UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TESIS

TRANSITANDO DEL ÁREA A LA INTEGRAL DEFINIDA

TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
JAVIER GARCÍA GUZMÁN

DIRECTOR
DR. JOSÉ ISMAEL ARCOS QUEZADA

CODIRECTOR
DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE

ASESORES

DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

DRA. DARLY ALINA KÚ EUÁN

DR. VICTOR SOBERANIS CRUZ

CHETUMAL QUINTANA ROO, MÉXICO, MAYO DE 2016

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TRABAJO DE TESIS BAJO LA SUPERVISIÓN DEL COMITÉ DEL PROGRAMA DE MAESTRÍA Y APROBADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

COMITÉ DE TESIS

DIRECTOR: **DR. JOSÉ ISMAEL ARCOS QUEZADA**
NOMBRE Y APELLIDOS

ASESOR Y CODIRECTOR: **DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE**
NOMBRE Y APELLIDOS

ASESOR: **DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO**
NOMBRE Y APELLIDOS

ASESOR: **DRA. DARLY ALINA KÚ EUÁN**
NOMBRE Y APELLIDOS

ASESOR: **DR. VICTOR HUGO SOBERANIS CRUZ**
NOMBRE Y APELLIDOS

CHETUMAL, QUINTANA ROO, MÉXICO, MAYO DE 2016.

DEDICATORIA

Muchos lo llaman de diferentes maneras, todo mundo pelea tener la razón de ser la religión correcta y otros dicen que no creen en él; sin embargo yo aunque no profeso ninguna religión quiero dedicarle este trabajo a Jehová "dios padre" que aunque no soy de orar siempre, he creído en él. Porque en los momentos más difíciles de mi vida siempre me ha dado fuerzas para seguir adelante.

Todos en algún momento de nuestras vidas hemos renegado de ellos y confieso que yo no he sido la excepción, sin embargo hoy en día siento que si yo tuviera que volver a nacer y me dieran a elegir quien quiero para que sean los protectores de mi vida, elegiría nuevamente a mis padres.

Es por eso que reafirmo que a mi madre Lilia Guzmán Camacho, a mi padre Juan García Magaña y a Jehová Dios les dedico este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar al Dr. César Cristóbal Escalante, por estar siempre pendiente dándole seguimiento a los avances de este escrito, por sus palabras de aliento en los momentos de frustración, por valorar cada una de las ocurrencias durante el proceso de redacción del documento, por su tiempo y por la colaboración conjunta que permitieron llevar a buen término este trabajo.

A la Universidad de Quintana Roo por los recursos otorgado para cursar la maestría en enseñanza de las matemáticas en sus instalaciones durante dos años.

Agradezco a todos mis profesores, que a lo largo de esos dos años, influyeron en mi formación académica, profesional y humana. En especial a: Dra. Verónica Vargas, Dr. César Cristóbal, Dr. Ismael Arcos y Dr. Víctor Soberanis.

Agradezco a mis compañeros de clases que fueron un soporte durante los estudios.

Agradezco a los estudiantes: José Luis, Walter, Luis Alberto, Jesús Ariel, Oscar, Clarissa, Adolfo, Eddy, Mariel y Elmer por su participación en la realización de las actividades.

Agradezco a Juan Josías Domínguez Albores, uno de los mejores amigos que pueda tener, por su apoyo y enseñanzas en el manejo del procesador de textos.

Por último, agradezco al padre universo, a la madre tierra, a las coincidencias y a mis padres por permitir mi existencia.

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas requiere de todas las estrategias que podamos diseñar para satisfacer la amplia variedad de formas de aprender que podemos encontrar en nuestros estudiantes. Preferentemente estas estrategias deben concebir el conocimiento como un sistema construido activamente por la persona que aprende y el aprendizaje como un proceso en el que el aprendiz debe adaptar y organizar la propia experiencia.

El aprendizaje debe capacitar al aprendiz para diferenciar entre el conocimiento que se produce en una situación particular (Cálculo del área de figuras planas) y el saber estructurado, organizado y generalizado a partir de situaciones específicas (Integral definida).

El aprendiz debe pasar de aprender y repetir formulas a plantear, formular y resolver problemas relacionados con el entorno social en que se desenvuelve. Para esto, el profesor debe generar ambientes adecuados de aprendizaje, durante el proceso de enseñanza, que permitan a los estudiantes aprender a pensar (comprender), expresar libremente sus ideas y compararlas con las de sus compañeros, y las del profesor, para valorar si son correctas o no y de esta forma generar un refinamiento de su conocimiento.

En este sentido se plantea una propuesta didáctica en la que se considera que los estudiantes desarrollan comprensión y/o conocimiento del concepto de integral definida al trabajar con situaciones particulares, como el cálculo del área de regiones planas, que condujeron a la generalización de dicho concepto.

A continuación presento una breve descripción del contenido en los capítulos incluidos en este trabajo de documentación:

El capítulo 1 proporciona un panorama general de las condiciones que motivaron el desarrollo de este trabajo de tesis. De igual forma se describen el problema que se está abordando, la justificación, los objetivos, el alcance y limitaciones del trabajo.

El capítulo 2 se refiere al marco conceptual, en él se reflexiona sobre lo que entendemos por conocimiento, conocimiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje desde la perspectiva de modelos y modelación, la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, el papel de los profesores, el papel de los estudiantes entre otras cosas.

El capítulo 3 contiene una descripción del proceso que se siguió para la elaboración de la propuesta didáctica, se describe las condiciones y el escenario de implementación de la secuencia, la recopilación de información relevante y la evaluación del proceso.

El capítulo 4 presenta los criterios utilizados para el diseño de la secuencia de actividades, una breve descripción de cada una de las actividades y el análisis de los resultados obtenidos durante y después de la implementación de la secuencia didáctica.

Por último, en el capítulo 5 se hacen, a modo de conclusión, una serie de reflexiones y recomendaciones sobre el trabajo.

Índice General

Índice de figuras

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES

Los planes de estudio en carreras de Ciencias e Ingeniería tienen una componente de cursos de matemáticas. Estos cursos tienen dos funciones: sirven de apoyo a las asignaturas de otras disciplinas, y sirven de base a la formación científica de los profesionistas. Entre estos cursos se incluye el "Cálculo diferencial e Integral". Los objetivos educativos asociados a estos cursos (UNAM, 2003), (IPN, 2003), (UACH, 2008), no difieren mucho del siguiente:

> "Desarrollar la capacidad de análisis del comportamiento de fenómenos que se representan con funciones de una variable real enfatizando la aplicación de la derivada, de la integral y sus interpretaciones" (Universidad de Quintana Roo, 2001).

Y como objetivos particulares que el alumno pueda:

- "Expresar y describir relaciones entre variables que intervienen en un fenómeno",
- "Calcular límites de funciones de una variable real a partir de teoremas sobre límites",
- "Identificar funciones continuas y discontinuas",
- "Calcular las derivadas de diferentes tipos de funciones de una variable real aplicando definición, reglas y técnicas de derivación",
- "Resolver problemas relacionados con razones de cambio instantáneo",
- "Emplear las derivadas primera y segunda para representar la gráfica de una función",
- "Aplicar los métodos para identificar los extremos de funciones a la solución de problemas de física e ingeniería",
- "Desarrollar procedimientos de los diferentes métodos de integración para obtener integrales indefinidas de funciones algebraicas y trascendentes"
- "Aplicar la interpretación geométrica de la integral definida y sus propiedades en el cálculo de áreas, volúmenes, trabajo realizado por una fuerza variable, centro de gravedad de una región plana",

- "Describir gráficamente una función y sus derivadas".

El tiempo asignado para que los estudiantes desarrollen los conocimientos y habilidades asociados con estos objetivos, esta entre 64 y 80 horas por ciclo escolar (16 semanas). Esto no siempre ha sido así. En años anteriores, se ofrecían dos cursos, una para Cálculo Diferencial y otro para Cálculo Integral.

El esquema general del curso "Cálculo Diferencial e Integral", (Figura 1), no deja ver la relación estrecha entre los diferentes conceptos y procesos que intervienen, ni el tiempo que requieren los estudiantes para desarrollar un conocimiento profundo de ellos.

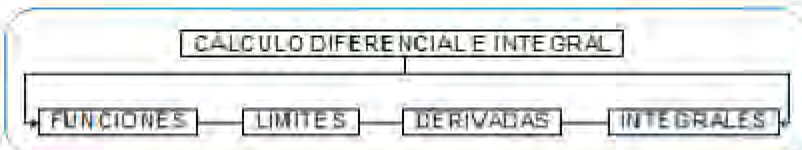


Figura 1. Esquema general del curso Cálculo Diferencial e Integral.

La pertinencia de los objetivos parece clara, si se ve la importancia que estos conocimientos y habilidades matemáticas tienen para ser utilizadas al describir fenómenos o procesos en la naturaleza, y explicar conceptos en otras disciplinas.

Muchos profesores señalan que no es posible que los estudiantes desarrollen los conocimientos y habilidades en el tiempo asignado (Calvo, 1997). En décadas pasadas estos tópicos eran abordados con más tiempo de trabajo en el aula, con otras dinámicas de trabajo. Ahora se imparten muchos tópicos en menos tiempo, que se refleja en que los estudiantes desarrollan conocimientos sobre muchos conceptos con poca comprensión.

Los cursos usuales de matemáticas enfatizan el aprendizaje de algoritmos de cálculo asociado a los conceptos. No permiten que los estudiantes desarrollen habilidades y conocimiento de los conceptos que les permitan aplicarlos a situaciones diferentes a los abordados en el aula.

La excesiva algoritmia siembra en ellos la idea de que los cálculos deben ser exactos y no les permite ver la gran variedad de formas en que pueden proporcionar una respuesta para una situación planteada.

La gran variedad de respuestas, que el estudiante puede proporcionar ante una situación o problema, están asociadas con la comprensión global de los conceptos involucrados, con las ideas que permitieron el desarrollo de los mismos, con los algoritmos y procedimientos que permiten realizar cálculos, con las propiedades que cumplen, con la integración de otros conocimientos, etc.

Desarrollar una comprensión del significado de precisión y exactitud en las matemáticas, tiene que ver con los procesos de estimar valores, de estimar el error cometido al medir o calcular. La falta de comprensión de estos procesos impide a los estudiantes comprender otros más complejos y relacionados con los primeros, así como desarrollar estrategias que pueden ser aplicadas en diversas situaciones.

En general, las experiencias muestran que en estos cursos los estudiantes mecanizan o automatizan los algoritmos asociados a un concepto, sin desarrollar una comprensión suficiente de dicho concepto que le permita usarlo como herramienta para analizar y describir otros fenómenos fuera del contexto matemático (Flores, 1997). Así uno de los problemas que enfrenta la enseñanza de las matemáticas, y en particular del cálculo, está asociado con el desarrollo del significado y comprensión de los conceptos (Imaz y Moreno, 2009) de manera que les sean útiles.

1.2. PROBLEMA

En este contexto he considerado el tema de la integral definida, y sobre ello me he planteado las siguientes preguntas: ¿Qué conocimientos se pueden desarrollar en los estudiantes sobre la integral definida en estas condiciones? ¿Qué tipo de actividades deben realizar los estudiantes en el aula para desarrollar ese conocimiento? ¿Qué aspectos se deben enfatizar en un curso sobre la integral definida? ¿Cuáles son los conocimientos y habilidades que deben desarrollar los estudiantes sobre la integral definida?

Dar una respuesta a estas preguntas es el problema que deseo abordar en esta tesis y de este modo analizar la viabilidad de desarrollar conocimiento y comprensión del concepto de integral definida en los estudiantes. La respuesta será de utilidad para sustentar una propuesta de actividades de instrucción que permita a los estudiantes desarrollar conocimientos sobre la integral definida, así como desarrollar habilidades matemáticas que le permitan utilizarlos para analizar situaciones y resolver problemas, tanto en el contexto matemático como en otros contextos.

1.3. Justificación

Los conceptos y procesos del Cálculo Diferencial e Integral, tales como noción del cambio, la variación, la acumulación, procesos infinitos y la convergencia, son poderosas herramientas para el análisis, la descripción y la predicción de situaciones. Esto es para generar modelos de situaciones (Cantoral, 1993).

Desarrollar un pensamiento matemático más estructurado implica transitar desde una posición, en donde los conceptos son generados a partir de la experiencia e intuición, hacia otra en donde se especifican por definiciones formales y propiedades deducibles de manera lógica.

Pasar del conocimiento elemental a un conocimiento más formalizado, requiere de la transformación de conceptos, de las formas de representarlos, de la introducción de nuevas ideas, de nuevas estrategias, de nuevas formas de pensamientos y de técnicas de trabajo más eficientes y eficaces.

En la formación de los ingenieros, los cursos de matemáticas deben contribuir a dotar de herramientas de cálculo y desarrollar habilidades matemáticas en los estudiantes, como son por ejemplo: la identificación de patrones, abstracción, la generalización, la resolución de problemas.

La enseñanza de las matemáticas debe propiciar que los estudiantes valoren la potencia y los límites de diferentes métodos, lo que ayudará a evitar la utilización a ciega de métodos y procedimientos. Estos conocimientos no deben presentarse como un producto del pensamiento sino más bien como un producto de la actividad humana.

La evolución del concepto de integral definida muestra que hay otros conceptos y estrategias que permiten la conexión con la realidad y una mejor comprensión de por qué hacemos todos esos procesos.

Por todo lo anterior consideramos importante y oportuno elaborar propuestas de actividades para el aprendizaje de las matemáticas, en particular para el Cálculo Diferencial e Integral, que consideren los planteamientos anteriores. Esto es, para que los estudiantes aprendan con comprensión el concepto de integral definida, deben desarrollar o reconstruir las ideas que condujeron a su creación. Para ello deben apoyarse en la resolución de problemas que involucren esas experiencias en algún contexto.

Los estudiantes deben involucrarse en un proceso continuo de desarrollo y refinamiento de sus formas de pensar, explorando la relación entre diversos conceptos, procesos, estrategias y la propia experiencia.

En este sentido diseñar propuestas didácticas que permitan al estudiante desarrollar el conocimiento con comprensión es importante para:

a. Contribuir al desarrollo personal y social de los estudiantes volviéndolo más seguro al interactuar con sus compañeros y el maestro, al comunicar sus ideas, estrategias y resultados durante la resolución de problemas.
b. Fortalecer las capacidades y habilidades de los estudiantes mediante el desarrollo de procedimientos, aplicación de estrategias, elaboración de conjeturas, identificación de patrones durante la resolución de problemas.
c. Promover la interacción de los estudiantes con el profesor y de los estudiantes entre sí, a fin de favorecer el desarrollo de procesos y formas de pensar que permiten seleccionar estrategias y patrones adecuados, predecir y generalizar resultados durante la resolución de problemas.
d. Promover un procesamiento activo e interdisciplinario de la información para que los estudiantes construyan su propio conocimiento a través de la resolución de problemas y no se limiten a una simple recepción pasiva de memorización de la información.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo General

El objetivo de este trabajo de tesis es documentar el diseño, implementación, y evaluación de una secuencia didáctica que permita desarrollar conocimientos y comprensión del concepto “Integral Definida” de forma tal que los estudiantes del nivel medio superior sean capaces de determinar o aproximar el área de una región del plano limitada por curvas, de las cuales se conoce su representación algebraica.

1.4.2. Objetivos Particulares

a. Analizar la currícula de Cálculo Diferencial e Integral para determinar los objetivos educativos asociados con el tema de integral definida.
b. Analizar el desarrollo histórico del concepto de integral definida para identificar los problemas que propiciaron la creación de este conocimiento, y los conceptos y procesos que fueron utilizados y desarrollarlos para solucionarlos.
c. Analizar diferentes propuestas y concepciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular sobre Calculo Integral, con la finalidad de generar criterios para identificar las formas de trabajo que ayudan a lograr un mejor aprendizaje, identificando las relacionadas con el papel de los estudiantes, de los profesores, del uso de recursos y el ambiente de trabajo en el aula.
d. Diseñar, seleccionar y analizar actividades y problemas relacionados con la Integral definida para identificar los conceptos, las estrategias y procesos necesarios para darles solución, así como las dificultades que pudieran presentar los estudiantes al solucionarlos; integrando un banco de problemas potencialmente útiles para actividades de instrucción.
e. Aplicar la secuencia de instrucción diseñada con un grupo de estudiantes y analizar los resultados de acuerdo a los conocimientos desarrollados por ellos con el propósito de valorar su efectividad para alcanzar los objetivos educativos propuestos.

1.5. Alcances y Limitaciones

Las actividades propuestas en la secuencia didáctica diseñada para este trabajo de tesis fueron pensadas considerando un contexto (Medición del área) familiar para los estudiantes, utilizando elementos que faciliten la comprensión (Polígonos regulares, regiones limitadas por la gráfica de funciones potencias) y el desarrollo de los procesos involucrados a la hora de realizarlas.

