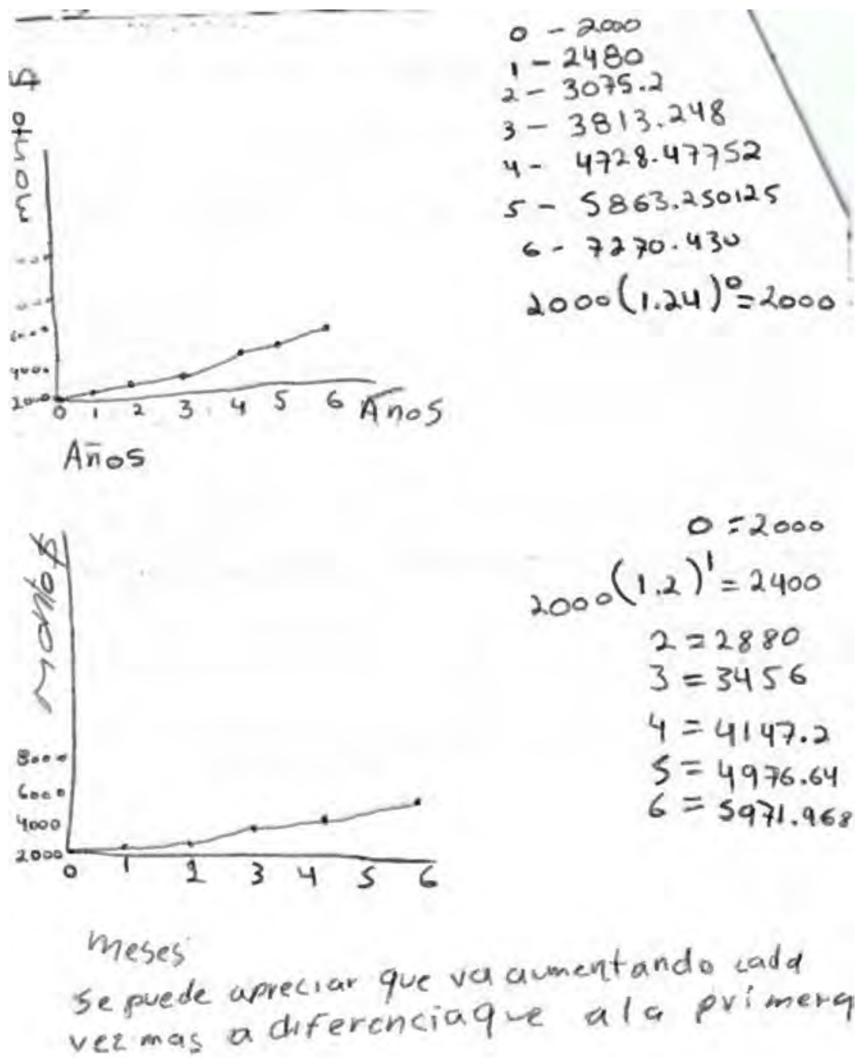


Figura 4. 68 Representación gráfica del estudiante E para la Actividad 8

A diferencia de las gráficas realizadas en las actividades anteriores de la secuencia donde las abscisas representaban el tiempo y las ordenadas el ahorro generado por la tasa de inversión elegida, el estudiante C nombró como ahorro a las abscisas y como tiempo a las ordenadas (Figura 4.69). El estudiante se dió cuenta de dicha situación e incluyó una nota tratando de explicar: “Profa la gráfica esta invertida”. Quizá debido a esta representación el estudiante tuvo dificultad para realizar las gráficas, las cuales inician en ambos casos en el origen de coordenadas en lugar de las coordenadas (2000, 0) y (0, 2000) para la primera y segunda gráfica, respectivamente.

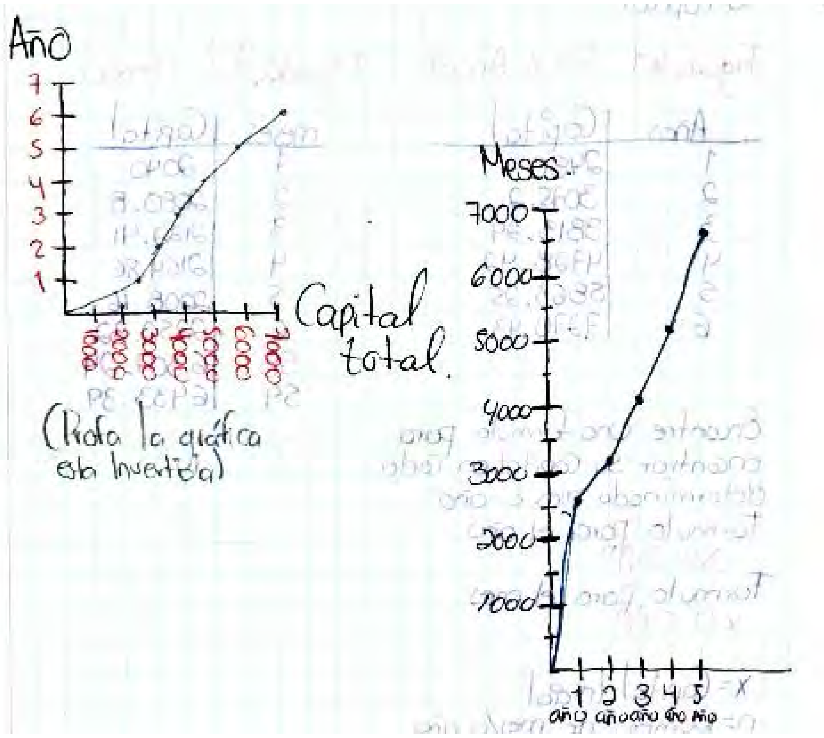


Figura 4. 69 Representación gráfica del estudiante C para la Actividad 8

En el caso del estudiante F se observa que intentó comparar las gráficas para indicar con cuál tasa se alcanzaría primero el ahorro. Mostró cierta dificultad en la escala utilizada en los valores del dominio (tiempo) de sus gráficas para cada expresión exponencial (Figura 4.70).

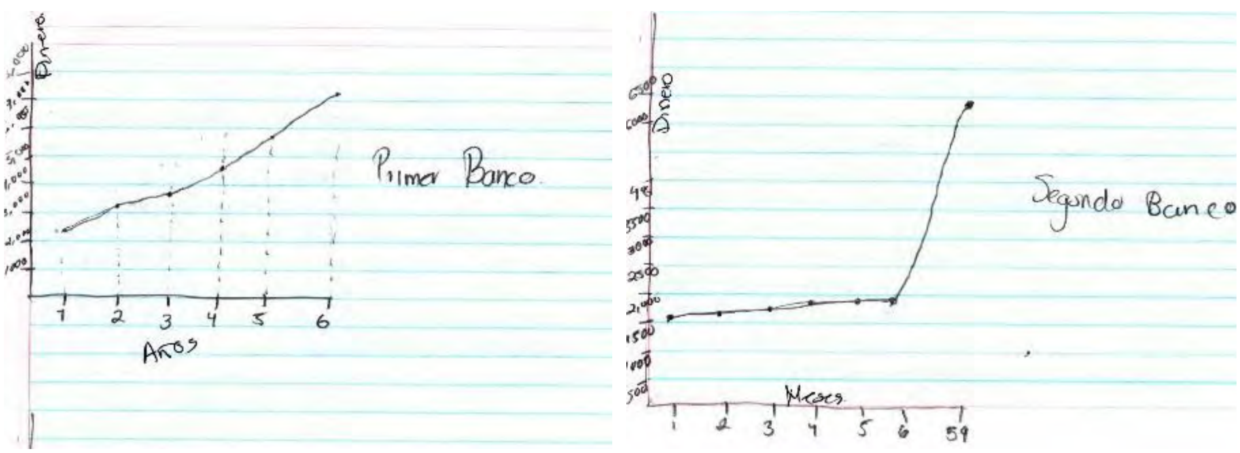


Figura 4. 70 Representación gráfica del estudiante F para la Actividad 8

En el caso de los estudiantes que realizaron sus gráficas en el mismo plano cartesiano se observaron dos escenarios. El caso de los estudiantes A y D y el caso del estudiante J. Los primeros trazaron gráficas lineales uniendo mediante dos segmentos de rectas, desde la coordenada (0, 2000) correspondiente al capital inicial hasta las coordenadas (6, 6400), (7.5, 7000) correspondientes al ahorro deseado de $6400.00. El estudiante A agregó la tasa de inversión a cada gráfica (Figura 4.71); mencionó que con la tasa de 2% mensual alcanzaría primero el ahorro, evidencia de ello es la nota que incluyó después de sus gráficas: "Entonces le combiene [*sic*] mensualmente la tipo B".

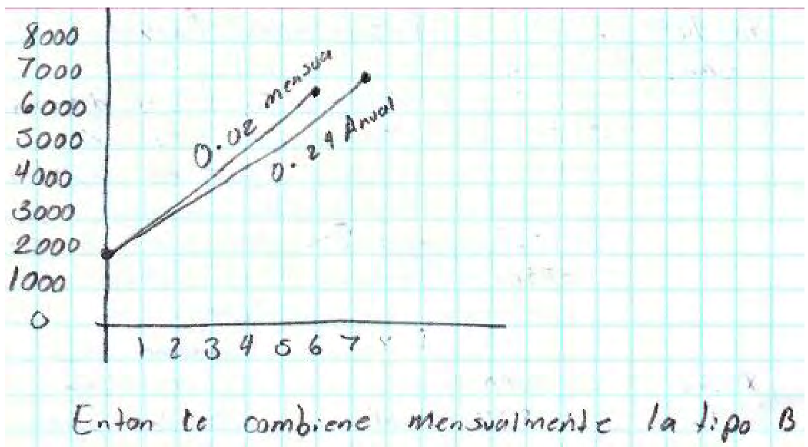


Figura 4. 71 Representación gráfica del estudiante A para la Actividad 8.

La otra representación gráfica que surgió fue la presentada por el estudiante J (Figura 4.72). Se puede observar que realizó las gráficas en forma discreta para cada tasa; diferenció con color rojo la tasa de crecimiento mensual a 2% de la tasa de crecimiento anual a 24% que graficó con color negro. El estudiante para poder comparar el crecimiento de cada inversión utilizó como dominio de la función los valores: 12, 24, 36, 48, 60 y 72.

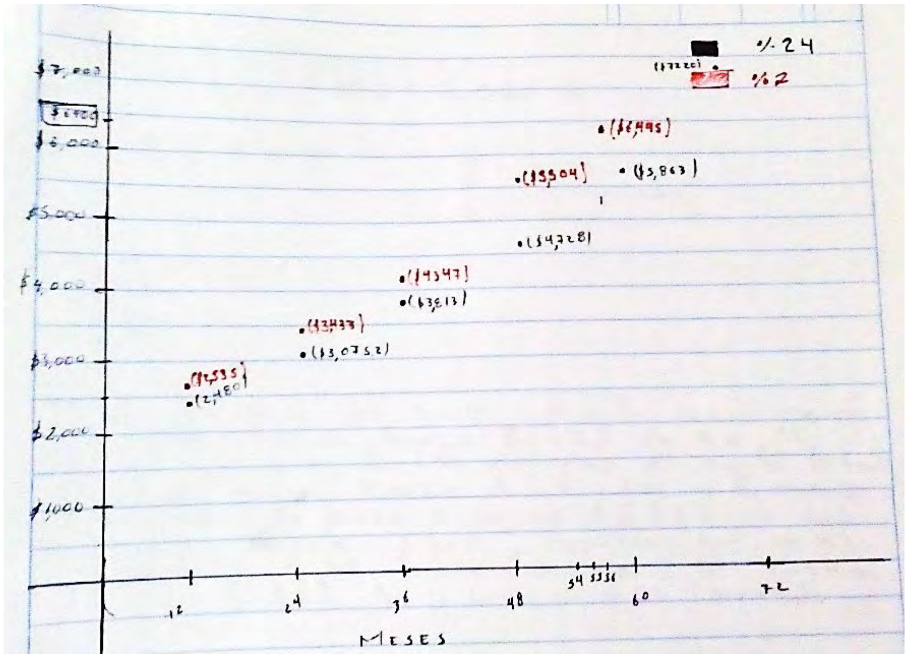


Figura 4. 72 Representación gráfica discreta de ambas tasas de crecimiento para la Actividad 8. Estudiante J

4.2.7.1.6 Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio decreciente

Para el análisis de la depreciación del valor de la consola de videojuegos, el 30% del grupo (alumnos C, E, F) lo realizó empleando métodos recursivos. Ejemplo de ello son los registros que se tienen del procedimiento presentado por el estudiante C (Figura 4.73), donde se observa que al valor original de la consola (6400) le restó el 30% del valor de éste (1920) obteniendo el valor que tendría al final del primer año. Se deduce que realizó este procedimiento de manera continua hasta que obtuvo el valor de la consola, que resultaba menor a un peso en el año 25.

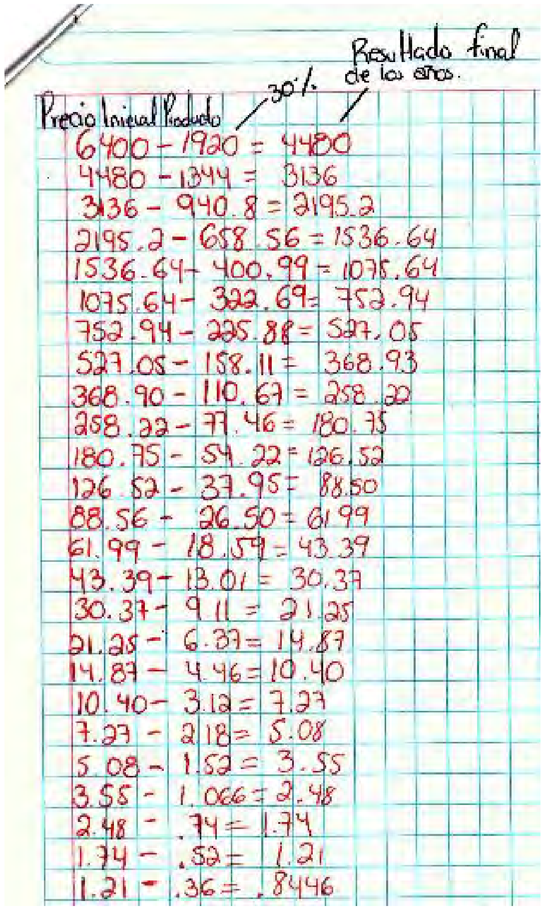


Figura 4. 73 Procedimientos presentados por el estudiante C para la Actividad 8. Determinación de la depreciación del valor de la consola de videojuegos.

4.2.7.1.7 Planteamiento expresión exponencial decreciente

El otro 70% (alumnos A, B, D, G, H, I, J) del grupo planteó una expresión exponencial para determinar la depreciación de la consola de videojuego. Se observó que los estudiantes G, I, J construyeron un expresión exponencial que les sirvió solamente con la información proporcionada en la actividad; el procedimiento del estudiante I es un ejemplo (Figura 4.74). Se observa que aunque el estudiante planteó la expresión exponencial determinó el valor del equipo para periodos consecutivos.