En estas actividades aparecen conceptos básicos (medición, acotamiento, precisión, estimación, exhaución) que se van relacionando entre sí y con otros conceptos (sucesión, sumas, límites), para generar el concepto de integral definida en forma que sea comprensible para los estudiantes.

Las actividades fueron pensadas para que los estudiantes desarrollen conocimientos sobre esos conceptos y sean la base de una mayor compresión, generen nuevos conceptos y para utilizar nuevas y mejores formas de representación.

Se pretende también, que el estudiante desarrolle una comprensión de la importancia y potencialidad de los conceptos y métodos asociados con la integral definida en el contexto del cálculo de áreas.

Este trabajo puede servir como base a otros profesores para que diseñen y desarrollen actividades de instrucción que propicien en los estudiantes la comprensión del concepto de integral definida y los conocimientos matemáticos asociados, para desarrollar nuevas formas de razonar y actuar en los estudiantes.

CAPÍTULO 2

MARCO DE TRABAJO

2.1 SOBRE EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y SU EVOLUCIÓN

El proceso de medición ha jugado un papel importante en la construcción de muchos conceptos matemáticos. La medición es un proceso que consiste en comparar un patrón seleccionado con el objeto o fenómeno cuya magnitud física se desea medir para ver cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud.

No siempre se puede llevar a cabo una medición de forma precisa o directa, por lo que ha sido necesario desarrollar procesos que puedan conducir a formas más eficientes, eficaces e indirectas de medir. Muchos de los procesos para medir magnitudes (no solo áreas y longitudes) en la actualidad se realizan de manera indirecta, y con mucha precisión.

En la evolución del conocimiento matemático, cada rama de las matemáticas ha sido desarrollada para abordar una clase de problemas. Una de las principales clases de problemas que condujeron al desarrollo del cálculo fue la determinación de áreas, volúmenes y centros de gravedad de una variedad de figuras.

El problema de medir el área de figuras planas y el volumen de sólidos se remonta al tiempo los griegos, básicamente tenían dos métodos para llevar a cabo esta tarea: los métodos heurísticos y los métodos exhaustivos.

Los métodos heurísticos se basan en la teoría atomista de Demócrito (460 A.C. – 370 A.C.), que consideraba las líneas, superficies o volúmenes formados por un gran número (finito) de átomos. Así, medir la longitud, la superficie y/o el volumen se reducía a sumar átomos. Demócrito utilizó este método para calcular por primera vez el volumen del cono y de la pirámide.

La geometría elemental nos ha enseñado que algunas superficies pueden ser divididas en cuadrados, triángulos o rectángulos para la medición de su área, sin embargo, debido a la facilidad con que se puede calcular su área, es común emplear cuadrados como patrones de medición.

Para medir el área de figuras sencillas, principalmente figuras limitadas por segmentos de línea recta, como triángulos, rectángulos, paralelogramos o figuras que puedan dividirse en las primeras o combinación de ellas, las matemáticas elementales eran suficientes. Sin embargo, cuando las curvas o superficies curvas están involucradas, la geometría elemental es "casi" impotente. Ante este reto, hubo la necesidad de desarrollar nuevas y mejores técnicas y procesos para medir y calcular las longitudes, áreas, volúmenes, y otras magnitudes.

Medir el área de las superficies limitadas por curvas requiere de mejorar la compresión del significado que tiene para nosotros la expresión "comparar con un patrón de medida". Esta comprensión no solo nos permite preguntamos: ¿cuántas veces cabe el patrón en la superficie que deseamos medir?, sino también preguntarnos ¿cuántos de estos patrones se requieren como mínimo para cubrirla?

Estos esfuerzos permiten de alguna manera proporcionar una estimación con cierto grado de precisión en la medida de la magnitud que deseamos medir, al establecer por acotamiento, valores numéricos (cota inferior y cota superior), entre los cuales se encuentra la medida real de dicha magnitud.

Comprender que los patrones de medición que mejor se ajustan a las superficies limitadas por curvas son los que tienen menor medida de magnitud, permite descubrir que la estimación hecha por acotamiento puede tener diferentes grados de precisión.

Así pues, la integral definida puede verse como una etapa en el proceso de dar solución al problema de determinar el área de superficies. Esto es, para hablar de la integral definida, debemos conocer los diferentes procesos que podemos utilizar al obtener el área de superficies. Más específicamente ¿Cómo se determina el área de una superficie?

En este proceso evolutivo, se han identificado propiedades, se han desarrollado métodos y estrategias para obtener el área. Una estrategia muy utilizada desde la antigüedad hasta nuestros días es: Para abordar una situación compleja, podemos dividirla en partes o situaciones más simples, las cuales podemos o conocemos cómo analizarlas (Polya, 1989, Morris Kline, 1992). Así, se conoce cómo establecer el área de los polígonos regulares, al dividirlos en triángulos, para los cuales conocemos cómo obtener el área. La base de comparación siempre han sido las unidades cuadradas debido a que sólo se requiere de la medida de uno de sus lados (lados iguales) para poder calcularla, lo cual facilita enormemente la medición.

A partir de que se conoce como determinar el área de los polígonos regulares se puede establecer un proceso o método para determinar el área de las superficies encerradas por polígonos irregulares. Este consiste en dividir la superficie en figuras simples asociadas a los vértices del polígono, lo que lleva a ver la superficie dividida en triángulos y/o rectángulos y el área del polígono irregular como una suma de áreas de triángulos y/o rectángulos.

La determinación del área de superficies delimitadas por curvas se realizó usando procedimientos semejantes a los utilizados en polígonos irregulares:

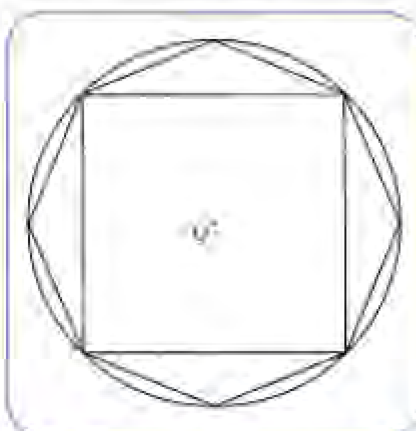


Figura 2. Polígonos regulares inscritos en el círculo.

El círculo fue una de las primeras superficies limitadas por curvas cuya área se intentó medir en la antigüedad. Los griegos resolvieron el problema de encontrar su área mediante la adopción de un proceso natural. En primer lugar, obtuvieron una aproximación del área al inscribir un cuadrado. Luego mejoraron la aproximación al inscribir el octágono regular, luego con el polígono regular de 16 lados, y así sucesivamente (Figura 2), proceso al que llamaron método de exhaución o agotamiento que fue introducido por Antífonte (480 A.C. – 411 A.C.) y conocido por Arquímedes (287 A.C.–212 A.C.), dado que aparece entre las recopilaciones de Euclides (325 A.C.–265 A.C.). También utilizaron fórmulas como: $A = kr^2$, $\frac{p}{c} = k$, para un círculo de radio r, que daban resultados aproximados del área, en ellas se reflejan sus conocimientos de la relación entre el diámetro y la circunferencia. Arquímedes aproximó el valor de "k", que representó con la letra griega: "π" al medir el perímetro de polígonos regulares inscritos en un círculo de radio unitario y determinó que se encontraba entre los valores $\frac{22}{7}$ y $\frac{223}{71}$. Otro resultado importante de Arquímedes, en la medición del área con el método de exhaución, fue la determinación del área limitada por una parábola y una de sus cuerdas (Figura 3). Para ello empleó una construcción compleja de triángulos inscritos (Morris Kline, 1992).

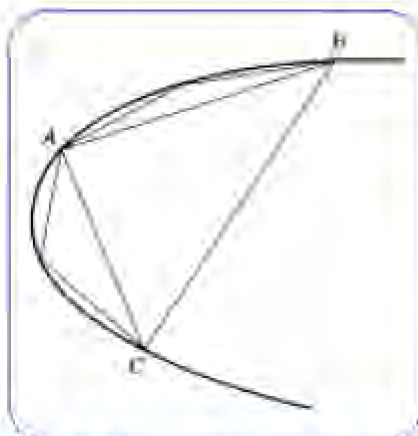


Figura 3. Segmento parabólico utilizado por Arquímedes.

Con estos procesos los matemáticos de la época podían (porque tal vez no requerían de mayor exactitud en sus cálculos) comparar áreas de regiones, acotarlas, estimarlas, dar una precisión de sus cálculos, entre otras cosas, pero no se logró una formulación del proceso de exhaución en el sentido moderno.

Casi 20 siglos después de Arquímedes, durante los cuales no hubo avances importantes, Kepler, en el siglo XVII, retoma el problema de la medición al calcular el volumen de toneles de vino.

Un importante paso, en el proceso de desarrollar una mejor comprensión de la medición de las magnitudes físicas, fue dado por Cavalieri (1598–1647) al desarrollar la teoría de los "indivisibles" para determinar áreas y volúmenes.

Esta teoría estudia las magnitudes geométricas descompuestas en un número infinito de elementos, o indivisibles, que son los últimos términos de la descomposición que se puede hacer. La medida de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes se traduce en la suma de una infinidad de indivisibles.

Pascal (1623–1662) reforzó la teoría de Cavalieri al sustituir los indivisibles por rectángulos infinitesimales que son el principio del cálculo de la integral definida, aunque sin la noción rigurosa moderna de paso al límite.

El descubrimiento, por Gottfried Wilhelm Leibniz (1645–1716) e Isaac Newton (1642–1727), del cálculo, del cual utilizamos en la actualidad la acertada simbología desarrollada por el primero y la parte conceptual contextuada del segundo, junto con el descubrimiento de Isaac Barrow (1639–1677) que los procesos para calcular tangentes y cuadraturas son inversos, resultado que conocemos como teorema fundamental del cálculo integral, permitieron dar un paso gigantesco en la solución a los problemas de la medición de magnitudes físicas.

Las ideas desarrolladas por pensadores, como Arquímedes y anteriores a él, sirvieron de base para que otros matemáticos, Kepler, Cavalieri, Pascal, Leibniz, Newton, Barrow, etc., introdujeran un método general de aproximar áreas curvilíneas por figuras rectilíneas y estar cada vez más cerca del área deseada mediante la mejora de la aproximación rectilínea.

El cálculo integral fue asentado de forma rigurosa a partir de las nociones de límites desarrolladas por Cauchy (1789–1857), pero la integral de Cauchy estaba limitada para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado. Posteriormente Riemann (1826–1867) definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones que son integrables.

2.2 ÁREA COMO LÍMITE DE UNA SUMA

En este método se considera un área cualquiera limitada por la curva CD, descrita por una función $y = f(x)$, por las rectas verticales en $x = a$ y $x = b$, y por el eje X. Podemos obtener una aproximación al área, al elegir el mínimo valor de "y" en el intervalo $[a, b]$ y multiplicarlo por $b - a$. De acuerdo con la Figura 4 dicha aproximación es el área del rectángulo inscrito que tiene como altura el valor mínimo m_1, y como base la longitud $(b - a)$ del intervalo (Morris Kline, 1992).

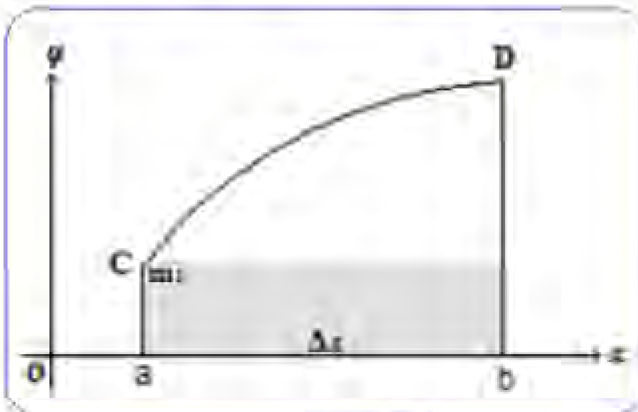


Figura 3. Área aproximada por el área de un rectángulo inscrito.

Con la notación:

$$b - a = \Delta x$$

m_1 = Mínimo valor de "y" en $[a, b]$

La aproximación del área es: $\underline{S_1} = m_1 \Delta x$

En esta representación del área, la S hace referencia a la suma que se obtendrá en el proceso, el subíndice nos recuerda que tenemos la primera estimación del área, la barra debajo de la S es para indicar que se ha utilizado el valor mínimo de "y" en el intervalo de longitud Δx.

Podemos obtener una mejor aproximación al área en cuestión si dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos partes iguales, cada una de las cuales tiene una longitud que denotamos por Δx. Representamos con m_i al valor mínimo de "y" en cada intervalo, a continuación, formamos la suma.

$$\underline{S}_2 = m_1\Delta x + m_2\Delta x$$

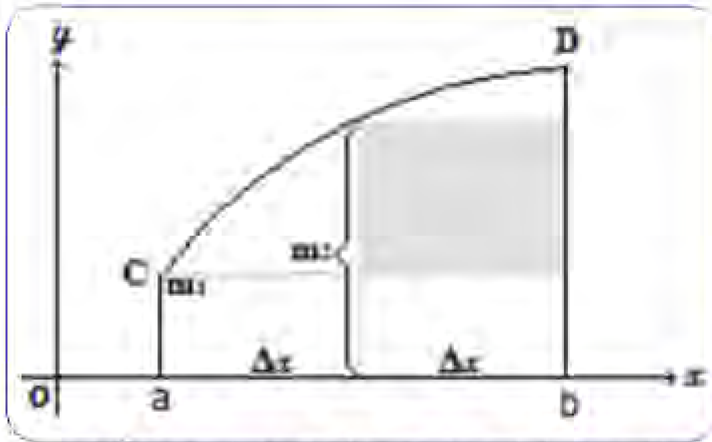


Figura 4. Área aproximada por la suma del área de dos rectángulos inscritos.

Geométricamente, $\underline{S}_2$ es la suma del área de dos rectángulos, y es claro que $\underline{S}_2$ es una mejor estimación al área bajo la curva CD que $\underline{S}_1$, ya que incluye el área sombreada en la figura anterior (Figura 5), mientras que $\underline{S}_1$, no la incluye.

2.2.1 Sumas inferiores

Se puede continuar el proceso de dividir el intervalo $[a, b]$ en tres partes iguales para formar $\underline{S}_3$, luego en cuatro partes iguales para formar $\underline{S}_4$, y así sucesivamente para ir aproximándonos cada vez más a la medida real del área (Morris Kline, 1992).

De esta forma obtenemos una secuencia de números $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3$, ..., $\underline{S}_n$, tales que:

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \underline{S}_3 \leq \cdots \leq \underline{S}_n$$

En los que:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \cdots + m_n\Delta x, \text{ para } n = 1,2,3,\ldots$$

m_n = valor mínimo de "y" para cada una de las partes iguales, respectivas, en que se ha dividido el intervalo $[a, b]$.

Geométricamente $\underline{S}_n$ es la suma del área de "n" rectángulos inscritos, como se muestra en la figura a continuación (Figura 6).

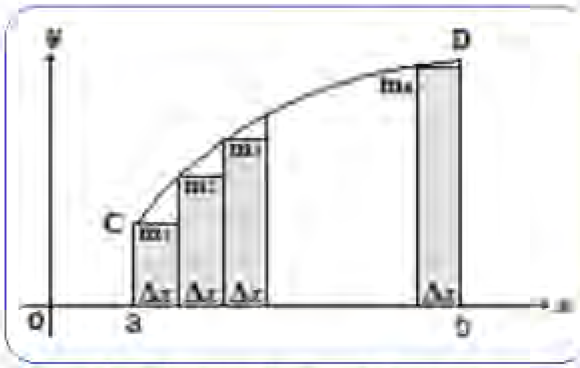


Figura 5. Área vista como la suma de áreas de rectángulos inscritos.

En este proceso pueden observarse los siguientes puntos:

a. Para cada valor de "n" existe una $\underline{S_n}$ distinta.

b. $\underline{S_n}$ es una función de n.

c. El valor de "n" puede tomarse más y más grande según la precisión que se quiera en la estimación.

Por lo tanto tiene sentido pensar "hacia qué valor se aproximan estas estimaciones" e introducir el concepto de límite para establecer el significado de la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n}$$

Este límite, en concordancia con la figura 6, representa el área bajo la curva CD.

2.2.2 Sumas Superiores

Otro proceso para aproximar o calcular el valor del área, similar al anterior, es utilizar el mayor valor de "y" en cada una de las "n" partes en que se divide el intervalo [a , b], como hacemos en el proceso a continuación (Morris Kline, 1992).