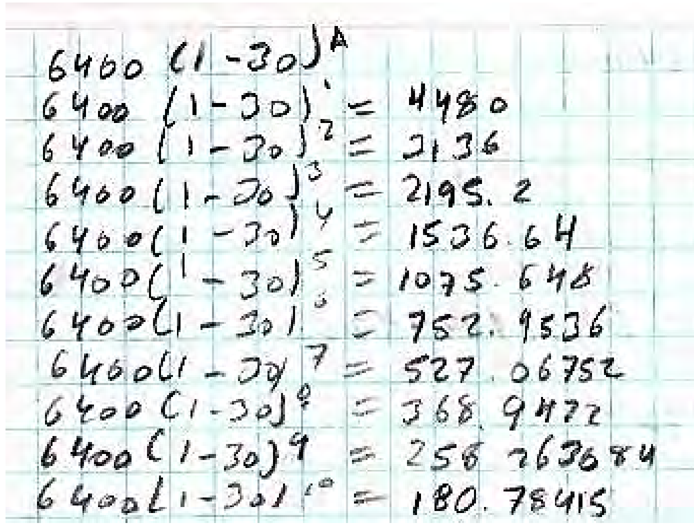


Figura 4. 74 Procedimientos presentados por el estudiante C para la Actividad 8. Determinación de la depreciación del valor de la consola de videojuegos empleando una expresión exponencial

Por otro lado los estudiantes A, B, D, H además de plantear la expresión exponencial para la situación particular de depreciación lograron generalizarla para cualquier contexto similar. Se puede observar la generalización en el procedimiento del estudiante H (Figura 4.75), quien planteó la expresión para la depreciación de la consola de videojuego en el primer año $\left(6400(1-0.3)=4480\right)$ y luego en el año 40 $\left(6400(1-0.3)^{40}=0.004\right)$. Finalmente, el estudiante generalizó la expresión exponencial expresándola de forma algebraica $\left(PI(1-Tasa)^{A}=PF\right)$ y explicó el significado de la simbología empleada.

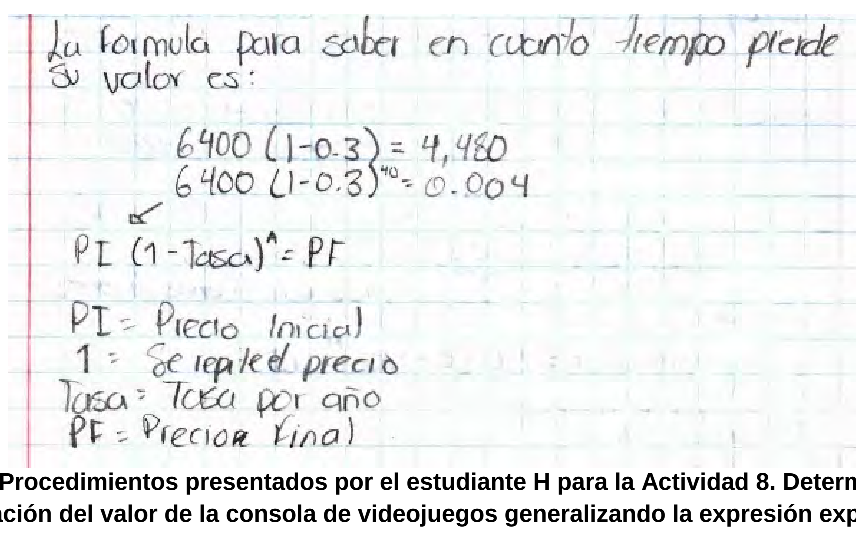


Figura 4. 75 Procedimientos presentados por el estudiante H para la Actividad 8. Determinación de la depreciación del valor de la consola de videojuegos generalizando la expresión exponencial.

4.2.7.1.8 Representación gráfica correspondiente al problema de tasa de cambio decreciente: variación, tasa de cambio, dominio, rango y ceros de la función.

Sólo el 70% del grupo (estudiantes A, B, D, G, H, I, J) realizó las gráficas donde a partir de una tasa de cambio decreciente se deprecia el valor de la consola de videojuegos.

Los estudiantes B y H realizaron gráficas continuas y tuvieron problemas con la escala utilizada en el eje de las abscisas. Ejemplo de ello es la gráfica del estudiante H (Figura 4.76), donde se puede observar que inició graficando del primer al quinto año consecutivamente y, posteriormente, graficó del quinto al veinteavo año; utilizó intervalos de cinco años representados por el mismo espacio. Además, éste estudiante no graficó la intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas.

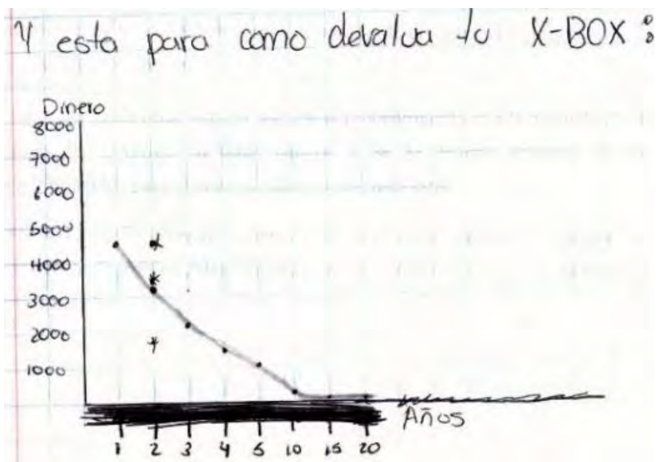


Figura 4. 76 Gráfica continua con problemas en escala de las abscisas del decrecimiento exponencial en la Actividad 8. Estudiante H

El estudiante G realizó una gráfica continua (Figura 4.77). Cabe mencionar que este estudiante analizó la depreciación de la consola de video juego empleando una expresión exponencial; determinó el valor de la consola para periodos consecutivos hasta valer $0.011 al año 37 (Figura 4.78). Se observa que después de ese periodo el estudiante consideró que la Ganancia sería negativa, aun cuando no la calculó.

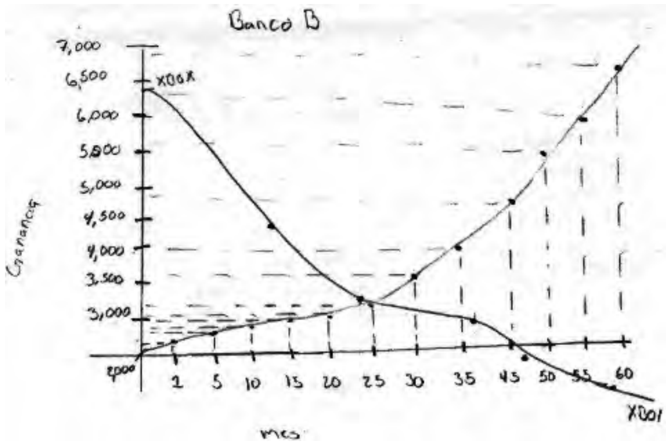


Figura 4. 77 Gráfica continúa de decrecimiento exponencial en la Actividad 8 con problemas en valores del rango. Estudiante G

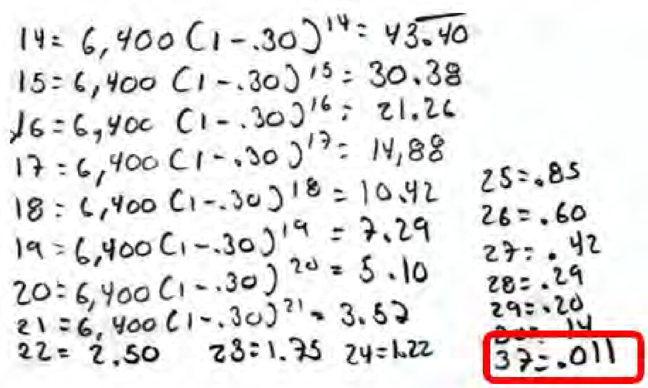


Figura 4. 78 Determinación de valores del rango para gráfica continua de decrecimiento exponencial en la Actividad 8. Estudiante G

Los estudiantes A y D elaboraron gráficas continuas. Un ejemplo es la gráfica del estudiante D (Figura 4.79), quien marcó la intersección en las ordenadas y señaló el significado de cada eje; sólo graficó el valor para la consola de videojuego durante los primeros quince años, lo cual calculó a partir de una expresión algebraica exponencial.

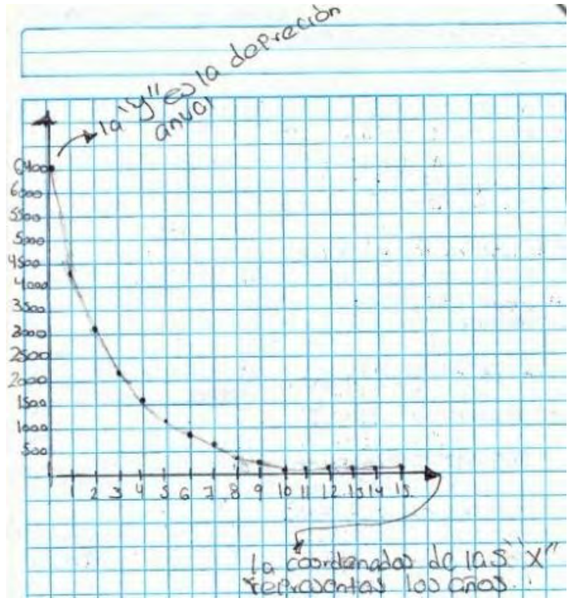


Figura 4. 79 Gráfica continua de decrecimiento exponencial en la Actividad 8. Estudiante D

Los últimos dos estudiantes I y J realizaron gráficas discretas. Ambos estudiantes graficaron el valor de la consola de videojuegos para los primeros diez años. Un ejemplo es la gráfica del estudiante J (Figura 4.80), quien señaló que obtuvo la información de la expresión exponencial decreciente $\left(6400(1-0.30)^{A}=PF\right)$. El estudiante indicó qué información era representada en cada eje. Se observa que existe dificultad en la comprensión del concepto de proporcionalidad: *"Vemos que la gráfica decrece proporcionalmente un 0.7".*

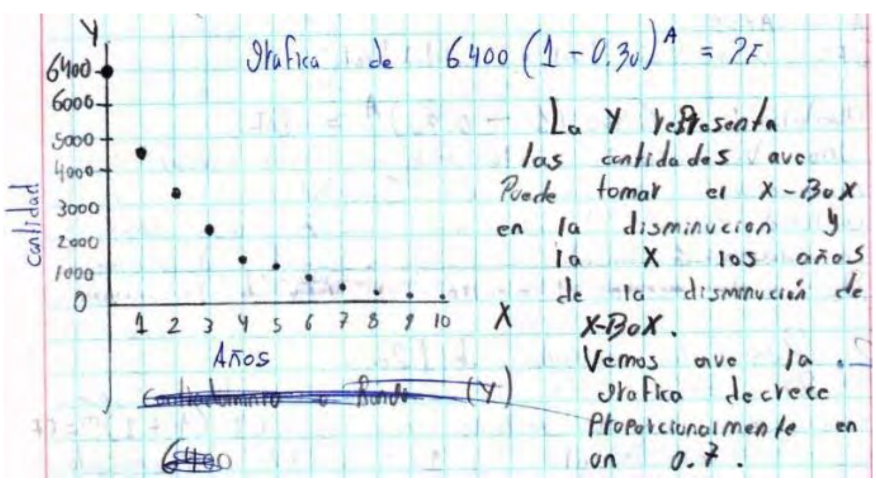


Figura 4. 80 Determinación de valores del rango para gráfica continua de decrecimiento exponencial en la Actividad 8. Estudiante G

4.2.7.2 Observaciones de los resultados obtenidos con evaluación

A continuación se presenta un resumen de los conocimientos exhibidos por los estudiantes en sus reportes escritos de la actividad 8 (Tablas 4.8 y 4.9):

Conocimientos exhibidos por los estudiantes		**Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio creciente**	**Planteamiento expresión exponencial creciente**	**Razonamiento bidireccional correspondiente a la tasa de cambio creciente**	**Representación gráfica correspondiente al problema de tasa de cambio creciente**
Estudiantes	A	Sin evidencia	Alcanzado	Despeje de la incógnita A (periodo en años) en la expresión exponencial para la inversión A $(2000(1.24)^A = 6400)$ empleando logaritmos	Gráfica continua de ambas inversiones en el mismo plano (2% mensual y 24% anual). Rectas trazadas de la intersección a las ordenadas (capital inicial) hasta la coordenada del ahorro deseado
	B	Empleó procedimiento nombrado “Regla de tres simple” sólo para primer periodo	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua solamente el incremento de la inversión B elegida (2% mensual)
	C	Sin evidencia	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua de ambas inversiones por separado (2% mensual y 24% anual). Invirtió la ubicación de las variables en los ejes.
	D	Sin evidencia	Alcanzado	Despeje de la incógnita A (periodo en años) en la expresión exponencial para la inversión A $(2000(1.24)^A = 6400)$ empleando logaritmos	Gráfica continúa de ambas inversiones en el mismo plano (2% mensual y 24% anual). Rectas trazadas de la intersección a las ordenadas (capital inicial) hasta la coordenada del ahorro deseado
	E	Empleó procedimiento nombrado “Regla de tres simple” sólo para primer periodo	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua de ambas inversiones por separado (2% mensual y 24% anual)
	F	Empleó procedimiento nombrado “Regla de tres simple” sólo para primer periodo	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua de ambas inversiones por separado (2% mensual y 24% anual). Dificultad en escala para los valores del dominio (tiempo) en la gráfica para la tasa mensual de 2%.
	G	Sin evidencia	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua de ambas inversiones por separado (2% mensual y 24% anual)
	H	Sin evidencia	Alcanzado	Sustitución de diferente cantidad de años (valores del exponente) en expresión exponencial	Gráfica continua solamente el incremento de la inversión B elegida (2% mensual)
	I	Sin evidencia	Alcanzado	Despeje de la incógnita A (periodo en años) en la expresión exponencial para la inversión A $(2000(1.24)^A = 6400)$ empleando logaritmos	Gráfica discreta solamente el incremento de la inversión B elegida (2% mensual)
	J	Sin evidencia	Alcanzado	Despeje de la incógnita A (periodo en años) en la expresión exponencial para la inversión A $(2000(1.24)^A = 6400)$ empleando logaritmos	Gráfica discreta de ambas inversiones en el mismo plano (2% mensual y 24% anual).

Tabla 4. 8 Conocimientos exhibidos por estudiantes en la actividad 8 en la que subyace una función exponencial creciente

En la tabla 4.8 se observa que el 100% de los estudiantes logró plantear la expresión exponencial creciente, pertinente para describir la situación. El 60% logró realizar un razonamiento bidireccional mediante ensayo y error; el 40% restante utilizó logaritmos. El 80% elaboró gráficas continuas mientras que el 20% construyó gráficas discretas.