Si utilizamos el valor máximo de "y" en cada una de las "n" partes en que se puede dividir el intervalo (a, b), es posible generar otra secuencia de números:

$$\overline{S_1},\ \overline{S_2},\ \overline{S_3},\ \dots,\ \overline{S_n}$$

Que cumplen:

$$\overline{S_n} \le \cdots \le \overline{S_3} \le \overline{S_2} \le \overline{S_1}$$

En los que:

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \cdots + M_n\Delta x, \text{ para } n = 1,2\,3, \ldots$$

M_n = valor máximo de "y" para cada una de las partes iguales, respectivas, en las que se ha dividido el intervalo $[a, b]$.

La notación $\overline{S_n}$ es para recordar que, en la suma, se ha utilizado el máximo valor de "y" en cada una de las subdivisiones respectivas del intervalo $[a, b]$.

Cada término en la suma $\overline{S_n}$, es el área de un rectángulo, y el área en cada rectángulo es mayor que la porción del área bajo la curva que aproxima.

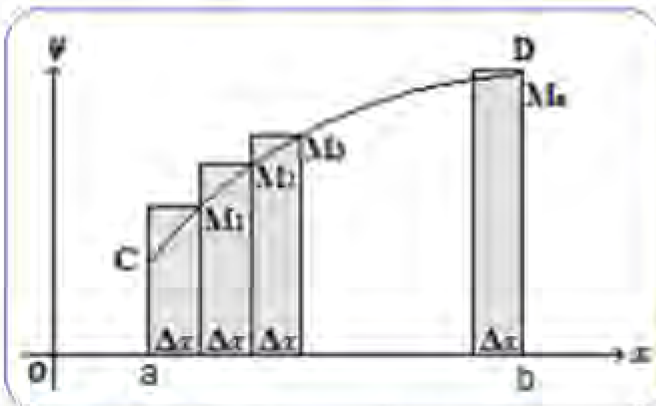


Figura 6. Área aproximada por sucesión de rectángulos.

Geométricamente puede verse en la figura anterior (Figura 7) que a medida que "n" se toma más grande:

a. Δx se hace más pequeño.
b. La suma correspondiente $\overline{S_n}$ es una mejor estimación del área bajo la curva, porque para un Δx más pequeño, el exceso de área que se obtiene con el valor máximo de "y" es menor que el exceso de área que se obtiene con los otros valores máximos de "y" en los Δx grandes que incluyan al pequeño.
c. $\overline{S_n}$ es función de "n".

Ya que "n" puede aumentar sin límite, podemos también pensar en el significado de la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n}$$

Este límite, en concordancia con la figura 7, representa el área bajo la curva CD.

Con estos procesos tenemos entonces dos formas de estimar el área bajo la curva CD y las estimaciones pueden ser tan próximas al valor real de dicha área como deseemos, más aún el área exacta “S” está siempre acotada entre estas dos estimaciones, es decir cumple la desigualdad:

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S_n} \leq S \leq \lim_{n \to \infty} \overline{S_n}$$

Esta forma de aproximar un área por la suma de áreas de rectángulos es completamente análogo al esquema empleado por los griegos para aproximar el área de un círculo por polígonos regulares.

Entre las analogías que podemos observar están:

a. Cada suma S_n de áreas de rectángulos, que aproxima al área exacta bajo la curva CD, es análoga al área de polígonos regulares que aproximan al área del círculo.
b. En analogía al área del círculo que está acotada entre el área de polígonos regulares inscritos y circunscritos, el área bajo la curva CD está acotada por las sumas de áreas de rectángulos $\underline{S_n}$ y $\overline{S_n}$, que configurados como una sola región son polígonos, uno inscrito y el otro que cubre el área bajo la curva.

Tres estrategias fundamentales que han permitido la evolución de las formas rudimentarias de medir el área a las formas modernas son: la estimación, la acotación, dividir una región plana en otras regiones cuyas áreas se pueden calcular más fácilmente (exhaución).

2.2.3 Concepto de integral definida y notación

El estudio de las ideas concebidas por Arquímedes, Cavalieri y otros matemáticos, que construyeron los conceptos de coordenada, función y límite, permitieron generar nuevos sistemas de símbolos propiciaron el desarrollo del sentido algebraico de esas ideas (Morris Kline, 1992).

Estos sistemas de símbolos contribuyeron a que se desarrollara el concepto de integral definida en el contexto del cálculo de áreas, como el límite de una suma, al suponer que se tiene una curva situada en un sistema coordenado, representada por la gráfica de la función positiva $y = f(x)$.

Para determinar el área S de la superficie plana limitada por la curva, el eje de las abscisas X y las rectas paralelas al eje Y: $x = a$ y $x = b$, el intervalo $[a, b]$ se divide en "n" partes de longitud Δx_i.

Estas partes pueden ser de igual o diferentes longitudes, en cada una de estas partes se elige un número x_i, que puede ser el número donde la función alcanza su valor máximo, puede ser el punto medio de cada una de estas partes, para formar rectángulos de base Δx_i y altura $f(x_i)$, cuyas suma de áreas aproximan al área bajo la curva (Figura 8).

Con este proceso se obtiene la expresión.

$$S = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Esta área "S" se representó con el símbolo $\int_a^b f(x)dx$, donde la expresión $f(x)dx$ se llama integrando. a y b se llaman límites de integración. "a" es el límite inferior y "b" es el límite superior.

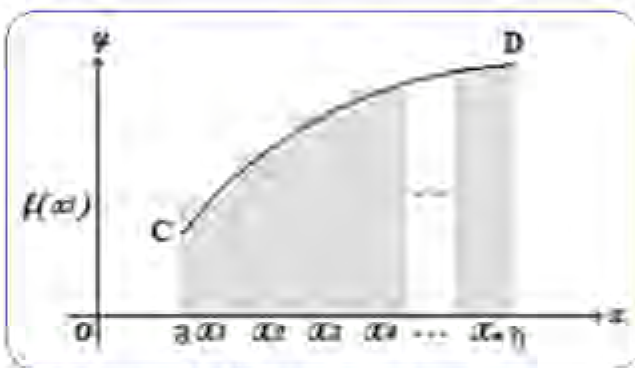


Figura 7. Integral definida en el contexto de áreas.

El símbolo que utilizamos para representar la integral ($\int$) apareció por primera vez en un manuscrito fechado el 29 de octubre de 1675, este símbolo es la "S" alargada que utilizamos para representar el límite de la suma de áreas de rectángulos y fue introducido por Leibniz para recordarnos este proceso.

$$S = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

La dificultad que representaba poder realizar la suma anterior para cualquier función $y = f(x)$ o expresarla con una fórmula sencilla condujo al planteamiento del problema de determinar un método general para calcular las integrales definidas. Este problema fue de mucho interés para los matemáticos, durante un largo periodo de tiempo, por la utilidad que ello suponía para el cálculo de áreas de figuras curvilíneas, volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, la velocidad, el trabajo, etc.

2.3 RELACIÓN DE LA INTEGRAL CON EL CONCEPTO DE DERIVADA

Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716):

Recopilar, organizar y analizar el material teórico y práctico en torno a la integral definida, producidos en la antigüedad, fue una labor titánica que tomó mucho tiempo pero que al relacionarlo con el concepto de derivada, desarrollado independientemente por Newton (1642–1727) y Leibniz (1646–1716), finalmente condujo a un método general para medir el área. Para obtenerlo se construyó una función A(x), que representa al área bajo la curva descrita por una función $f(x)$, desde $t = a$ hasta $t = x$ como se muestra en la figura 9, y se concluyó que:

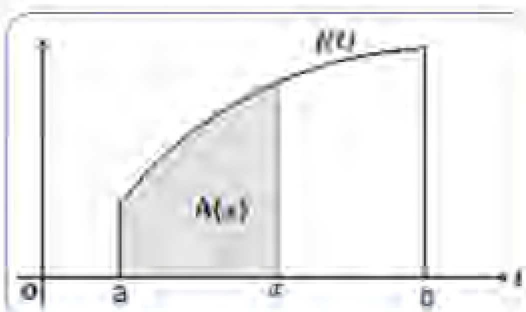


Figura 8. Área tratada como función de x.

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x)$$

Este resultado muestra la relación entre la medición del área y el cálculo diferencial y conduce a uno de los planteamientos que permite la obtención del método general para calcular el área de una superficie:

¿Dada la derivada $f(x)$ de una función $A(x)$, cómo obtenemos la función $A(x)$?

2.3.1 Segundo teorema fundamental del cálculo

Tal función $A(x)$ se llama primitiva de $f(x)$ y con la fórmula de Barrow, también llamada "segundo teorema fundamental del cálculo":

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a)$$

El problema de calcular la integral definida se reduce a la obtención de una primitiva, constituyendo así un enlace entre el cálculo diferencial e integral.

En resumen el concepto de integral definida desde su origen está asociado con procedimientos para determinar el área de regiones planas delimitadas por gráficas de funciones o que pueden ser aproximadas por funciones.

Este concepto sintetiza los resultados de otros procesos que permiten el cálculo y la estimación del área de superficies que no pueden ser determinadas en forma directa o precisa por los métodos tradicionales (Fórmulas).

La integral definida como proceso para determinar el área de una región involucra (Figura 10) la comparación, la acotación, la estimación, la precisión, el uso de propiedades del área y de su significado, implica dar otras interpretaciones al área de una región de acuerdo con el contexto en el que se interpreta la función (Alexandrov et al, 1985).

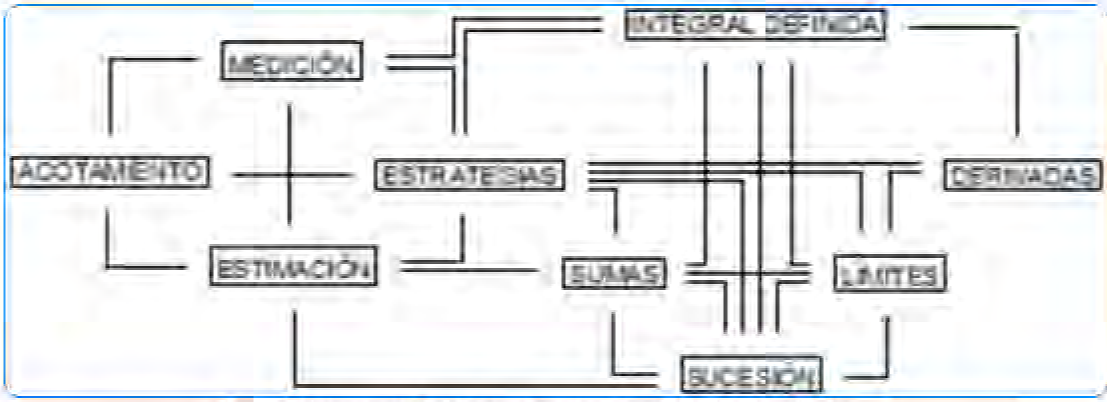


Figura 9. Integral definida como proceso para medir magnitudes.

Todos estos procesos, obtenidos de la experiencia, han sido abstraídos y generalizados en uno sólo que es manipulable desde un punto de vista puramente matemático que pierde, aparentemente, toda conexión con la vida cotidiana. Esta aparente pérdida de conexión tiene que ver con la perspectiva con que es tratada en los cursos, por lo que a continuación propongo un punto de vista sobre cómo debe ser abordada.

2.4 ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL DEFINIDA

El análisis anterior sobre la evolución del concepto de integral definida, lleva a preguntarnos: ¿Qué deben aprender los estudiantes sobre la integral definida? ¿Cómo debe ser enseñado?

Las respuestas a estas preguntas dependen del tipo de estudiantes. No es la misma respuesta si consideramos estudiantes de programas de matemáticas o físico matemáticos, que si consideramos estudiantes de carreras de ingeniería, biología, economía u otra disciplina.

Aunque los objetivos educativos de una disciplina deben considerar dos tipos: objetivos formativos y objetivos de sustancia (Niss, 1982), su determinación depende del papel de la disciplina en la formación que se pretende proporcionar. Así, en la formación de los ingenieros, los cursos de matemáticas deben contribuir a dotar de herramientas de cálculo y desarrollar habilidades matemáticas en los estudiantes, como son por ejemplo: la identificación de patrones, abstracción, la generalización, la resolución de problemas. En este sentido la enseñanza de las matemáticas debe propiciar que los estudiantes valoren la potencia y los límites de diferentes métodos, lo que ayudará a evitar la utilización ciega de métodos y procedimientos, y a disponer de un repertorio amplio de procedimientos para ser utilizados de manera eficiente y eficaz al abordar problemas (Flores, 1997).

La integral definida, como concepto matemático, ha sido el resultado de la abstracción de muchos procesos obtenidos de la experiencia a lo largo de muchos años. Este concepto, aunque abstracto, está relacionado con la realidad tanto en su origen como en sus aplicaciones, por ello, su comprensión no es algo que se logre de la noche a la mañana, comprender y aprender el concepto de integral requiere de la comprensión y del aprendizaje de los procesos estratégicos que permitieron su desarrollo, así como la forma en que se han ido combinando unos con otros hasta obtener su concepción moderna. El conocimiento sobre estos procesos permitirá que el estudiante disponga de una amplia gama de formas de hacer los cálculos en los que se requiera del concepto, también podrá valorar las diferentes situaciones en las que puede aplicar este conocimiento y elegir el proceso que le permita acercarse a la solución de dicha situación, además de que podrá identificar los procesos claves que permitieron el desarrollo general del concepto, mismos que son esenciales a la hora de la transferencia del conocimiento.

En el nivel superior de educación, los actuales programas de estudio, los textos, las evaluaciones, así como la instrucción en torno al concepto de integral definida no permiten (y es imposible hacerlo en un curso) que, al aprenderlo, los estudiantes recorran las principales etapas y procesos por los que ha pasado durante su construcción, además que logren establecer la conexión entre el cálculo integral y los problemas del mundo físico, así como una comprensión del concepto que les permita utilizarlo como una herramienta para abordar otros problemas.

Estas deficiencias y otras que han sido señaladas por varios investigadores (Orton, 1983; Quezada, 1986; Calvo, 1997; Artigue, 1998; Tall, 2003; etc.), agudizan las concepciones que la mayoría de las personas se crean en torno al cálculo integral y las matemáticas en general, como un conocimiento rígido e inmutable con el tiempo. Para muchos profesores de cálculo integral, la integral definida trata solo sobre un proceso inverso al de la derivada (dada la derivada de una función, obtener la función), en el que deben aprender métodos que facilitan la obtención de una función llamada primitiva, que cuando la evalúan en sus límites de integración obtienen el área de la región limitada por la gráfica de la función derivada, etc., pero nadie entiende por qué tiene que ser así. Además en muchos cursos se invierte todo el tiempo disponible en tratar que el alumno aprenda a determinar la función primitiva, omitiendo por completo el tema de las aplicaciones, que los aprendices no ven la necesidad de este aprendizaje. Básicamente conciben el aprendizaje del cálculo integral como una mera memorización de procedimientos y fórmulas que permiten calcular una función primitiva pero muy pocos saben que dicha primitiva facilita enormemente la medición del área (y de otras magnitudes) de regiones limitadas por funciones. Más aún no saben cómo proceder ante situaciones en las que no se conoce una función. Skemp (1971) citado en (Tall, 1991) menciona: los estudiantes aprenden el "producto del pensamiento matemático" en vez de su "proceso".

El análisis en la evolución del concepto de integral definida muestra que hay otros conceptos y estrategias que permiten la conexión con la realidad y una mejor comprensión de por qué hacemos todos esos procesos. Entre estos conceptos están la estimación de magnitudes (área, volumen, longitud de curva, trabajo, centro de masas, etc.), el acotamiento, la precisión, la estrategia de dividir un todo en partes más simples, la exhaución, la sucesión de sumas, los límites, las derivadas, la forma en que estos conceptos se relacionan entre sí para conducir a un método general de hacer las mediciones y la relación que este método pueda tener con otras áreas del conocimiento. Se debe concebir la integral definida como producto de la actividad humana, y su enseñanza debe considerar todos los aspectos del pensamiento matemático, así como su papel en la sociedad.

Es decir, durante la enseñanza se debe hacer énfasis en aquellos conocimientos que permitan, al estudiante, el desarrollo de significado de los conceptos, mismos que le permiten interpretar el resultado en un contexto de la realidad, las estrategias que le permiten ir combinando esos conocimientos, así como el reconocimiento de los patrones que le permiten generalizar el concepto de integral definida. Debemos propiciar la construcción del nuevo conocimiento a partir del conocimiento previo, mostrar la forma en que se conecta con la realidad física y con otras áreas del conocimiento, y no sólo mostrar la forma general en que se hace un cálculo.