Conocimientos exhibidos por los estudiantes		Análisis de las cantidades numéricas correspondientes a la tasa de cambio decreciente	Planteamiento expresión exponencial decreciente	Representación gráfica correspondiente al problema de tasa de cambio creciente
Estudiantes	A	Sin evidencia	Planteada de forma general	Gráfica continua
	B	Sin evidencia	Planteada de forma general	Grafica continua. Dificultad en escala para los valores del dominio (tiempo).
	C	Métodos recursivos numéricos	Sin evidencia	No realizaron
	D	Sin evidencia	Planteada de forma general	Gráfica continua
	E	Métodos recursivos numéricos	Sin evidencia	No realizaron
	F	Métodos recursivos numéricos	Sin evidencia	No realizaron
	G	Sin evidencia	Planteado para resolver la actividad	Gráfica continua. Consideró valores negativos para el rango.
	H	Sin evidencia	Planteada de forma general	Gráfica continua. Dificultad en escala para los valores del dominio (tiempo).
	I	Sin evidencia	Planteado para resolver la actividad	Gráfica discreta
	J	Sin evidencia	Planteado para resolver la actividad	Gráfica discreta

Tabla 4. 9 Conocimientos exhibidos por estudiantes en la actividad 8 en la que subyace una función exponencial decreciente

En la tabla 4.9 se observa que el 70% de los estudiantes logró plantear la expresión exponencial decreciente para describir la situación y el 30% utilizó métodos recursivos numéricos. El 100% realizó un razonamiento bidireccional mediante ensayo y error. El 50% elaboró gráficas continuas, el 20% construyó gráficas discretas y el 30% no graficó. Los estudiantes I y J fueron los que realizaron gráficas discretas tanto para la función exponencial creciente como para la decreciente.

El 70% de los estudiantes lograron analizar e interpretar la Actividad 8 cuya situación requería el manejo simultáneo de la función exponencial creciente y decreciente. Estos estudiantes mostraron habilidades para adecuar los modelos aprendidos a situaciones de contexto diferente.

Es importante recordar que al inicio de la secuencia didáctica los estudiantes resolvían los problemas mediante métodos numéricos recursivos y no utilizaban gráficas. No integraban los conceptos de dominio, rango, variable, tasa de cambio, dependencia, crecimiento, continuidad al de función exponencial. Las actividades 1 al 7 posibilitaron la integración; el avance en la comprensión y manejo de estos conceptos fue lo que les permitió resolver la Actividad 8.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente capítulo se exponen las conclusiones derivadas del análisis de la implementación de la secuencia didáctica. Se da respuesta al problema planteado en el Capítulo 1 y se evalúa el cumplimiento de los objetivos de la tesis y de la secuencia didáctica. Las conclusiones se presentan en tres apartados: La secuencia didáctica, aprendizaje de los estudiantes y ambiente de trabajo. Se incluyen recomendaciones para mejorar la implementación y resultados.

5.1. La secuencia didáctica

En la implementación de la secuencia didáctica se observó que cuando el docente emplea actividades cercanas a las que sugiere la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) y usa un esquema de organización de actividades cercano al propuesto por esta perspectiva para desarrollar conocimiento, los estudiantes de nivel superior pueden abordar un conjunto de conceptos, relacionarlos entre sí y, además, generar ciclos de comprensión en los cuales van refinando su conocimiento.

Abordar un conjunto de conceptos es una ventaja ante las limitantes de tiempo existentes en cualquier escuela para cumplir los objetivos de aprendizaje establecidos en los programas oficiales, que promueven el uso de propuestas tradicionales en las que al estudiante se le deja como un receptor en el aula, la evaluación del conocimiento se dirige a la memorización de conceptos y los conocimientos se enseñanza aislados entre sí.

Se encontró que si el docente utiliza una secuencia como la descrita en esta tesis no es posible abordar los temas en el orden en el cual el programa de la asignatura de matemáticas AG-109 lo plantea; donde pareciera que los conceptos se deben enseñar y aprender de forma lineal y aislada entre sí: variación de una cantidad respecto de otra, razones y proporciones, dependencias funcionales, representación cartesiana, función exponencial, descripción de funciones (dominio, rango, intervalos donde es positiva, negativa).

La resolución de las actividades de la secuencia permitió que los estudiantes emplearan diferentes representaciones (verbal, aritmética, gráfica y algebraica) de la función exponencial (Tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9) y las relacionaran entre sí (actividades 6, 7 y 8). Los estudiantes al resolver las actividades pudieron dar mejor significado a conceptos como dominio, rango, crecimiento exponencial, variación y ordenada al origen (sección 4.2.3 y 4.2.4).

En particular, el empleo del software Netlogo y la realización de actividades utilizándolo propició la necesidad de interpretar en las gráficas la variación y tasa de cambio (Figuras de la 4.33 a la 4.48). Los estudiantes pudieron variar parámetros, y por lo tanto, profundizar en los conceptos de variación, tasa de cambio y función. Simular un crecimiento poblacional con la ayuda de Netlogo permitió que los estudiantes relacionaran la representación gráfica con la representación algebraica de la función exponencial. Los estudiantes tuvieron la oportunidad no sólo de relacionar ambas representaciones, además de visualizar de manera dinámica el crecimiento poblacional al simular un fenómeno con características cercanas a la vida real y relacionarlo con diversas representaciones.

Otra característica notable en la implementación de la secuencia son los cambios observados en la disposición del grupo en el aula de clases para la resolución de las actividades en equipos. Se observó que esta disposición, sumada a la comunicación de las ideas entre los estudiantes y el trabajo en grupo apoyó el desarrollo de conocimiento individual, en equipo y grupal para generalizar conceptos matemáticos en el aula.

Los problemas o actividades abordadas en el aula, permitieron que los estudiantes:

- Lograran describir, interpretar, explicar y predecir situaciones donde intervienen los conceptos de variación y tasa de cambio no constante relacionadas con la función exponencial.

- Generalizaran a partir de la identificación de patrones y establezcieran la función exponencial en su forma algebraica.
- Desarrollaran conocimiento para el cálculo de raíces o puntos particulares en las funciones exponenciales a través del empleo de ecuaciones exponenciales y el modelo de su gráfica al variar parámetros.

Ejemplos que permiten concluir de esta manera pueden observarse en la descripción (Capítulo 4) de los logros de cada actividad, en particular en las tablas de la 4.1 a la 4.9.

5.2. Aprendizaje de los estudiantes

Inicialmente, algunos estudiantes pudieron resolver las actividades con métodos recursivos e inclusive otros recordaron la existencia de una expresión algebraica para modelarlas, pero no podían evaluar si ésta era adecuada por que no la comprendían (Figura 4.16, sección 4.2.1.7). Los estudiantes no utilizaban la razón de cambio como un concepto para medir la variabilidad y encontrar patrones, sólo buscaban los patrones de cambio a través de procedimiento aritméticos (suma y resta).

Los alumnos no podían interpretar y asociar las gráficas de la función exponencial a su expresión algebraica (Sección 4.3). Pero, en las actividades 4 y 5 de la secuencia se observó cómo los estudiantes fueron generando y refinando sus conocimientos y habilidades para interpretar el modelo gráfico de la función exponencial creciente y asociaron determinado comportamiento a la variación de parámetros del modelo algebraico.

El empleo del el software NetLogo permitió explorar de forma dinámica el comportamiento de las gráficas generadas. Sin embargo, se percibió que el despliegue de gráficas continuas del software creó confusión (Figura 4.32) en algunos estudiantes con respecto al dominio de la función, la cual en las actividades 2 y 3 habían establecido que correspondía a los número reales enteros.

Varios estudiantes tuvieron dificultades para describir de forma escrita los modelos construidos para solucionar las actividades, así como para realizar un razonamiento bidireccional al emplear logaritmos. Posiblemente fue debido a que el concepto sólo se revisó como un algoritmo para despejar el exponente en la función exponencial.

Después de resolver las actividades de la secuencia didáctica, se observó que los estudiantes lograron mejorar su comprensión respecto a la construcción, el significado de los términos y algunas propiedades de la función exponencial, lo cual derivó en que posteriormente la pudieran emplear para resolver actividades en diferente contexto (Figura 4.65).

Con la implementación de la secuencia didáctica se logró que los estudiantes pudieran reconocer cuándo una actividad se relacionaba con una función exponencial creciente o decreciente (Tablas 4.8 y 4.9).

La posibilidad brindada para que los estudiantes analizaran las actividades y refinaran los modelos que construyeron a través de diferentes ciclos de comprensión, les permitieron que éstos transfirieran sus conocimientos y habilidades aprendidas de actividades relacionadas con la función exponencial creciente a decreciente, así como transferirlas en actividades de un contexto a otro.

5.3. El ambiente de trabajo

Antes de la implementación de la secuencia didáctica los estudiantes estaban acostumbrados a trabajar individualmente, escuchando siempre la explicación del maestro o realizando los ejercicios que éste les solicitaba. Al final de la implementación se observó que el trabajo en equipo así como la discusión grupal permitió a los estudiantes desarrollar habilidades para describir, explicar, comunicar, analizar y argumentar los procedimientos realizados al momento de solucionar las actividades en ambientes de trabajo colaborativo involucrándose en la generación de su propio conocimiento. Los estudiantes no sólo aprendieron a comunicarse al interior del equipo sino también en la discusión grupal para evaluar los distintos procedimientos presentados por sus compañeros al resolver alguna actividad.

Tal como Lesh y Doerr (2003) lo mencionan, los estudiantes al interactuar con las ideas de sus demás compañeros, obtuvieron mayor seguridad al defender los procedimientos empleados así como para cuestionar los realizados por sus compañeros. Se observó que lograron generalizar y transferir lo aprendido a otras situaciones similares en las que se empleaba la función exponencial.

Las actividades individuales posteriores al trabajo en equipo y discusión grupal permitieron que los estudiantes tuvieran la oportunidad de volver a abordar las actividades sin ayuda de sus compañeros. También posibilitó que el docente tuviera más elementos para revisar la comprensión individual de cada estudiante, lo cual no era fácil observar en los trabajos en equipo.

El tipo de problemas que resolvieron los estudiantes, los cuales son nombrados como de la vida real fueron un aspecto positivo de la secuencia didáctica. Se observó que los estudiantes, al considerar que el conocimiento que estaban adquiriendo les serviría en algún momento de su vida, se interesaron en encontrar la solución de las actividades. Por ejemplo, un estudiante identificó que el procedimiento utilizado para resolver las actividades 3 y 4 podría usarlo para calcular la relación oferta y demanda de productos, tema que correspondía a otro curso de su carrera.

5.4. El papel del docente

El docente además de diseñar la secuencia didáctica tomó el papel de guía en las sesiones y como moderador en las discusiones grupales; permitió que los estudiantes aclararan sus dudas al momento de resolver las actividades, para ello utilizó preguntas de reflexión de tal forma que no le brindó al estudiante la respuesta directamente. El docente logró la involucración de los estudiantes así como su participación activa al emplear un estilo de enseñanza diferente tradicional; aprendió nuevas formas de trabajar contenidos matemáticos en el aula, interactuar con los estudiantes, apoyar el desarrollo de conocimiento, y evaluarlo.

El rol como profesor y evaluador externo, del proceso de enseñanza y aprendizaje, permitió al docente que modificara, extendiera y refinara ciclos de comprensión respecto a su propia práctica.

5.5. Recomendaciones

Se recomienda con base en los resultados obtenidos y descritos no sólo en este Capítulo 5, sino también a lo largo del Capítulo 4, que los docentes que deseen hacer uso de esta secuencia generen en el salón de clases un ambiente diferente al tradicional.

Se sugiere utilizar algunas recomendaciones de la perspectiva de Modelos y Modelación, por ejemplo, adecuar las actividades al contexto de los estudiantes con el fin de motivar al alumno y propiciar su interés en el aprendizaje de las matemáticas; ayudar a que los alumnos consideren que los conceptos matemáticos estudiados serán herramientas útiles así como que desarrollen conocimiento permitiendo la construcción de diversos modelos para poder solucionar situaciones de su vida cotidiana (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000); propiciar que los estudiantes no aprendan de manera aislada los conocimientos, sino integrados en un sistema conceptual donde cada elemento que lo compone esté relacionado con otros mediante reglas y operaciones.

Los docentes deben pensar en la necesidad de desarrollar habilidades de comunicación, donde el lenguaje y las distintas representaciones utilizadas sean pensados como un medio que propicia la comprensión de conocimiento matemático; debe promover el trabajo colaborativo, fomentar la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades involucrándolos en la generación de su propio conocimiento en un proceso de refinamiento de los conceptos matemático que poseen mediante la comunicación de sus formas de pensar y procedimientos.

Otro aspecto importante que se sugiere al docente es la implementación de la Actividad 7 en el aula organizando al grupo en equipos. Esto permitiría apoyar la profundización de los conceptos y procesos de solución dado que es una actividad más abierta que las anteriores (3 a 6).

Esta secuencia podría mejorarse si se utilizan gráficas discretas en las actividades 4 y 5 de la secuencia didáctica, en lugar de las continuas. De esta manera se podría mejorar la comprensión acerca de los valores del dominio y rango de la función exponencial.

Un concepto matemático que debería considerarse como parte de esta secuencia didáctica es el de logaritmos el cual debería profundizarse como función inversa, y la relación de esta función con la función exponencial. Es importante mencionar que de acuerdo con los resultados de la implementación de la propuesta didáctica los estudiantes mostraron habilidades de razonamiento bidireccional mediante ensayo y error usando representaciones tabulares y algebraicas. Por lo tanto el tema de logaritmos permitiría al estudiante realizar un mejor análisis bidireccional empleando el concepto con comprensión y no de forma algorítmica.

La secuencia didáctica se ha seguido aplicando varias veces y por lo tanto refinando. Se ha encontrando que cuando se usan gráficas discretas en las actividades realizadas con NetLogo, los estudiantes muestran una mejor comprensión sobre el dominio de la función exponencial; es decir, distinguen cuándo y porqué una gráfica es continua o discreta (NCTM, 2000; Noble, Nemirovsky, Wright, y Tierney, 2001).

Por otra parte cuando la actividad 7 se trabaja en el aula se ha encontrado que el intercambio de ideas entre los estudiantes refina la transferencia de los conocimientos empleados para resolver las actividades relacionadas con la función exponencial creciente al resolver las de tipo decreciente.

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M., & AnnMarie, H. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning,* 15 (4), 314-336.

Ballard, D., & Brown, C. (1982). *Computer vision.* Englewood Cliffs**:** Prentice-Hall Inc.

Cristobal, C. (2007). *Programa de curso: Matemáticas generales*. Manuscrito no publicado, Universidad de Quintana Roo, México.

Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato (2009). *Matemáticas IV.* Recuperado el 7 de julio de 2016, de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/4to_SEMESTRE/Matematicas_IV_biblio2014.pdf

Doerr, H. M., & Tripp, J. S. (1999). Understanding how students develop mathematical models. *Mathematical Thinking and Learning*, 18 (3), 231-254.

Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 79-98.

Grows, D. A. (2003). The teacher's role in teaching mathematics through problem solving. En H. L. Shoen (Ed.), *Teaching Mathematics through Problem Solving*. Grades 6-12 (pp. 129-142). USA: NTCM.

Guzmán, J. (2005). *Álgebra y trigonometría*. México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 213-223.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a new Algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics Classrooms That Promote Understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J., & Rochelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: new content, new context. En C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Mathematics for a new millennium* (155–170). London: Springer-Verlag.

Lehman, C. (2003). *Álgebra*. México: Limusa.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind: in which development involves several interacting simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 205-226.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism*. *Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2002). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism*. *Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teacher. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-650). Mahwah, NJ: Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Thales, S. A.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, C. (2001). Experiencing Change: The Mathematics of Change in Multiple Environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (1), 85-108.

Santos, T. L. (1994). *Cuadernos de Investigación, núm. 28. La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: CINVESTAV-IPN.

Santos, T. L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Editorial Iberoamérica.

Santos, T. L. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica.*

Investigación en educación matemática XII. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Secretaría de Educación Pública (2001). *Programa de estudio 2001 guía para la educadora.* Recuperado el 15 de abril de 2015, de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/images/PDF/preescolar%202011.pdf

Stewart, I. (2003). La enseñanza agradable de las matemáticas. En R. García (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 183-217). México: DC: National Academy Press.