Esta enseñanza debe propiciar, en los estudiantes, el desarrollo de habilidades que les permitan identificar las situaciones en que pueden aplicar este conocimiento y ser competentes a la hora de la aplicación. Esto es, deben poder utilizar con soltura cualquiera de los procesos y habilidades aprendidos para proponer o dar solución a una situación que requiera del concepto de integral definida.

Así, una persona que conoce el concepto de integral definida debe saber de la de la evolución del concepto desde sus raíces hasta sus más recientes desarrollos, debe poder identificar las situaciones en que puede aplicar o a las que puede adaptar estos conocimientos, debe poder moldear este concepto para explicar otros conceptos que requieran de la integral.

Para dotar a los estudiantes con las herramientas necesarias que serán de utilidad en su desarrollo personal y en la vida, se deben considerar los dos tipos de objetivos educativos (Niss, 1982):

a. Los objetivos formativos son todos aquellos objetivos dirigidos a influenciar las características y capacidades generales de los estudiantes.
    - Actitudes (Entusiasmo por lo que está aprendiendo).
    - Capacidades mentales (Observar, recordar, repetir).
    - Habilidad para realizar actividades (Procesamiento algorítmico).
b. Los objetivos de sustancia son todos aquellos objetivos orientados al equipamiento del estudiante con aquellas competencias para las cuales la matemática como tal es indispensable.
    - Desarrollo de modelos de pensamiento, además de estrategias que el estudiante emplee para resolver situaciones que no se le habían presentado antes. Para esto debe equipar al estudiante de cuatro competencias: abstraer, generalizar, descifrar y cifrar mensajes.

2.4.1 Enseñar y Aprender

La respuesta a la pregunta ¿Qué deben aprender los estudiantes sobre integral definida? está relacionada con otras preguntas que debe responder previamente la persona que enseña: ¿Qué es aprender? ¿Qué es aprender matemáticas? ¿Cómo se aprenden los conceptos matemáticos? ¿Cómo se describe un concepto matemático? ¿Cómo evalúas el aprendizaje de los conceptos?

De manera general se acepta que aprender es el proceso por el cual el conocimiento de un individuo es incrementado o modificado, y que la transferencia es el proceso de aplicar el conocimiento adquirido a situaciones distintas de aquellas en las que aprendió (Collins, Greeno y Resnick, 1996). Por ello, podemos decir que: aprender matemáticas es el proceso por el cual el conocimiento matemático de un individuo es incrementado o modificado, y que transferencia (del conocimiento matemático) es el proceso de aplicar el conocimiento matemático adquirido a situaciones distintas de aquellas en las que aprendió.

2.4.2 El aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de Modelos y Modelación

El proceso de aprender, de acuerdo con la Perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003) es un proceso continuo de desarrollo y refinamiento de sistemas conceptuales o modelos que son utilizados para describir, explicar, comunicar, y predecir las situaciones que enfrenta un individuo o una comunidad. Un sistema conceptual o modelo es, en esta perspectiva, un sistema formado por elementos, relaciones entre esos elementos, operaciones que describen como interactúan esos elementos, patrones y reglas que se aplican a las relaciones y operaciones. El aprendizaje se asocia con el desarrollo de modelos, proceso que implica una serie de ciclos de desarrollo y refinamiento de los sistemas conceptuales. Estos son caracterizados por las formas de pensamiento que utilizan los estudiantes sobre los datos, las metas y las posibles formas de solucionar los problemas que plantea la situación. Durante estos ciclos los estudiantes utilizan los conocimientos y estrategias adquiridas previamente para entender la situación, para plantearse las preguntas relevantes, para determinar la información que requiere y los pasos a seguir para responderlas y para evaluar sus resultados.

Los ciclos de modelación muestran aproximaciones iniciales burdas, dispersas, poco o nada estructuradas, las cuales van evolucionando hacia formas más integradas en la medida en que el estudiante analiza, discute, comunica sus diferentes aproximaciones con sus compañeros y con el profesor. Durante el proceso de modelación los estudiantes realizan diversas actividades: cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos, desarrollar criterios. El aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes se desarrolla en un ambiente social en el que las interacciones (discusiones, intercambios, negociaciones) dentro de una comunidad para entender y explicar situaciones, propician el desarrollo de sistemas conceptuales en cada individuo (y en la comunidad) asociados a cada situación o grupos de situaciones (Lesh & Doerr, 2003).

El aprendizaje de un concepto no se da en forma aislada, sino que está asociada con el desarrollo de otros conceptos y procedimientos. Aprender un concepto matemático está asociado con las experiencias de los estudiantes. El desarrollo conceptual es un proceso gradual y contextualizado. Las primeras etapas del desarrollo del conocimiento de los estudiantes tienden a organizarse alrededor de las experiencias más que alrededor de las abstracciones. Esto es, dos conceptos están relacionados porque se han utilizado conjuntamente en alguna experiencia de solución de problemas. Un concepto se generaliza en la medida en que se comprende cómo puede ser utilizado para analizar diversas situaciones. El conocimiento se desarrolla a lo largo de una variedad de dimensiones: concreto – abstracto, simple – complejo, situado – descontextualizado, específico – general, interno – externo, intuitivo – formal, estable – inestable. Los modelos que son más útiles no siempre son los más abstractos, los más complejos, más generales y o más formales. Durante las primeras etapas de desarrollo, los sistemas conceptuales son difusos, graduales, pobremente diferenciados y pobremente coordinados, pero gradualmente van siendo más claros, mejor estructurados e integrados con otros conceptos y procedimientos, y sus semejanzas y diferencias con otros conceptos son claras (Lesh & Doerr, 2003).

2.4.3 Resolución de problemas y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Schoenfeld (1985) afirma que aprender matemáticas se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya ideas matemáticas. Se reconoce que las experiencias de aprendizaje de los estudiantes se enriquecen cuando trabajan con problemas o tareas planteadas en contextos familiares y donde tengan la oportunidad de utilizar recursos que les permitan aplicar las ideas fundamentales de las matemáticas en los procesos de solución. Así la resolución de problemas que involucren distintos contextos es fundamental para lograr una sólida formación en la educación matemática.

De acuerdo con (Santos, 1997) un problema es una tarea o situación que presenta las siguientes características:

a) La existencia de un interés, es decir, una persona o grupo de personas que desean encontrar una solución.
b) La no existencia de una solución inmediata, es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de un algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico, etc) aquí también se considera que el problema pueda tener más de una solución. (Santos, 1997, p. 30)

Santos (2002) justifica la resolución de problemas con los siguientes argumentos:

a) El estudiante debe tener la oportunidad de problematizar el aprendizaje de una disciplina.
b) Los métodos de enseñanza aparte de ser instrumentos para adquirir información, también deben estimular la participación de los aprendices.

c) En esta estrategia se diseñan tareas con las que, al realizarlas, el conocimiento puede ser desarrollado.
d) El profesor puede delimitar y/o reducir el tiempo destinado al estudio de un tema al formular tareas para los aprendices, pero se requiere que los estudiantes tomen un papel activo en la realización de las mismas, cuestionando las tareas, buscando formas de solución y planteando otras. (Santos, 2002, p. 155)

2.4.3.1 El papel del estudiante y el maestro en la resolución de problemas

De lo anterior se deriva que la enseñanza debe considerar un papel activo del estudiante, en un ambiente en el que pueda desarrollar ideas y propuestas al analizar situaciones, en el que pueda discutir sus aproximaciones con sus compañeros y pueda desarrollar criterios que le permitan evaluar sus aproximaciones y resultados y la de sus compañeros. Un ambiente en el que el profesor no exponga ideas y procesos, sino que ayude a los estudiantes a enfocar sus análisis en los procesos y conceptos que subyacen en las actividades. Un ambiente en el que los estudiantes puedan desarrollar conceptos y procedimientos que puedan utilizar en situaciones semejantes, esto es, que puedan transferir lo aprendido a nuevas situaciones.

2.5 EL USO DE REPRESENTACIONES

El uso de diferentes sistemas de representación (Duval, 2006a) en el proceso de aprendizaje permitirá a los estudiantes ver la situación desde otras perspectivas, resaltando y precisando aspectos que no pueden ser enfatizados utilizando un solo tipo de representaciones. También elaborar informes escritos para comunicarse con sus compañeros y con el profesor, propiciará que el estudiante utilice sistemas de representación para comunicar sus concepciones sobre la situación y la reflexión sobre ellas. Estas representaciones al ser utilizadas en las comunicaciones escritas son una fuente de información valiosa sobre el desarrollo del conocimiento del estudiante. La interacción del estudiante con múltiples sistemas de representación se dan en una variedad de escenarios: cuando confronta su perspectiva con las de otros compañeros, cuando utiliza diferentes instrumentos (tecnológicos, conceptuales) para abordar aspectos de la situación.

2.6 LA EVALUACIÓN

La evaluación del aprendizaje en esta perspectiva, se deriva de la concepción del aprendizaje como un proceso continuo de desarrollo de sistemas conceptuales en diferentes dimensiones. Y de concebir la evaluación, como un proceso que implica adquirir información sobre metas de conocimiento claramente establecidas, inspeccionando de cerca, generando descripciones fieles, que proporcionen evidencia confiable para la toma de decisiones. La actividad de evaluación del aprendizaje debe basarse en una amplia variedad de elementos, que sustenten las diferentes perspectivas en las que se efectúa el desarrollo conceptual de los individuos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA

El diseño de la secuencia didáctica se basó en el análisis de los siguientes aspectos:

1. Los objetivos educativos del tema.
2. Conocimiento previo de los estudiantes.
3. El conocimiento matemático involucrado en estos objetivos.
4. El tipo de conocimientos y habilidades que deben desarrollar los estudiantes.
5. Herramientas que apoyan el desarrollo y comprensión de estos conocimientos.

A partir de ellos se obtuvieron criterios que guiaron el diseño y elaboración de la secuencia de actividades, la forma de trabajo de los estudiantes, la dinámica de trabajo en el aula, y la participación del profesor.

Los criterios anteriores se utilizaron para seleccionar y/o diseñar las actividades de trabajo que se utilizarían en el aula, así como para determinar el orden en que se abordarían. También sirvieron para establecer el ambiente de trabajo en el aula, esto es para identificar la forma en que los estudiantes abordarían las actividades y la forma en que el profesor debía participar en todo el proceso.

La elaboración de la secuencia de actividades siguió un proceso continuo de diseño y experimentación que involucró la implementación, en por lo menos dos ocasiones, de algunas de las actividades seleccionadas. Estas implementaciones sirvieron para refinar la forma de presentar los enunciados, determinar si las actividades planteadas eran suficientes para lograr los objetivos planteados, identificar si era necesario hacer modificaciones en las actividades. La implementación final se realizó, con estudiantes de los primeros semestres y de semestres avanzados de las carreras que se ofrecen en la División de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Quintana Roo en el año 2015.

Para evaluar la efectividad de la propuesta, esto es para ver si se lograron los objetivos planteados, se consideró las respuestas de los estudiantes y del grupo de estudiantes a todas y cada una de las actividades. En particular las que proporcionaron para un grupo de actividades finales que involucraban los conceptos y habilidades considerados en los objetivos.

A continuación se describe en qué consiste cada uno de los análisis señalados al inicio de este capítulo:

3.1.1 Objetivos educativos del tema

El objetivo asociado al aprendizaje de la integral definida en los programas de estudios no difiere en mucho al siguiente:

> Que los estudiantes del curso desarrollen conocimiento y comprensión del concepto "integral definida" de forma tal que sean capaces de determinar o aproximar el área de una región del plano limitada por curvas, de las cuales conoce su representación algebraica (Universidad de Quintana Roo, 2001).

El análisis de este objetivo se realizó considerando responder las siguientes preguntas: ¿cuál es el tipo de problemas que deben poder resolver los estudiantes que tienen los conocimientos y habilidades señalados en el objetivo? ¿Cuáles son los conocimientos y habilidades que deben tener esos estudiantes para poder resolver este tipo de problemas?

3.1.2 Conocimientos previos

Tener conciencia de los conocimientos y habilidades que poseen los estudiantes al abordar un tema es importante porque se puede partir de estos conocimientos y habilidades para desarrollar en ellos el nuevo conocimiento. Para identificar los conocimientos previos que deben tener los estudiantes es necesario revisar la currícula de matemáticas previa al curso de integral definida. Para precisar que los estudiantes poseen esos conocimientos previos se pueden aplicar algunas actividades que los demanden. Las primeras actividades de la secuencia pueden servir para este propósito.

3.1.3 El conocimiento matemático involucrado en estos objetivos

Este análisis permite organizar las conclusiones derivadas del análisis de los objetivos señalado en 3.1.1 y complementarlas con otros conceptos y habilidades matemáticas que son útiles para desarrollar los primeros. La base de este análisis está en observar la génesis de los conceptos y habilidades matemáticas conforme van evolucionando, con el tiempo los problemas, conceptos y los métodos para resolverlos. Como resultado se tiene un mapa conceptual (Figura 10) que muestra las relaciones entre los diferentes conceptos y métodos. El mapa conceptual será utilizado para señalar el camino a seguir en el desarrollo de los conceptos y habilidades.

3.1.4 El tipo de conocimientos y habilidades que deben desarrollar los estudiantes

La función de este análisis es determinar el nivel de profundidad que se debe alcanzar en la comprensión de los conceptos y el desarrollo de las habilidades asociadas con el objetivo. Implica considerar el grado de dificultad en el tipo de problemas que deben poder resolver y el tipo de situaciones que el estudiante debe poder analizar al final del tema. El resultado de este análisis es importante para decidir la forma de trabajo en el aula, predecir dificultades y la forma de actuar del profesor.

3.1.5 Herramientas que apoyan el desarrollo y comprensión de estos conocimientos

Con este análisis se determinará cuáles son los recursos tecnológicos que los estudiantes pueden emplear para el desarrollo de conocimiento y comprensión de los conceptos matemáticos que se abordarán en las actividades. Para ello se considerará el conocimiento matemático involucrado en el diseño de las actividades así como, el tipo de conocimiento y habilidades que deben desarrollar los estudiantes.

3.1.6 Selección de actividades

Para la selección de actividades se eligió un camino, incluyendo el conocimiento matemático involucrado y partiendo del conocimiento previo de los estudiantes, que guíe esta selección y que permita a los estudiantes experimentar los procesos y experiencias que vivieron los matemáticos que desarrollaron el concepto de integral definida. Además, de que vieran que el conocimiento previo no es un conocimiento aislado sino que es como los ladrillos que se van conectando en una estructura hasta lograr el desarrollo del concepto.

3.2 Base para determinar el orden en que se realizaran las actividades

Para determinar el orden en que los estudiantes realizarían las actividades se consideró el contexto en que se diseñaron las actividades, el conocimiento previo de los alumnos, las actividades seleccionadas y la forma en que se relacionan los conocimientos matemáticos involucrados para generar el nuevo conocimiento. Esto es, se buscó que el orden en que se realizarían las actividades fuera un orden creciente de conocimiento, que partiera de los conocimientos previos del estudiante y le permitiera ver cómo la relación entre dos o más conceptos es la base de nuevos conceptos y a medida que se avanza se requiere desarrollar el conocimiento y habilidades asociados a ellos.

3.3 ¿Cuánto tiempo requieren para realizar las actividades?

Se plantea considerar un grupo de actividades distribuidas en sesiones siguiendo el orden que establezcamos para realizarlas. Se plantea también que cada sesión debe durar como máximo 2 horas, tiempo destinado a una sesión regular de clases en la mayoría de las escuelas. Así, el número de sesiones dependerá del tiempo que se requiere para la resolución de las actividades seleccionadas.

3.4 Condiciones y Escenario de implementación de la secuencia

Previo a la implementación, se invitó a un grupo de estudiantes a participar en el proceso de documentación de sus formas de pensar y de responder a las cuestiones planteadas en las actividades. Los aprendices pertenecen a una de las carreras: Ingeniería en Redes, Ingeniería Ambiental o Ingeniería en Sistema de Energías de la Universidad de Quintana Roo. Ellos cursaban (Al menos tenían nociones de cálculo diferencial del nivel medio superior) o habían cursado la materia de matemáticas III (Cálculo Diferencial e Integral), incluida en el plan de estudio para las carreras de

Ciencias e Ingeniería de dicha universidad. Sus edades oscilaban entre los 18 y 22 años. Los estudiantes fueron informados verbalmente sobre el tema de estudio que se abordaría en las actividades, el propósito que se perseguía con la realización de las actividades, la forma en que debían responderlas, la confidencialidad de las respuestas y, sobre todo, se hizo énfasis en que lo más importante era argumentar sus respuestas, así como su forma de pensar y compromiso para leer detenidamente y comprender las tareas.

3.5 Recopilación de información del proceso (Datos)

Para llevar a cabo la documentación de todo el proceso de implementación, así como de la funcionalidad de la secuencia de actividades, fue necesario, en cada sesión, llevar a cabo una recogida de información que permitiera valorar todos los aspectos de la implementación de la propuesta didáctica en todos los momentos del proceso. La recopilación de información fue un proceso continuo (NCTM, 2000), que permitió no solo obtener información del aprendizaje de los alumnos, sino de todo el proceso de enseñanza, incluyendo la práctica docente del profesor, así como el planteamiento y desarrollo de las actividades. La información recopilada sirvió como base para sustentar la viabilidad de que los estudiantes desarrollaran los conocimientos, habilidades y una mejor comprensión sobre el concepto de integral definida (en el tiempo destinado para lograrlo), así como utilizar los conocimientos para analizar situaciones y resolver problemas, tanto en el contexto matemático como en otros contextos. Esto es, debía permitir dar respuesta a la pregunta: ¿qué tan viable es que se cumpla con el objetivo que se persigue con la implementación de la secuencia?

3.6 Información relevante

La información que puede arrojar información sobre el proceso de implementación de la secuencia de actividades y que será relevante para la documentación se relaciona con el aprendizaje de los alumnos, el planteamiento y desarrollo de cada sesión, la forma de trabajar en el aula, así como la actuación del profesor y los estudiantes. Por otro lado, las dificultades detectadas así como los logros alcanzados por los estudiantes en cada una de las actividades es información que permitirá valorar la secuencia de actividades.

A continuación se presenta una propuesta, basada en el trabajo de Eliécer Aldana Bermúdez (2011), que describe los principales elementos que conforman el concepto de integral definida (que sirvió como instrumento para valorar los logros alcanzados por los estudiantes), y sus relaciones, tanto a nivel gráfico como analítico:

	Área de polígonos regulares
Conocimiento previo	El alumno debe mostrar conocimientos del concepto de "polígono regular", al identificar los polígonos de los cuáles obtendrá el área.
Acciones que debe realizar	1. El alumno debe identificar el polígono regular que se le presenta y realizar, gráficamente, la acción de dividirlo en triángulos, al unir sus vértices con el centro. 2. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de determinar el área de uno de los triángulos en que quedó dividido el polígono regular y con esto el área del mismo. 3. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de determinar la forma general de calcular el área de un polígono regular dependiendo del número.
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar, gráficamente, el tipo de triángulo en que quedan divididos los polígonos regulares, así como el proceso, analítico, que debe emplear para calcular el área de dichos triángulo: teorema de Pitágoras o trigonometría.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1 y 2 al realizar un proceso que implica subdividir gráficamente un polígono regular en triángulos y calcular analíticamente su área.
	Aproximación del área para regiones limitadas por curvas
Conocimiento	El alumno debe mostrar conocimientos de estrategias (Como dividir un todo en partes), para aproximar el área de una región plana limitada por

previo	curva.
Acciones que debe realizar	1. El alumno debe realizar, gráficamente, la acción de dividir una región plana, limitada por curva, en otras regiones cuyas áreas sabe calcular. 2. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de determinar un valor (o valores), que represente (n) la aproximación al área de la región.
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar gráficamente el tipo de figura (cuadrado, rectángulo, círculo, etc.), en que debe dividir la región plana dada de modo que pueda calcular la aproximación.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1 y 2 al realizar un proceso que implica subdividir, gráficamente, una región plana en una serie de sub-regiones y obtener analíticamente el área aproximada de la región total.
	Partición de un intervalo $[a,\ b]$
Conocimiento previo	El alumno debe mostrar conocimientos del concepto "intervalo en la recta real", al identificar el intervalo $[a,\ b]$ sobre el que se realizará la partición.
Acciones que debe realizar	1. El alumno debe realizar, gráficamente, la acción de dividir un segmento en varias partes. 2. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de determinar y mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo elemento inicial es "a" y final "b".
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar las dos diferentes formas de representar la idea de partición de un intervalo cualquiera: analítica y gráficamente.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1 y 2 al realizar un proceso que implica subdividir, gráfica o analíticamente, un intervalo en una serie de sub-intervalos.
	Sumas de Riemann para una función continua, $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$ y con una partición.

Conocimiento previo	El alumno debe mostrar conocimientos de los conceptos: • Área de una superficie • Función real de variable real • Partición de un intervalo de números reales
Acciones que debe realizar	1. El alumno debe realizar, gráficamente, la acción de construir rectángulos que se aproximen al área buscada siguiendo los siguientes criterios: a) Dividir el intervalo en sub-intervalos según la partición dada. b) Seleccionar para cada sub-intervalo un punto y representar su imagen según un criterio (El punto donde alcanza su máximo, o donde alcanza su mínimo o uno de los extremos del mismo por ejemplo). c) Dibujar los rectángulos con base en los sub-intervalos y tomando como alturas las imágenes seleccionadas en (b). 2. Analíticamente la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar las dos diferentes formas de representar la suma de las áreas de los rectángulos para un intervalo y una partición cualquiera del mismo: analítica y gráficamente.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1 y 2 al realizar un proceso que implica subdividir, gráficamente, una superficie por medio de rectángulos y la obtención de una cantidad, analíticamente, que represente la suma de áreas de esos rectángulos.

	Sucesión, Sumatorias y Ley de los grandes números
Conocimiento previo	El alumno debe mostrar conocimientos de los conceptos: • Sucesión de números reales • Sumatoria de una sucesión de números reales • Ley de los grandes números
Acciones que	1. El alumno debe realizar, gráficamente, la acción obtener la suma de

debe realizar	la sucesión de los primeros "n" números naturales. 2. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de obtener una expresión reducida para la suma de la sucesión de una potencia de los números naturales. 3. El alumno debe realizar, analíticamente, la acción de obtener una expresión más simple (bajo la ley de los grandes números), que sea equivalente a las sumatorias obtenidas.
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar dos diferentes formas de obtener una expresión para la suma de la sucesión de los primeros "n" números naturales: gráfica y analíticamente. Debe observar también que la segunda forma (analítica) la puede generalizar para obtener una expresión que represente la suma de la sucesión de una potencia de los números naturales. Además observará que las expresiones escritas en factores adecuados pueden ser equivalentes a expresiones más simples siempre que involucremos la ley de los grandes números.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1, 2 y 3 al obtener: • Partiendo de un gráfico dado, la expresión para la suma de los primeros números naturales. • Partiendo de un proceso algebraico dado, la suma de la sucesión de una potencia de los primeros "n" números naturales. • Expresiones más simples que son equivalentes a las sumatorias bajo la ley de los grandes números.
	La integral definida como el límite a una sucesión de Sumas
Conocimiento previo	El alumno debe mostrar conocimientos de los conceptos: • Sucesión de números reales. • Límite de una sucesión de números reales. • Sumas de Riemann.

Acciones que debe realizar	El alumno debe realizar, gráficamente o analíticamente, la acción de obtener una sucesión de áreas de rectángulos y formar la suma de términos de esa sucesión de áreas (Suma de Riemann) y obtener el límite de la suma (integral definida).
Relaciones que debe identificar	El alumno debe identificar las dos diferentes formas de representar el área bajo la curva de una función continua f(x) sobre un intervalo de números reales $[a, b]$: gráficamente como el área sombreada bajo la curva y analíticamente como el límite de la sucesión de sumas de Riemann. Además, debe relacionar, por medio de la derivada, la función inicial con el resultado obtenido.
Evidencias de comprensión	Interiorización de las acciones 1 y 2 al realizar un proceso que implica, gráficamente, dibujar el área que desea determinarse y analíticamente obtener el límite de la sucesión de sumas de Riemann que representa la medición de dicha área.

3.7 Evaluación del proceso

Después de recopilada la información, se llevó a cabo un proceso de evaluación mediante el análisis y valoración de la información obtenida a fin de verificar si la metodología fue adecuada y cuáles fueron los puntos fuertes, débiles y puntos a mejorar de esta forma de trabajar, así como comparar las conclusiones de este análisis con el objetivo que se pretendía al implementar la secuencia y calificar el grado de consecución de esa meta. A partir de este proceso nos daremos cuenta, como profesores, cómo ha sido de efectivo presentar el tema mediante esta metodología y qué se puede mejorar y cambiar.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se describen los resultados del diseño e implementación de la secuencia didáctica.

4.1 CRITERIOS DEL DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Como producto del análisis realizado y mencionado en el Capítulo 3 se determinó que la secuencia de actividades debe tener las siguientes características:

1. Para poder alcanzar el objetivo planteado, las actividades deben propiciar que los estudiantes se aproximaran en forma inductiva al conocimiento. En este sentido las actividades iniciales deben abordar casos sencillos y avanzar hacia situaciones más complejas.

   Al final del tema los estudiantes deben poder calcular y estimar el área de una región plana limitada por curvas. Esto es, deben poder realizar lo siguiente:

a) Establecer un límite inferior y uno superior, entre los cuales se encuentra el área de una región plana acotada, al inscribir y/o circunscribir en ella figuras planas (triángulo, Cuadrado, Rectángulo, Círculo, etc.), cuyas áreas saben cómo calcularlas.

b) Generar configuraciones geométricas (Dividir en triángulos, cuadrados, Rectángulos, Círculos, etc.), que les permitan acercarse más al valor real del área, identificando las cotas inferior y superior entre las que se encuentra el área de la región plana.

c) Identificar la configuración geométrica adecuada (Cuadrados o rectángulos), que por su forma y simplicidad permite calcular y/o mejorar la aproximación por acotamiento de forma sistemática y eficiente. Puede ser el patrón a seguir para calcular o aproximar el área de cualquier región.

d) La secuencia debe propiciar que los estudiantes reconozcan la relación y la importancia de conceptos tales como plano coordenado, sucesiones, sumas y límites al calcular el área de regiones planas y acotadas.

e) La secuencia debe llevar a que el estudiante desarrolle una interpretación de la integral $\int_a^b f(x)dx$ como una representación del límite de una suma de áreas de rectángulos con bases muy pequeñas, y esta suma como el área de una región plana dada.

f) Plantear la integral o integrales definidas que le permiten obtener el valor del área de la región dada.

Lo anterior se resume en que al final de la secuencia de actividades el estudiante debe ser capaz de resolver problemas como los siguientes:

- Determinar el área de la región en el primer cuadrante del plano coordenado, limitada por la curva $y = x^2$ y el eje de las X, desde $x = 0$ hasta $x = a$.
- Determinar el área de la región en el primer cuadrante del plano coordenado, limitada por la curva $y = -x^2$ y el eje de las X, desde $x = 0$ hasta $x = a$.
- Determinar el área de la región en el primer cuadrante del plano coordenado, limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y el eje de las X, desde $x = 0$ hasta $x = a$.
- Determinar el área de la región en el primer cuadrante del plano coordenado, limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y el eje de las X, desde $x = a$ hasta $x = b$.
- Determinar el área de la región en el primer cuadrante del plano coordenado, limitada por la curva $y = (x + 1)^2 + 1$ y el eje de las X, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
- Determinar el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \frac{1}{1+x^2}$ e $y = \frac{x^2}{2}$

2. Se asume que los estudiantes tienen conocimientos sobre tópicos que tienen relación con el concepto en estudio, tales como el cálculo de área de regiones planas, el acotamiento, la estimación, la precisión, el plano coordenado, funciones, el planteamiento de ecuaciones para determinar los puntos de intersección de las gráficas de funciones, el concepto de sucesión, situaciones en las que puede encontrarlas y como determinar el valor límite de una sucesión, las sumatorias,

acumulación, situaciones en las que puede encontrarlas y procesos para calcularlas, el concepto de derivada, razón de cambio, variación, situaciones en que se encuentran estos conceptos y procesos para calcularlos.

Este es uno de los criterios básicos del diseño de las actividades, se toma como base su conocimiento de los conceptos y procesos asociados a: el área de figuras planas diversas y las estrategias para medirlas, el concepto de función, sucesión, serie, límite, derivada.

3. Dinámica de trabajo en el aula

Para favorecer que los estudiantes refinen y desarrollen conocimientos y habilidades matemáticas que les permitan resolver problemas del tipo señalado en los objetivos de la secuencia didáctica, el trabajo de los estudiantes en el aula incluyó actividades de trabajo individual (para que el estudiante reflexione y desarrolle sus propias ideas), trabajo en equipos y presentación al grupo completo (para que los estudiantes comuniquen sus ideas, evalúen las ideas de sus compañeros, las refinen y elaboren propuestas conjuntas) (Schoenfeld, 1998; Lesh et al. 2000).

Para que este ambiente de trabajo sea posible el estudiante debe desarrollar ciertas actitudes que le facilitaran el aprendizaje, tales como la disposición de relaciones sociales con los miembros de su grupo de trabajo, voluntad para escuchar y considerar la opinión de los demás, y sobre todo, al generar la discusión deben estar de acuerdo en llevar el debate a un punto de vista racional, sin considerarlo de manera personal. Se debe también acordar llegar a una finalidad común: el aprendizaje.

Por su parte el profesor debe promover un desarrollo de sesión de aprendizaje en el que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje, interactúen, escuchen, respondan y pregunten sin temor o prejuicio alguno al docente u otros estudiantes, un desarrollo en el que el estudiante no sea solo un receptor del conocimiento.

4.2 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades deben permitir al estudiante utilizar una gran variedad de conceptos y procesos, explorar ejemplos y contraejemplos para razonar, hacer conjeturas, establecer relaciones, resolver problemas y comunicar resultados, Apoyarse en argumentos y pruebas matemáticas para determinar la validez de sus resultados. Convencerse a sí mismos y a los demás de esta validez.

La secuencia de actividades en esta propuesta didáctica fue diseñada con el propósito de que los estudiantes recordaran y utilizaran conceptos como el de medición, acotamiento, estimación, plano coordenado, función, gráfica de función, transformaciones en la gráfica de una función, simetría, sucesiones, límites, series. Recordaran procesos como los utilizados para calcular área de polígonos regulares e irregulares, calcular el límite de una sucesión, calcular el límite de una sumatoria. Recordaran estrategias como la de dividir un polígono irregular en triángulos, inscribir polígonos regulares en un círculo, acotar una región plana general por un rectángulo subdividido en cuadrados, y para que recordaran todo conocimiento relacionado con la medición o cálculo del área de regiones planas, ya sea de regiones planas limitadas por líneas rectas como triángulos, cuadrados, rectángulos, polígonos regulares, polígonos irregulares o de regiones planas limitadas por curvas como circunferencia, elipse, u otras más generales y utilizaran estos conocimientos para dar solución a un conjunto de actividades (anexo), que les permitirían desarrollar y/o lograr una mejor comprensión del concepto de integral definida.

Las actividades se organizaron en sesiones de dos horas. La secuencia se diseñó para desarrollarse en cinco sesiones de dos horas cada una. El número de actividades integradas en cada sesión es variable y depende del tiempo estimado por el profesor para que los estudiantes las realicen.

A continuación se proporciona una breve descripción del grupo de actividades propuestas en cada sesión y el propósito que se persigue con su realización:

4.2.1 Sesión 1

En la primera sesión se incluyen cuatro actividades en las que los estudiantes debían calcular el área de regiones planas limitadas por líneas rectas, tales como los polígonos regulares. Este grupo de actividades tiene la función de hacer que los estudiantes recuerden y utilicen conceptos y habilidades relacionados con el cálculo del área de regiones planas, en particular: fórmulas para el cálculo del área de figuras planas limitadas por líneas rectas ya sean regulares o irregulares y métodos para calcular el área de regiones acotadas por curvas. Estrategias para abordar problemas (como: "Un problema difícil o complejo transformarlo en uno o más problemas simples que se conoce como resolverlos"). Conceptos como el de convergencia de secuencias y series cuando se realizan procesos infinitos.

En este sentido se pide calcular el área del hexágono regular, el octágono regular, se pide generalizar el proceso para un polígono regular con un número "n" de lados y esta generalización sirve de base para determinar el área de una de las regiones planas limitada por curva conocida por los estudiantes: el círculo.

En los polígonos regulares los estudiantes deben emplear la relación que existe entre el área, perímetro y apotema o en su defecto la estrategia de dividir el polígono regular en triángulos para calcular el área y deducir la relación mencionada. Aprovecharán la simetría que tienen los polígonos regulares para garantizar que todos los triángulos, en que quedan divididos, son congruentes, así como la clasificación de triángulos y la relación entre sus ángulos interiores para reconocer el tipo de triángulos en que quedan divididos los polígonos regulares, el teorema de Pitágoras o razones trigonométricas para determinar las dimensiones de uno de los triángulos y con ello su área. Señalaran el proceso a seguir para lograr la generalización del área para un polígono regular de "n" lados. Reflexionaran sobre la secuencia de números que resulta de la generalización al considerar valores crecientes del número de lados en el polígono regular, y el comportamiento de esta secuencia de números para determinar si es convergente. Utilizarán la imaginación para pensar en la transformación que va ocurriendo en la sucesión de polígonos regulares al aumentar el número de lados, deben reflexionar que el aumentar la cantidad de lados de los polígonos regulares, la longitud de los mismos va disminuyendo hasta confundirse con puntos que toman la forma de curva cerrada. Los estudiantes deberán describir el tipo de curva que se obtiene en el límite y como se calcula el área de dicha curva.