Stewart, Jamesredlin, & Lothar. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México: Cengage Learning Editores.

Swokowski, E., & Cole, J. (2009). *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Learning.

The university of Texas of Austin (s.f.). *How do I retire a millionaire?* Recuperado el 3 de Junio de 2014, de sites.google.com/a/utexas.edu/travis-otwell/home

ANEXOS

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

ACTIVIDAD 1. FRAGMENTO DEL ARTÍCULO " DANIEL, ATRACTIVO DEL SANTUARIO DEL MANATÍ", (AGUILAR, 2012)

Daniel, atractivo del Santuario del Manatí

Subido por: Ramon Aguilar

La localidad de Laguna Guerrero está situada en el Municipio de Othón P. Blanco, cuenta con aproximadamente 568 habitantes. Es conocida por lo que queda de algunos restaurantes, alguna vez abarrotados por la población de la zona sur de Quintana Roo, y por su principal atracción, el manatí Daniel.

Tiene un título formal largo: Centro de Atención y Rehabilitación de Mamíferos Acuáticos del Área Natural Protegida Estatal "Santuario del Manatí-Bahía de Chetumal", pero se le conoce como El Corral de Daniel, porque ahí vive desde hace ocho años.

El corral no tiene más de 20 metros de largo por 10 de ancho. A los lados hay una suerte de muelle y un mirador elevado desde donde es posible admirar a Daniel. La historia de Daniel es rara, pero esperanzadora. Fue encontrado recién nacido (con todo y cordón umbilical). Como estaba abandonado se le dieron cuidados maternales.

Lo alimentaron con una leche especial importada de Florida y al cabo de casi dos años, cuando ya estaba en edad de ser destetado, lo soltaron en el medio silvestre. Sin embargo, Daniel prefería la compañía de los humanos y una y otra vez regresó hasta que se dieron cuenta de que su vida estaba ahí, en su corral. La visita al lugar es formidable.

PADRE ADOPTIVO DE DANIEL EL MANATÍ

Si Daniel se ha salvado de la muerte, ha sido gracias a Eladio Juárez, quien afanosamente se ha encargado de atenderlo y alimentarlo diariamente. Antes le daba leche, ahora le da lechugas, entre 17 y 18 kilogramos al día, que el manatí devora con gran gusto.

Expresó que debido a que "Daniel" se encuentra en plena pubertad, es necesario que limite su dependencia hacia las personas, por lo que ya no es permitido alimentar ni tocar al mamífero. "Se pretende aparear al animal, por lo que es de vital importancia que interactúe únicamente con su especie".

Juárez García abundó que tampoco es permitido el acceso de los visitantes al área baja del estanque, ello, previniendo que la población pudiera contaminar el agua. Algunas otras restricciones para ingresar a ver a "Daniel" radican en que no se permiten alimentos, bebidas, mascotas y el acceso a personas en estado inconveniente.

ALGUNOS DATOS

Daniel es una cría macho de manatí (Trichechus manatus) encontrado en la Laguna Guerrero, Bahía de Chetumal, México, el 14 de septiembre de 2003. Se mantuvo en las instalaciones de El Colegio de la Frontera Sur, Unidad Chetumal, hasta mayo de 2004, en la primera fase de su programa de rehabilitación.

Como segunda fase de este programa, ahora se encuentra en un encierro en Laguna Guerrero, donde se mantendrá hasta que esté listo para ser liberado en su hábitat natural.

PREGUNTAS DE COMPRENSIÓN SOBRE ARTÍCULO EL MANATÍ.

Preguntas de comprensión

Con base en la información del artículo que acabas de leer, por favor contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Por qué es conocida la localidad de Laguna Guerrero?
2. Describe brevemente quién es Daniel y que lo hace especial.
3. ¿Cuáles son las principales restricciones para entrar a Laguna Guerrero?
4. ¿Qué acciones propondrías realizar a favor de la especie?

ACTIVIDAD 2. ACTIVIDAD AYUDA A SAORI CON EL SANTUARIO

Ayuda a Saori con el santuario

Se pretende crear santuarios para manatíes con el fin de tener una repoblación de estos. Para ello se realizó un censo aéreo de la población de manatíes para el Caribe Mexicano donde se pretenden realizar; Encontrándose 23 manatíes en las bahías de Ascensión y Espíritu Santo.

Saori quién es la directora del proyecto de los santuarios debe llevar un control anual de la cantidad de manatíes con los que cuentan, para distribuir los recursos, estimar cuándo se llegará al límite y tomar así las medidas correspondientes. Se conoce que la tasa de crecimiento anual de la población de los manatíes es de 8%.

Eres parte del equipo de trabajo que se encargará del santuario junto con Saori, por lo que debes entregar una carta donde le expliquen:

1. Cómo calcular la cantidad de manatíes que tendrá en el primer, segundo, tercer y cuarto año en el santuario.

2. Cómo calcular la cantidad de manatíes que tendrá en el décimo, veinteavo y treintavo año en el santuario.

3. Si sólo cuenta con el presupuesto para cuidar 170 manatíes, ¿Cómo calcular en qué año alcanzará la cantidad dicha población?

4. Determinar un método que pueda emplear Saori para conocer esta información en la creación de otros santuarios, el cual pueda emplear si la población inicial de manatíes o la tasa de crecimiento poblacional fuera diferente.

ACTIVIDAD 3. MANATÍES ENFERMOS

Manatíes enfermos

Sabemos que la tasa de crecimiento poblacional anual de los manatíes es de 8%. Sin embargo, las condiciones ambientales, enfermedades, los recursos alimenticios, así como la misma edad de los manatíes hacen que se puedan morir.

En el santuario que dirige Saori se alcanzó una población de *153* manatíes, cuando se contagiaron de una enfermedad por la cual de acuerdo a investigaciones realizadas mueren 75 de cada 250 manatíes anualmente. Entre las medidas de control deciden separar a las hembras de los machos. Por lo que Saori deberá llevar un control anual de la cantidad de manatíes con los que contarán al final de cada año, así como saber cuándo se quedará sin manatíes el santuario en caso de que no se logré controlar la situación.

Ayuda a Saori escribiendo una carta donde le expliques un método para obtener esta información de tal forma que lo pueda entender y emplear en otro santuario si se llegara a contagiar.

ACTIVIDAD 4. CREACIÓN DE OTROS SANTUARIOS

Creación de otros santuarios

Se realizó el censo aéreo de la población de manatíes para el Caribe Mexicano al inicio del año, se encontraron otras poblaciones además de los 23 mamíferos en las bahías de Ascensión y Espíritu Santo; alrededor de 7 manatíes en las caletas y cenotes de los poblados de Tulum y Playa del Carmen; y 45 manatíes en la bahía de Chetumal. Se sabe que la población de estos mamíferos crece un 8% al término de cada año y Saori propone crear otros santuarios en las localidades censadas. Ayuda a Saori a recabar la siguiente información justificando cómo la determinaste y presentarla de forma comprensible, porque deberás enviársela en una carta.

1. ¿Qué población habrá dentro de 10, 20, 30, 40, 50 años?
2. ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes entre las diferentes localidades?
3. Observa la intersección de la curva con el eje de las ordenadas en cada gráfica. ¿Qué significa el punto de intersección?
4. ¿En cada gráfica la ordenada al origen puede ser negativa? ¿Por qué?
5. ¿Cómo es el dominio y rango en cada gráfica ? ¿Por qué?
6. ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?

Si el presupuesto para la manutención de los santuarios sólo alcanzará para cuidar 2500 manatíes por localidad

7. ¿En cuánto tiempo estimas que se alcanzará una población de 2500 manatíes en cada localidad?