Esto es, los estudiantes deben desarrollar o perfeccionar el conocimiento en torno al cálculo del área de regiones planas, limitadas por rectas o por curvas, aprendiendo que en ocasiones podrán dividir la región en otras figuras simples como triángulos, cuadrados o rectángulos y en ocasiones puede inscribir o cubrir la región ya sea con polígonos regulares o polígonos irregulares para obtener una secuencia de estimaciones del área.

4.2.2 Sesión 2

En la segunda sesión se incluyen cuatro actividades con el objetivo de que los estudiantes recuerden y utilicen conceptos como el de medición, acotamiento, estimación, y la transferencia de estrategias para medir y/o calcular el área de una región plana limitada por curvas.

Los estudiantes deben observar que el acotamiento y la estrategia de dividir un todo en partes juegan un papel importante en el proceso de medir y/o calcular el área de una región plana limitada por curvas. Este concepto y estrategia combinados se sintetizan en el concepto de plano coordenado que, aplicado al problema de medir y/o calcular el área, permiten involucrar conceptos como el de función y la gráfica de funciones para acotar el problema a determinar el área de regiones planas limitadas por curvas que están descritas por la gráfica de una función. También deben aprender reconocer patrones, en la configuración geométrica de las regiones, mismos que pueden servir para introducir otras herramientas que faciliten la estimación o cálculo del área. Finalmente deben aprender reconocer los primeros procesos involucrados en el concepto de integral definida.

Con estas actividades los estudiantes también deben desarrollar o refinar el conocimiento de la forma sistemática en que se van combinando conceptos, procesos y estrategias para obtener una forma general de calcular el área de una región. Para lograrlo se proponen regiones en las que los estudiantes deben transferir los conocimientos desarrollados en las sesiones anteriores y utilizar la estrategia de dividir un todo en partes para generar estimaciones del área de dichas regiones. Observarán que dependiendo de los datos disponibles, referente a las regiones, podrán obtener solo estimaciones o ir más allá hasta obtener secuencias de aproximaciones y sumatorias de áreas con las que podrán calcular el área exacta.

4.2.3 Sesión 3

En la tercera sesión se incluyen cuatro actividades con el objetivo de que los estudiantes profundicen en el conocimiento del concepto de integral definida, para ello deben poder escribir la generalización de una de las actividades (Actividad 2.4) presentada en la sesión 2, en la que aprenderán los cambios que sufren las estrategias empleadas en las sesiones anteriores y la forma en que se emplean para lograr dicha generalización. Este aprendizaje los conducirá necesariamente a requerir de otras herramientas que permitan la simplificación de procesos y análisis de resultados. Para ello se proponen actividades en la que los estudiantes deben utilizar conceptos muy particulares involucrados en la integral definida.

4.2.4 Sesión 4

En la cuarta sesión se incluyen cuatro actividades, diseñadas con el propósito de que los estudiantes desarrollen y/o refinen sus conocimientos y las habilidades relacionados con el uso de conceptos, procesos y estrategias para calcular el área de regiones planas limitadas por la gráfica de una función. Analicen el cambio que puede representar para el cálculo del área, el uso de las transformaciones: reflexión respecto al eje de las abscisas, traslación vertical en una unidad, y traslación vertical y horizontal en una unidad aplicado a la gráfica de funciones. Identifiquen como el mismo objeto, el concepto de integral definida, la representación geométrica del área de una región en el plano coordenado, limitada por la gráfica de una función, y la notación convencional para dicho concepto. Estas actividades determinan si los estudiantes comprenden el concepto de integral definida dado que en ellas se incluyen todos los procesos propios del concepto. Para ello se propone una situación involucrando la función potencia $y= t^2$ en la que los estudiantes deben realizar procesos similares a los realizados en sesiones anteriores para calcular el área de la región limitada por su grafica en un intervalo dado y posteriormente aplicar las transformaciones a la gráfica de la misma, para describir el cambio que sufre la región plana considerada y como afecta este cambio al área para finalmente determinar su valor.

4.2.5 Sesión 5

En esta sesión se incluyen cuatro actividades, diseñadas con el objetivo de que los estudiantes generalicen, a cualquier función potencia, los resultados obtenidos del área para los casos particulares abordados en las sesiones anteriores y los relacionen con el concepto de derivada para deducir la relación que existe entre ambos. También para que apliquen los procesos desarrollados a una combinación lineal de funciones y deduzcan la relación (propiedad de la suma para integrales), que existe entre la cuadratura de la combinación lineal de funciones y la suma de las cuadraturas de cada una de las funciones involucradas en dicha combinación, además de utilizar la notación convencional para representar sus observaciones. Finalmente, los estudiantes deben evaluar por sí mismos si han comprendido los conceptos y procesos realizados en las actividades anteriores al aplicarlos a una integral definida expresada en la notación convencional, y para evaluarla, deben interpretarla como el área de una región plana limitada por una curva descrita por la gráfica de una función en el plano coordenado.

Para esto se proponen situaciones todas relacionadas con la función potencias en las que los estudiantes deben generalizar la cuadratura de la región que limita la gráfica de estas funciones en un intervalo [0, x], posteriormente derivar estas cuadraturas y comparar los resultados con las funciones potencias correspondientes para deducir la relación. También, deben aplicar los procesos de integral definida a una combinación lineal de dos de estas funciones potencias para obtener la cuadratura de la región que su gráfica limita en el intervalo [0, x] y comparar el resultado con la suma de la cuadratura de cada una de las funciones utilizada para deducir la propiedad de la suma. Finalmente con esta propiedad deben observar que no necesitan realizar todos los procesos para evaluar la integral definida propuesta dado pueden separarla como una suma, reconociendo cada sumando al compararlos con las actividades anteriores.

4.3 Análisis y Descripción de Resultados de implementación de la Secuencia didáctica

La secuencia didáctica final que presentamos en este documento (Anexo A) fue rediseñada a partir de las observaciones derivadas del estudio piloto y se implementó con un grupo de 10 estudiantes. Para realizar las actividades los estudiantes formaron parejas. Y se les pidió escribir con detalle todos los cálculos y explicaciones que realizaran. El análisis de la experiencia se realizó a partir de la información contenida en los documentos entregados por los estudiantes después de cada actividad, y de las notas del profesor registradas por él en su bitácora de trabajo.

4.3.1. Análisis de actividades de la sesión 1

Se compartió con los estudiantes la importancia de realizar las actividades para la medición del área en esta secuencia. Se evocaron algunas figuras especiales (triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo) y fórmulas que permiten calcular sus áreas. Se habló sobre las figuras planas limitadas por curvas y procesos que recordaban para llevar a cabo la medición del área. Sobre cómo el entendimiento de casos particulares puede proporcionarnos ideas para obtener un método general de hacer las cosas.

Por su parte los estudiantes respondieron que en el caso del triángulo recordaban que hay una fórmula en la que se multiplica base por altura del triángulo y el resultado se divide entre dos. En el caso del cuadrado indicaron que solo necesitan saber cuánto mide uno de sus lados porque el área es lado al cuadrado. Para el rectángulo mencionaron que se necesita la base y la altura porque el área es el producto de estas dos. En el caso del círculo dijeron que necesitan el radio del círculo para poder aplicar la fórmula de pi por radio al cuadrado. Cuando se les cuestionó sobre si recordaban otra figura plana limitada por curva y una fórmula que permitiera calcular su área, algunos de ellos mencionaron la elipse pero dijeron no recordar cual es la fórmula para el área.

Después de entregar la lista de actividades, se explicó a los alumnos el contenido de las mismas así como el objetivo que se perseguía con su realización y también se les pidió revisar los declaraciones (texto que acompaña la actividad) hechas en las mismas a fin de detectar posibles dudas o impedimentos para su realización.

Posterior a la revisión los alumnos iniciaron con el análisis de las actividades para determinar la forma en que debían realizarlas.

Actividad 1.1 (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes reconocieran el tipo de polígono regular que se les presentó e identificaran el tipo de figura y su clasificación (triángulo equilátero), de las regiones que se forman al unir el centro del polígono con cada uno de sus vértices. También se pretendía que los estudiantes obtuvieran el área del polígono utilizando alguna fórmula conocida o la estrategia de verla como la suma de áreas de triángulos. Durante el desarrollo de solución de esta situación algunos conceptos y conocimientos, que les serían de utilidad, debían ser recordados tales como clasificación de triángulos, simetría, Teorema de Pitágoras, ángulos en el triángulo y propiedades, ángulo central, apotema, perímetro, área de polígonos regulares, área de triángulos, etc.

Todas las parejas pudieron identificar el tipo de figura geométrica (hexágono) presentada (inciso a, actividad 1.1, sesión 1), así como el tipo de figura geométrica (triángulo) en que queda dividido el polígono regular al unir los vértices del mismo con el centro C (inciso b, actividad 1.1, sesión 1), pero en este último caso no aportaron más elementos que indicaran la clasificación a la que pertenece dicho triángulo (equilátero o al menos isósceles).

Al analizar los triángulos que se forman en el interior del polígono, las parejas lograron determinar los ángulos interiores solicitados, reconociendo los 360° de giro alrededor del punto central C del polígono (Figura 11), y dividiéndolos entre el número de triángulos que se forman en su interior (inciso c, Actividad 1.1, sesión 1). Fue hasta este momento que identificaron la clasificación, a la cual pertenecen los triángulos. También lograron, con esta identificación, determinar las longitudes solicitadas de los lados del triángulo (inciso d, Actividad 1.1, sesión 1).

Figura 10 Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de energía, para la Actividad 1.1 de la Sesión 1.

En esta actividad todas las parejas establecieron la configuración de triángulo rectángulo, necesaria para aplicar el teorema de Pitágoras (Figura 12). Dividieron gráficamente uno de los triángulos equiláteros con la línea que representa su altura. Identificaron los elementos disponibles del triángulo rectángulo con los que finalmente lograron determinar la altura (inciso e Actividad 1.1, sesión 1).

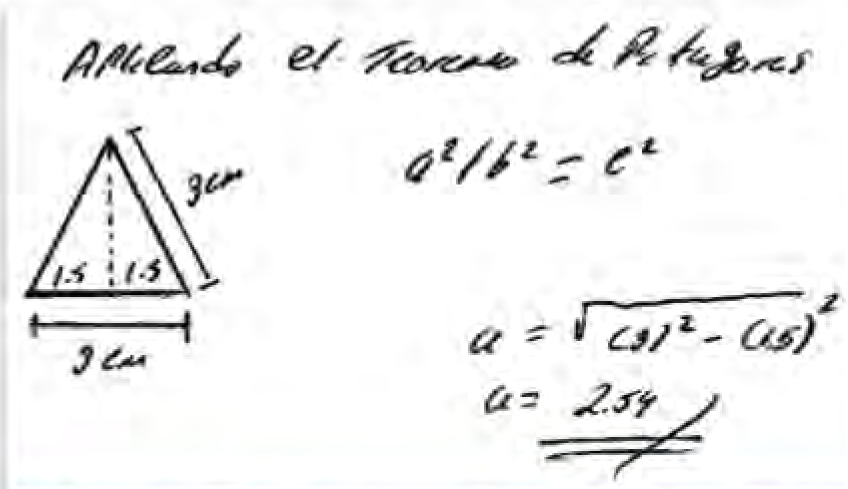


Figura 11. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de energía, para la Actividad 1.1 de la Sesión 1.

En la Figura 13, representativa de los procesos que hicieron todas las parejas, se puede observar que el alumno 1 (pareja 1) logró integrar lo realizado para determinar el área del triángulo equilátero, al emplear la conocida formula: base por altura entre dos (Inciso f, actividad 1.1, sesión 1), y, con ello lograron también determinar el área del hexágono al multiplicar por 6 (número de triángulos que se forman en el hexágono), el área de un triángulo equilátero (Inciso g, Actividad 1.1, sesión 1).

Algo que podemos observar en este proceso de solución es que no se utilizó o hizo mención del concepto de apotema con el que se identifica la altura del triángulo construido en el polígono regular y por consiguiente tampoco se logró recordar la fórmula que involucra al perímetro y apotema para calcular el área de polígonos regulares.

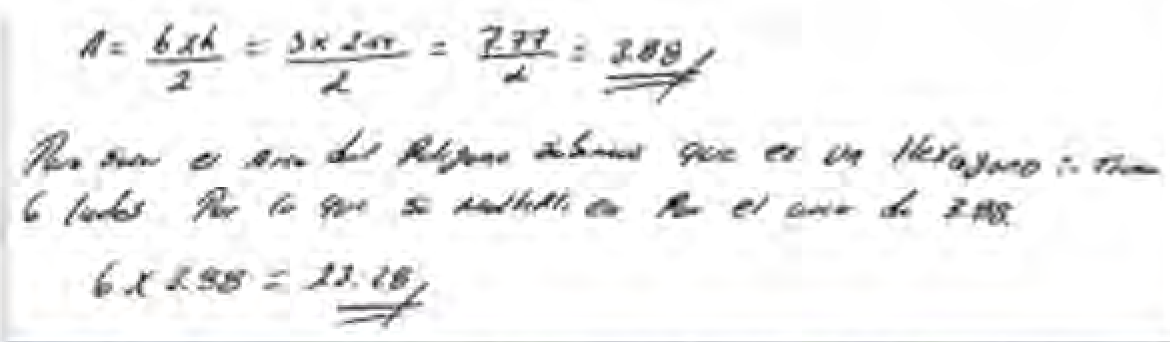


Figura 12. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de energía, para la Actividad 1.1 de la Sesión 1.

Actividad 1. 2 (anexo A), Para esta actividad los estudiantes debían trabajar con un polígono regular en el que el número de lados es mayor al del hexágono; se pretendía que, al igual que antes, los estudiantes reconozcan el tipo de figura plana que se les presenta, las variaciones que pueda exhibir respecto al hexágono de la actividad anterior así como las herramientas que deba utilizar para calcular su área.

Por similitud con actividad 1.1 de esta sesión, todas las parejas lograron identificar el nombre del polígono regular (octágono) presentado (inciso a, actividad 1.2, sesión 1), así como el tipo de figura geométrica (triángulo) en que queda dividido al unir sus vértices con el punto central C (inciso b, actividad 1.2, sesión 1). No reconocieron de inmediato la clasificación a que pertenecen los triángulos obtenidos; para ello analizaron la longitud de los lados, logrando deducir que dos lados debían ser iguales (los que se cruzan en C) pero no estaban seguros de si el tercer lado (La base del triángulo) también medía lo mismo; en este punto uno de los alumnos identificado como Walter preguntó:

Alumno 2 (Pareja 3): ¿Cómo saber si los tres lados son iguales?

Profesor: En la actividad anterior, que los lados eran iguales, ¿qué ocurrió con los ángulos?

Alumno 2 (Pareja 3): Eran iguales

Profesor: ¿Qué ocurre con los ángulos en este triángulo?

Alumno 1 (Pareja 3): Son diferentes.

Fue cuando determinaron los ángulos interiores (Figura 14), de uno de los triángulos (inciso c, actividad 1.2, sesión1), que los estudiantes recordaron que la clasificación de un triángulo no solo se puede determinar por la medida de sus lados sino también de sus ángulos. Para ello determinaron que los ángulos basales del triángulo debían ser iguales y debía tener un ángulo diferente, esto lo hicieron dividiendo 360° entre 8 para obtener uno de los ángulos y aplicando la propiedad de que la suma de los ángulos interiores del triángulo debe ser 180, para obtener los ángulos faltantes.

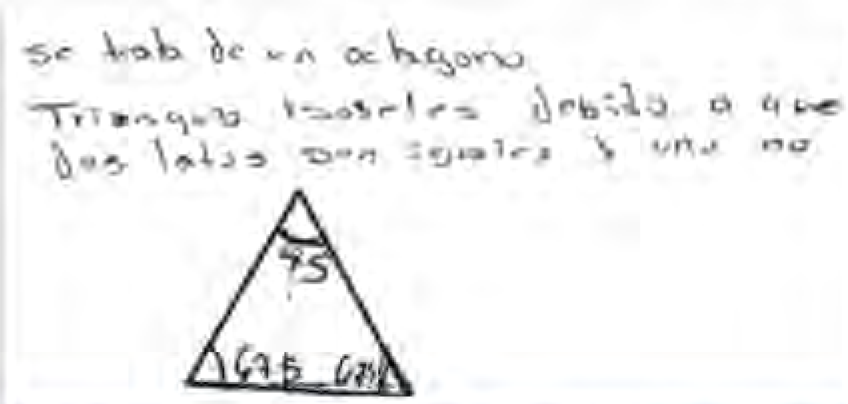


Figura 13. Respuestas, representativa del grupo; plasmada por el alumno 2 (pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de energía, para la Actividad 1.2 de la Sesión 1.

Para medir el lado faltante del triángulo isósceles (inciso d, actividad 1.2, sesión1), todas las parejas configuraron un triángulo rectángulo al cual aplicar nuevamente el teorema de Pitágoras; al intentarlo observaron que sólo disponían de la hipotenusa del triángulo por lo que era necesario buscar otra forma de calcularla. En este punto uno de los alumnos preguntó:

> Alumno 1 (Pareja 1): ¿Cómo calcular los catetos de un triángulo si sólo tenemos la hipotenusa?
>
> Otro alumno responde.
>
> Alumno 1 (Pareja 4): ¡También tenemos ángulos!
>
> Alumno 1 (Pareja 2): ¿Podemos usar trigonometría?
>
> Alumno 2 (Pareja 2): Si.
>
> Alumno 1 (Pareja 2): ¿El seno es cateto opuesto entre hipotenusa?

Alumno 2 (Pareja 2): Si.

Profesor: ¿Queda claro para todos cómo proceder?

Alumnos: Sííí.

Luego de recordar que disponían de ángulos y que podían utilizar trigonometría, las parejas lograron determinar la longitud de los cateto del triángulo rectángulo (Figura15), reconociendo que una de ellas serviría para determinar la base del triángulo isósceles y la otra para determinar su altura (inciso e, actividad 1.2, sesión1).

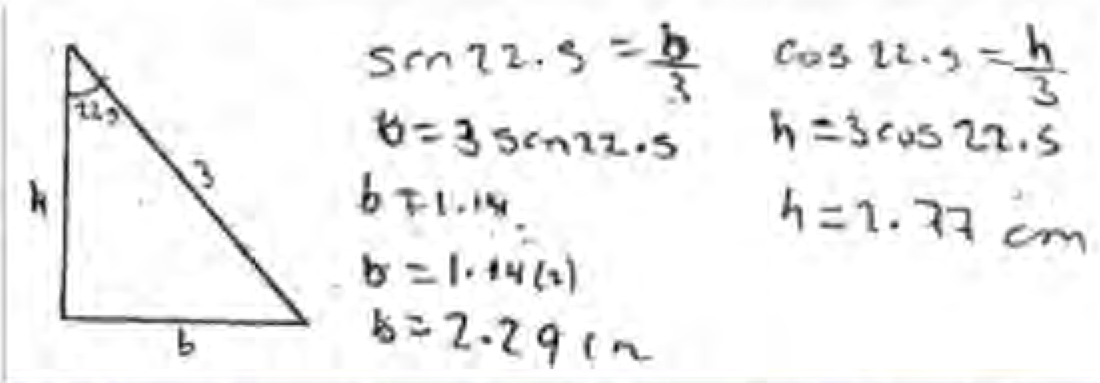


Figura 14. Respuesta, representativa del grupo, plasmada por el alumno 2(pareja 5) de Ingeniería en Sistemas, para la Actividad 1.2 de la Sesión 1

Finalmente, todas las parejas, lograron calcular el área del triángulo isósceles (inciso f, actividad 1.2, sesión1), al multiplicar la base por altura y dividir entre dos, con ello, también lograron calcular el área del octágono (inciso g, actividad 1.2, sesión1) al multiplicar por 8 el área del triángulo isósceles. La figura 15 y 16 es una respuesta representativa de la forma en que abordaron la situación la mayoría de las parejas.

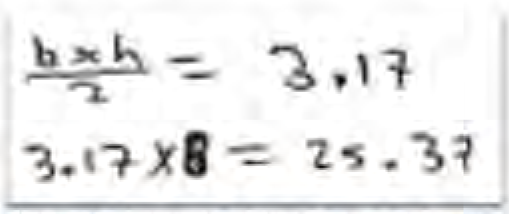


Figura 15. Respuesta plasmada por el alumno 2 (pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de energía para la Actividad 1. 2 de la Sesión 1

Actividad 1. 3 (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes generalizaran el proceso realizado en la actividad 1.2 de esta sesión, para un polígono regular de "n" lados.

Todas las parejas lograron reconocer la analogía que esta actividad tiene con la actividad 1.2 de esta sesión; identificaron rápidamente la clasificación de los triángulos en que queda dividido el polígono regular (Figura 17) al notar que uno de sus tres lados va disminuyendo de longitud cuando aumenta el número de lados en el polígono regular, por lo que concluyeron que el polígono regular, de "n" lados, queda dividido en triángulos isósceles al unir sus vértices con el punto central *c* (inciso a, actividad 1.3, sesión 1).

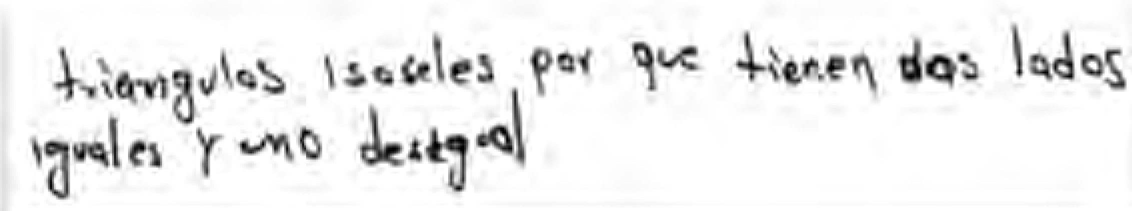


Figura 16. Respuesta, representativa del grupo, plasmada por el alumno 1 (pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía), para la Actividad 1.3 de la Sesión 1.

Cuando se les pide calcular el ángulo central de uno de los triángulos (inciso b, actividad 1.3, sesión 1), como función del número de lados, las parejas mostraron dificultades, que fueron evidentes cuando surgieron algunas preguntas:

Alumno 2 (Pareja 2): ¿Cómo calculamos el ángulo si no sabemos cuánto vale "n"?

Alumno 1 (Pareja 3): ¿Debe quedar una formula con la "n" como incógnita?

Alumno 1 (Pareja 2): Variable porque pide el ángulo en función de "n".

Alumno 2 (Pareja 2): Creo que ya entendí, solo escribimos la operación,…, no podemos hacerla hasta que se sustituya la "n"

Alumno 1 (Pareja 2): Si

En la figura 18 podemos observar una respuesta representativa del grupo, proporcionada por el 2 de la pareja 2:

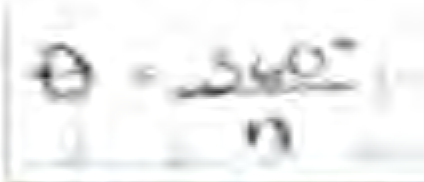


Figura 17. Respuesta, representativa del grupo, plasmada por el alumno 2 (pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 1.3 de la Sesión 1.

Cuando se dispusieron a determinar la base y altura (inciso c y d, actividad 3, sesión 1), como función del número "n" de lados, reconocieron rápidamente, por lo aprendido en la actividad anterior, que debían emplear trigonometría, pero surgieron otras dudas que fueron reveladas cuando preguntaron:

Alumno 1 (Pareja 3): ¿Aquí también escribiremos las operaciones dejando la n como una variable?

Alumno 1 (Pareja 2): Sí,..; porque usamos el ángulo que quedó con la variable "n".

Alumno 1 (Pareja 3): No podemos usar ese ángulo porque dividimos el triángulo en dos rectángulos.

Alumno 2 (Pareja 3): Entonces usamos la mitad del ángulo.

Después de aclarar esas dudas y recordar lo aprendido en la actividad 1.2 de esta sesión, las parejas emplearon razones trigonométricas (Figura 19) para determinar la base y altura pedidas del triángulo isósceles.

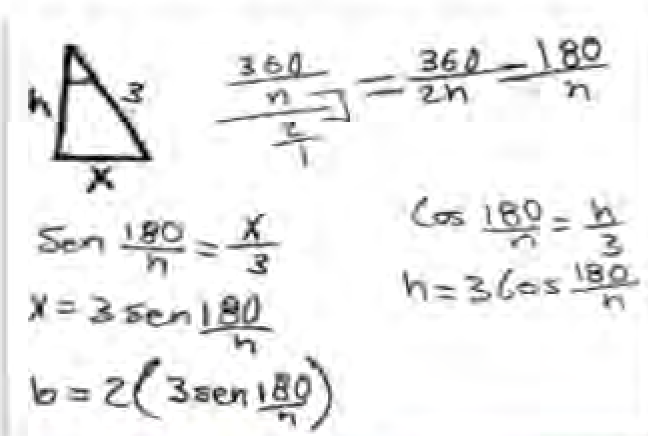


Figura 18. Respuesta, representativa del grupo, plasmada por el alumno 1 (pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 1.3 de la Sesión 1.

Con los datos de la base y altura determinados, lograron expresar el área del triángulo (inciso e, actividad 1.3, sesión 1) al multiplicar la base por altura y dividir entre dos. Finalmente también lograron proporcionar una expresión para el área del polígono regular (inciso f, actividad 1.3, sesión 1), en función del número "n" de lados (Figura 20).

$$A=\frac{b\times a}{2}=\frac{\left(2\left(3\,\mathrm{sen}\frac{180}{n}\right)\right)\left(3\cos\frac{180}{n}\right)}{2}=$$

$$9\left(\mathrm{sen}\frac{180}{n}\right)\left(\cos\frac{180}{n}\right)$$

$$\frac{\left(2\left(3\,\mathrm{sen}\frac{180}{n}\right)\right)\left(3\cos\frac{180}{n}\right)}{2}(n)=A\ \mathrm{polig}$$

$$9\left(\mathrm{sen}\frac{180}{n}\right)\left(\cos\frac{180}{n}\right)(n)=A\ \mathrm{polígono}$$

Figura 19. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 1.3 de la Sesión 1.

Actividad 1.4. (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes determinaran la figura límite en que se va transformando el polígono regular cuando aumenta su número de lados y el comportamiento de su área. Todas las parejas lograron completar la tabla (inciso a, actividad 1.4, sesión 1), utilizando la expresión obtenida en la actividad 1.3 (Figura 21), así como también lograron identificar el tipo de figura (círculo) en que se van transformando los polígonos regulares (Figura 22) al aumentar indefinidamente el número de lados (inciso b, actividad 1.4, sesión 1).

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Área	23.31 cm^2	25.37 cm^2	28.5 cm^2	28.25 cm^2	28.27 cm^2

Figura 20. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 1.4 de la Sesión 1.

Cuándo se les preguntó qué ocurre con el área (inciso c, actividad 1.4, sesión 1), los estudiantes lograron deducir que aumenta hasta el área del círculo, pero fue evidente que había dudas cuando preguntaron:

Alumno 2 (Pareja 2): ¿Cuál es el radio del círculo?

Profesor: Observen las actividades 1 y 2, ¿qué es lo que no cambia en las figuras?

Alumno 1 (Pareja 2): La longitud del segmento AC.

Alumno 2 (Pareja 2): Ya entendí… ¡el radio es 3!

Al final también lograron establecer el comportamiento de las áreas (Figura 22) al aumentar el número de lados y establecieron que se aproxima al área del círculo de radio 3.

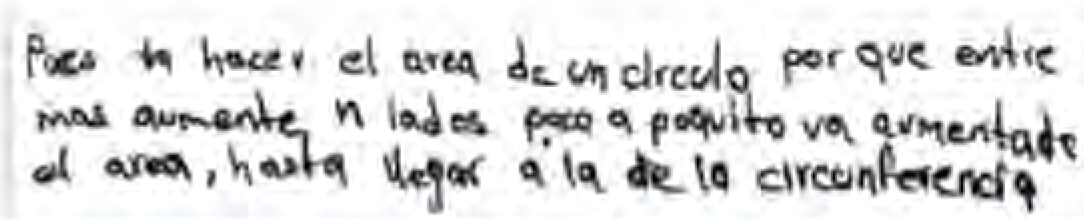

Para la hacer el area de un circulo porque entre mas aumente n lados poco a poquito va aumentade el area, hasta llegar a la de la circunferencia

Figura 21. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 1.4 de la Sesión 1.

Tabla 1. Logros alcanzados por los estudiantes y dificultades encontradas en la sesión 1.

Parejas	Observaciones
1, 4 y 5	Escribieron la clasificación a que pertenecen los polígonos regulares de las actividades. Identificaron el tipo de figura geométrica (Triángulo) en que se dividen los polígonos al unir los vértices con el centro. Para los triángulos calcularon: los ángulos interiores, la medida de sus lados, la medida de sus alturas, el área. Calcularon el área de los polígonos regulares.
1, 2, 3, 4 y 5	Dificultades para obtener el ángulo en función del número de lados para un polígono regular. Dificultades para reconocer completamente la figura límite de la sucesión de polígonos regulares. Dificultades para clasificar triángulos.

4.3.2. Análisis de actividades de la sesión 2

Al iniciar la segunda sesión, se pidió a los alumnos formar nuevamente pareja con el compañero que habían trabajado la sesión 1, después de entregar la lista de actividades, se explicó a los alumnos el contenido de las misma así como el objetivo que se persigue con su realización y también se les pidió revisar las declaraciones (texto que acompaña la actividad) hechas en las mismas a fin de detectar posibles dudas o impedimentos para su realización.

Posterior a la revisión los alumnos iniciaron con el análisis de las actividades para determinar la forma en que debían realizarlas.

Actividad 2.1 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía que los estudiantes recordaran y/o propusieran estrategias que permitan determinar o aproximar el área de una figura plana general limitada por una curva. Esta actividad es importante porque cuando el individuo tiene la necesidad de verificar el área de un "predio" irregular, generalmente no sabe cómo proceder, con esta actividad puede redescubrir que no todo en la vida se calcula con fórmulas, que en algunos casos hay que aplicar el ingenio. Este ingenio está ligado a la comprensión de las estrategias y procesos utilizados para el caso de polígonos regulares e irregulares.

La actividad reveló que la mayoría de los estudiantes desconoce las estrategias que pueden utilizar para aproximar el área de una región plana limitada por curvas. Solamente dos parejas, de las cinco que participaron, intentaron resolver la situación (Parejas 2 y 3). Uno de los alumnos (alumno 1, Pareja 2) observo que la figura parecía estar formada por dos círculos (Figura 23), de diferentes tamaños, pero al no contar con instrumentos de medición, sólo representaron los radios y las operaciones que debían realizar con ellos para obtener un área.

El otro alumno (alumno 1, pareja 3) colocó la figura sobre una hoja cuadriculada de su libreta, y con ayuda de su lápiz encerró la figura en un rectángulo y calcó la cuadrícula para este rectángulo (Figura 24), de esta forma expresaron el área en términos de la cantidad de cuadros que quedaron dentro de la región.

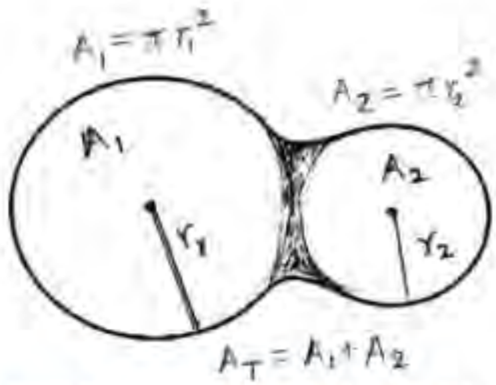


Figura 22. Respuesta, del alumno 1 (pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 2.1 de la Sesión 2.

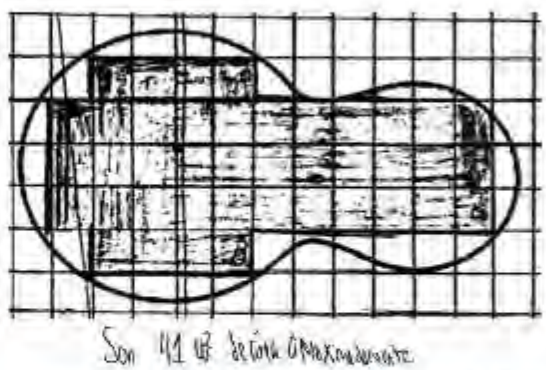


Figura 23. Respuesta, del alumno 1 (pareja 3) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 2.1 de la Sesión 2.