ACTIVIDAD 5. CRECIMIENTO POBLACIONAL DE MANATÍES EN EL MUNDO

Crecimiento poblacional de manatíes en el mundo

Existen manatíes de diferentes especies en diferentes partes del mundo, los cuales tienen una tasa de crecimiento poblacional diferente debido a diferentes factores ambientales o humanos. La especie Trichechus senegalensis habita las costas de África Occidental, en esta especie se han observado crías a razón de 3 por cada 30 manatíes al año. El manatí antillano o manatí del Caribe (*Trichechus manatus*) que habita desde el golfo de México hasta la desembocadura del río Amazonas, en su población se ha encontrado al año 4 crías por cada 50 manatíes. El manatí enano (*Trichechus pygmaeus*, o también *Trichechus bernhardi*) es una posible especie de manatí que habita en los espacios de agua dulce del Amazonas, a causa de su población reducida, se ha sugerido que el manatí enano debería ser considerado una especie en peligro crítico de extinción, pero no ha sido reconocido, tiene un crecimiento poblacional del 5%. Ahora se pretende crear un santuario en cada una de las localidades considerando introducir inicialmente en cada uno 10 mamíferos, Katherine que es la coordinadora del proyecto y que recibió recomendaciones de tu trabajo, está a la espera de una carta donde le ayudes a analizar la siguiente información explicando cómo la determinaste.

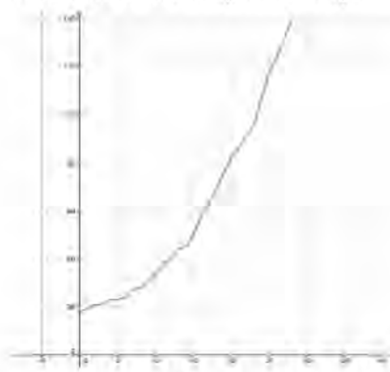
1. ¿Cómo es la población después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional?
2. ¿Cómo es el incremento de la cantidad de manatíes después de un determinado tiempo si lo comparamos para las diferentes tasas de crecimiento poblacional?
3. Observa la intersección de la curva con el eje de las ordenadas en cada gráfica. ¿Qué significa el punto de intersección?

ACTIVIDAD 6. EL SANTUARIO DE LA LAGUNA DE LAS ILUSIONES

El santuario en Laguna de las ilusiones

La Laguna de las Ilusiones, está enclavada en la zona urbana de Villahermosa, Tabasco. Es una Reserva Ecológica Estatal con profundidades predominantemente menores de 3m. Se recopilaron datos en estudios de captura, radiomarcaje y salud de los manatíes para caracterizar la estructura y estatus de la población. De lo cual se obtuvo la siguiente información:

Año	Población
7	27
8	28
9	30
10	33
11	38
12	40



Analizando la información proporcionada determina:

1. ¿Cómo cambió cada año la población de manatíes?
2. ¿Cuál es la población inicial de manatíes que introdujeron en la Laguna de las Ilusiones?
3. Determina la expresión con la cual podemos determinar la cantidad de manatíes en cualquier periodo de tiempo.

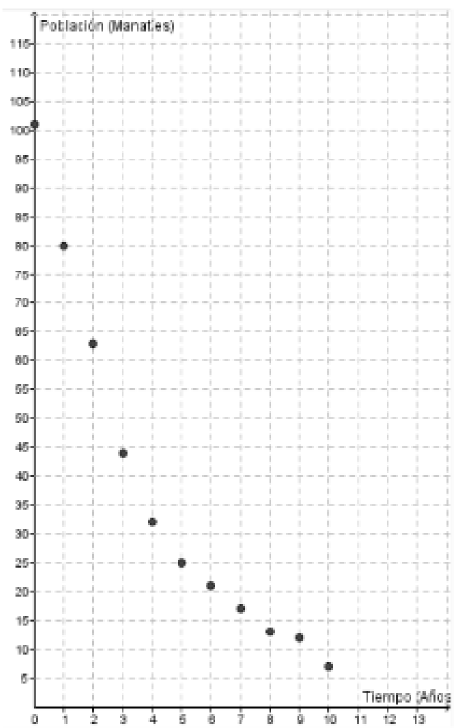
ACTIVIDAD 7. POBLACIÓN DE MANATÍES AFECTADA

Población de manatíes afectada

Se realizó un censo aéreo de la población de manatíes para el Caribe Mexicano al inicio del año 2015, y les pareció que las poblaciones de manatíes habían alcanzado una población considerable de mamíferos en las bahías de Ascensión y Espíritu Santo. Dado que al parecer se logró una repoblación exitosa se pretende liberarlos a su hábitat natural. Sin embargo para tomar esa decisión a Saori le enviaron la información sobre la variación que podría tener el tamaño de la población de los manatíes en los próximos años, considerando que las principales fuentes de mortalidad son los enmalles accidentales en redes de pesca, seguido de la caza con arpón. En los registros venían sólo incluían la siguientes información:

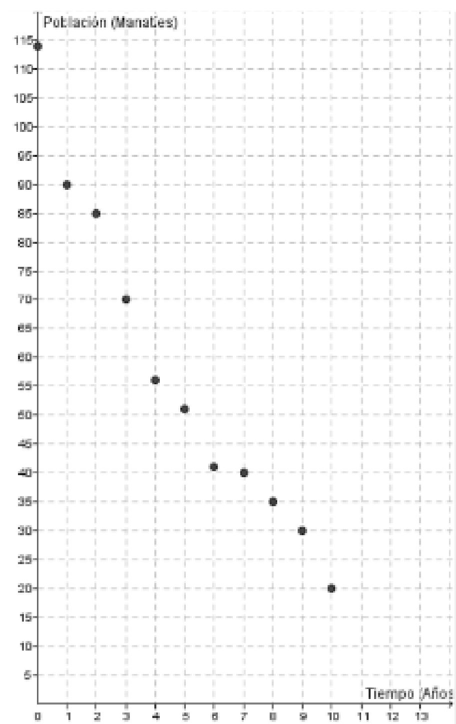
Mortalidad por enmalles accidentales en redes de pesca

Años transcurridos	Población
6	21
7	17
8	13
9	12
10	7



Mortalidad por caza con arpón

Años transcurridos	Población
6	41
7	40
8	35
9	30
10	20



Ayuda a Saori escribiendo una carta donde le expliques un método que le ayude a decidir si es conveniente liberar a los manatíes de las bahías de Ascensión y Espíritu Santo analizando la información proporcionada, el método le deberá ser de utilidad para decidir si liberará a los manatíes del Santuario de la Bahía de Chetumal, donde para principios del año 2015 ya cuenta con 176 mamíferos.

ACTIVIDAD 8. PLANES DE INVERSIÓN (EVALUACIÓN)

Planes de inversión

José quiere comprar una consola de videojuegos que tiene un costo de $6400, el cual una vez adquirido su valor se deprecia 30% anualmente. Él recibió $2000 de sus utilidades, como es un dinero extra desea ingresarlo en una cuenta de inversión en un banco para ahorrar y poder adquirir la consola de juegos. Existen dos opciones, la inversión tipo A con la cual gana un interés del 24% sobre el monto total generado anualmente, y la inversión tipo B con la cual gana una tasa de interés 2% sobre el monto total generado mensualmente.

Ayuda a José a elegir la inversión con la que pueda adquirir en menos años el X-BOX, y a explicarle que sucederá con el valor del equipo una vez adquirido, para ello deberás escribir una carta donde les expliques el procedimiento con el que obtuviste la información para tomar la decisión y presentarle una gráfica con la que muestres que sucederá con su dinero desde el momento de invertirlo hasta tiempo después de adquirida la consola de videojuegos.

José quizá visite otros bancos, así que el procedimiento que le presentes le deberá servir si le presentan otros planes de inversión en otros bancos, y se lo deberás explicar de tal forma que pueda repetir tus procedimientos para obtener la información necesaria.