Cuando se les cuestionó sobre la forma en que procedieron, los integrantes de la pareja, que utilizó círculos (Pareja 2), dijeron que se guiaron de la sesión anterior (sesión 1), en la que habían dividido los polígonos en triángulos para calcular el área como una suma de áreas de triángulos, pero por la forma de la figura, no podían utilizar triángulos sino más bien círculos y dejaron representadas la operaciones por que no contaban con los radios de los círculos o una regla para medirlos.

Uno de los integrantes de la pareja que calcaron una cuadricula sobre la figura (Pareja 3), mencionó que recordaba haber calculado el área del piso (rectangular) de su salón de clases, calculando con una regla el área de una baldosa y multiplicándolo por el total de baldosas en el piso. Pero como la figura no es un rectángulo sino de forma curvada, no podían obtener el resultado correcto sólo un valor aproximado.

Después de la intervención de las parejas 2 y 3, que lograron expresar una idea para resolver la situación presentada, el profesor intervino con algunos cuestionamientos para verificar la comprensión del resto de los estudiantes respecto a lo que dijeron sus compañeros.

Profesor: De acuerdo a lo que dijo José Luis, ¿qué facilitó calcular el área del piso?

Alumno 2 (Pareja 2): Que el piso está cubierto de baldosas, que tenía forma rectangular y que contaban con una regla.

Profesor: ¿El piso debe tener forma rectangular para que podamos aplicar esta estrategia?

Alumno 1 (Pareja 2): No, José Luis y Walter la usaron para la figura sin ser rectángulo, pero como dijo José Luis, solo tendremos un valor aproximado.

Profesor: Así es, esta estrategia puede emplearse independientemente de la forma que tenga la región plana, ya sea que este limitada por curvas como el círculo o por líneas rectas como los polígonos regulares e irregulares.

Profesor: ¿A qué se refiere José Luis cuando dijo que sólo se puede obtener un valor aproximado para el área de la figura?

Alumno 2 (Pareja 1): A que no se puede calcular bien el área para los cuadritos cerca de la parte curva.

Profesor: Está claro para todos.

Alumnos: Siii.

En esta actividad es evidente que las parejas que lograron dar una respuesta, están transfiriendo los conocimientos aprendidos en la actividad anterior, al inscribir una figura geométrica (circulo o polígono irregular), en la región para aproximar su área.

Actividad 2.2 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía que los estudiantes emplearan las estrategias de la actividad 2.1, en esta sesión, para que proporcionen estimaciones del área de una región plana limitada por curva y acotada por un rectángulo subdividido en cuadrados con medidas especificadas.

Cuándo se les cuestionó si conocían alguna fórmula para calcular el área de la figura sombreada, todas las parejas respondieron que no conocían ninguna fórmula (inciso a, actividad 2.2, sesión 2). En la Figura 25, que es representativa de lo que hicieron los estudiantes, podemos observar que para responder la segunda cuestión (inciso b, actividad 2.2, sesión 2), se reconoció que debían emplear el proceso aprendido en la actividad 2.1 de esta sesión. Los estudiantes proporcionaron las estimaciones pedidas para el área de la figura (una que fuera menor y la otra mayor), contando cuántos cuadrados quedaron completamente adentro de la figura para calcular la estimación menor y cuántos cuadrados cubrían la figura, quitando aquellos que no la intersectan, para obtener la estimación mayor.

Nuevamente vemos en este proceso de solución la aplicación, por parte de los estudiantes, de conocimientos y estrategias aprendidos en las actividades anteriores, cuando inscriben o cubren con un polígono irregular la región dada para aproximar su área. Estos polígonos irregulares son evidentes cuando pensamos como una sola figura a todos los cuadrados que quedaron dentro de la región (polígono inscrito) o a todos los cuadrados que cubren la región (polígono que cubre).

En esta actividad también queda evidenciado que los estudiantes aprendieron a calcular estimaciones del área para figuras planas limitadas por curvas, cosa que no todos sabían hacer en la actividad anterior.

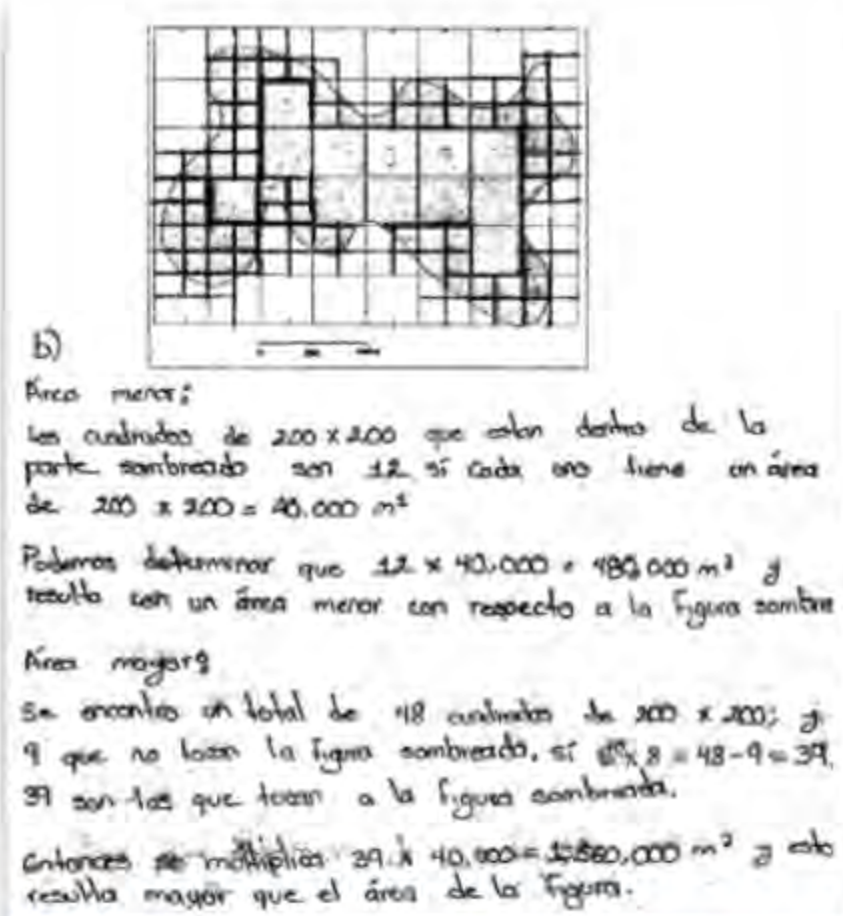


Figura 24. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 2.2 de la Sesión 2.

Se presentaron pequeñas dificultades (Parejas 2) cuando se les pidió dos estimaciones que fueran más próximas al valor real del área que las anteriores (inciso c, actividad 2.2, sesión 2). En este punto surgieron algunas exclamaciones y preguntas como:

Alumno 2 (Pareja 2): Es difícil profe.

Alumno 1 (Pareja 2): ¿Cómo le hacemos profe?

Profesor: ¿Cómo tendrían que ser los cuadrados para que haya más de ellos dentro de la figura?

Alumno 1 (Pareja 3): Si fueran más pequeños.

Profesor: ¿Cómo podemos hacer que en lugar de cuadrados grandes tengamos cuadrados pequeños?

Alumno 2 (Pareja 2): Solo si los dividimos quedarían cuadritos más pequeños dentro de la figura.

Finalmente en los trazos mostrados en la figura 25 y cálculos mostrados en la figura 26, que son representativos de las respuesta proporcionadas, podemos observar que el intercambio de ideas les permitió recordar que pueden dividir un patrón dado (cuadrado), en otros de dimensiones menores de modo que ajusten mejor la magnitud a medir y lograr una mejor precisión en la medida.


c) Los cuadritos de 200 x 200 que tocan una parte de la figura no están completamente dentro de ella. Entonces se tiene que dividir en cuadrados más chicos de 100 x 100

Área menor

Si hay 35 cuadrados de 100 x 100 que están dentro de la parte sombreada.

Se calcula el área de 35 x 100 x 100 = 350,000 m²

Si sumamos los 350,000 + 480,000 del inciso b). Da un total de 830,000 m².

Entonces podemos decir que 830,000 m² tiene un área menor que el área de la figura.

Área mayor

Hay en total 78 cuadrados de 100 x 100 que están dentro de la figura o que tocan una parte de ella.

El área que abarca es de 78 x 10,000 = 780,000 m². Si sumamos los 780,000 m² con los 480,000 m² del inciso b)

780,000 + 480,000 = 1,260,000 m²

El resultado posee un área mayor al del área de la figura

Figura 25. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 2.2 de la Sesión 2

En la figura 27, representativa de la forma en que las parejas respondieron la actividad, podemos observar que el estudiante (alumno 1, pareja 2) logró calcular la diferencia entre las aproximaciones inferior y superior, pedida (inciso d, actividad 2.1, sesión 2). En cuanto a la interpretación todos lograron decir que la segunda diferencia es más pequeña que la primera por que los valores están más cercanos entre sí, lo que significa que aproximan mejor el área de la figura plana. Esto evidencia que los estudiantes comprenden el grado de precisión de las estimaciones obtenidas.

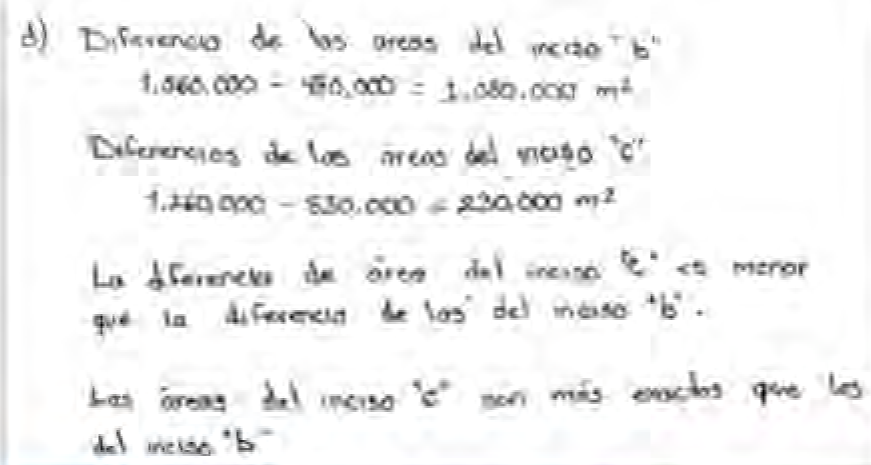

d) Diferencia de las areas del inciso "b"
1.560.000 - 480.000 = 1.080.000 m²
Diferencias de las areas del inciso "c"
1.160.000 - 930.000 = 230.000 m²
La diferencia de área del inciso "c" es menor que la diferencia de las del inciso "b".
Las áreas del inciso "c" son más exactas que las del inciso "b"

Figura 26. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 2.2 de la Sesión 2.

Actividad 2.3 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía que los estudiantes calcularan el área sombreada de tres cuadrados subdivididos en cuadrados unitarios, para ello debían reconocer patrones que les conduce a un nuevo conocimiento (sumatoria de números naturales), y la forma de utilizar estos patrones para generalizar este conocimiento.

Todos los alumnos lograron completar la mayoría de los datos respecto al área, solicitados en una tabla (inciso a, actividad 2.3, sesión 2), para cada uno de los tres cuadrados mostrados en esta actividad (Figura 28), solo hubo pequeñas dificultades al momento de escribir la generalización, en particular al determinar la forma general del área que queda por encima de la diagonal en cada uno de los cuadrados, esto se debió a que utilizaron una representación decimal y no lograban ver el patrón que siguen cuando son representadas en forma de fracción.

Estas dificultades fueron superadas cuando el profesor preguntó a los estudiantes:

> Profesor: ¿Cómo expresan en forma de fracción estos números escritos en forma decimal?
>
> A lo que ellos respondieron correctamente:

Alumno 1 (Pareja 4): $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$.

Profesor: ¿Qué relación hay entre los numeradores de estas fracciones y los tres cuadrados dados?

Alumno 1 (Pareja 5): Los numeradores son los cuadritos que hay en el lado del cuadrado

Alumno 1 (Pareja 3): Si ya vi, el área por arriba de la diagonal seria $\frac{n}{2}$

Con este intercambio de ideas los estudiantes aprendieron que dependiendo de la forma en que representen sus operaciones podrán observar patrones que ayuden a deducir generalizaciones y cuando utilizan representaciones simples no se logra establecer ese patrón oculto que siguen algunas operaciones. Fue así que lograron deducir la generalización del área.

Dato	1er Cuadrado	2° Cuadrado	3er Cuadrado	Generalización
N° de cuadros en el lado del cuadrado.	5	7	9	n
Área obscura debajo de la diagonal	$\frac{(5cm)^2}{2}=12.5cm^2$	$\frac{(7cm)^2}{2}=24.5cm^2$	$\frac{(9cm)^2}{2}=40.5cm^2$	$\frac{n^2}{2}cm^2$
Área obscura sobre la diagonal	$(\frac{1}{2}cm^2)(5)=2.5cm^2$	$(\frac{1}{2}cm^2)(7)=3.5cm^2$	$(\frac{1}{2}cm^2)(9)=4.5cm^2$	$\frac{n}{2}cm^2$
Suma de áreas obscura bajo y sobre la diagonal	$12.5cm^2+2.5cm^2=15cm^2$	$24.5cm^2+3.5cm^2=28cm^2$	$40.5cm^2+4.5cm^2=45cm$	$\frac{n^2+n}{2}cm^2$

Figura 27. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (Pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2.3 de la Sesión 2.

Para responder las siguientes cuestiones de la actividad, los estudiantes analizaron los rectángulos verticales de base unitaria en cada uno de los tres cuadrados, logrando observar que el primer rectángulo tenía un cuadrado unitario sombreado, el segundo rectángulo tenía dos cuadrados unitarios sombreados y así sucesivamente con los demás, también lograron determinar que el área sombreada en cada cuadro se podía obtener sumando los números 1, 2, 3, y así hasta el número de cuadritos que tuviera el lado del cuadro. Esta observación les permitió ver con facilidad que la suma 1+2+3+…+100 (inciso b, actividad 2.3, sesión 2), podía hacerse de la misma forma, considerando al 100 como el número de cuadritos en el lado del cuadrado, por lo que todas las parejas lograron escribir el resultado de la suma planteada (Figura 29).

Durante el proceso de solución de este inciso ellos hicieron afirmaciones y preguntas como las siguientes:

Alumno 1 (Pareja 2): Recuerdo que hay una fórmula para calcular esa suma.

Profesor: ¿Alguien recuerda cuál es esa fórmula?

Alumno 2 (Pareja 3): No.

Profesor: Si no la recuerdan no se preocupen, podrán calcularla al ir resolviendo los incisos de la actividad.

$$S = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(100)^2+100}{2}\ cm^2 = 5050\ cm^2$$

Figura 28. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2.3 de la Sesión 2.

Finalmente con todo lo hecho para los primeros incisos de esta actividad y aclaradas las dificultades ocurridas todos los estudiantes lograron (Figura 30) obtener la forma general de sumar los primeros n números naturales (inciso c, actividad 2.3, sesión 2).

$$S = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Figura 29. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2.3 de la Sesión 2.

Al trabajar con esta actividad los estudiantes aprendieron que reconocer patrones puede ser de gran utilidad para transformar una situación planteada en una representación en otra situación planteada en una representación distinta pero equivalente, en el sentido que conducen al mismo resultado. Tal como ha ocurrido en esta actividad en la que se trabajó una situación representada en la forma geométrica, y al reconocer ciertos patrones en esta representación, se pudo transformar en otra situación representada en forma algebraica.

Actividad 2.4 (Anexo A), el propósito de esta actividad es que los estudiantes aprendan a reconocer, y comprendan, los pasos a seguir cuando tienen que utilizar el concepto de integral definida para calcular el área de una figura plana, limitada por la gráfica de una función positiva cualquiera $f(x)$ y por el eje de las X. Para ello iniciamos con una función sencilla (función identidad), que permita a los estudiantes seguir con facilidad los procesos involucrados.

Al iniciar la actividad todos los estudiantes presentaron problemas para determinar los números que ayudan a dividir el intervalo $(0, 1)$, sobre el eje de las abscisas, en cuatro partes iguales, (inciso a, actividad 2.4, sesión 2). Estas dificultades se evidenciaron cuando algunos de los estudiantes hicieron preguntas como:

Alumno 1 (Pareja 1): Profe,... ¿Los números son iguales a $1/_4$?

Profesor: ¿Por qué consideras que son iguales a $1/_4$?

Alumno 1 (Pareja 1): Como estamos dividiendo en cuatro partes iguales entonces cada una de las partes debe ser $1/_4$.

Profesor: Cada una de las partes tiene una longitud de $1/_4$, pero lo que se pide es establecer que fracción de la unidad hay desde el origen hasta cada una de las marcas que forman la subdivisión.

Alumno 1 (Pareja 1): Entonces la primera marca representa $1/_4$ de la unidad, la segunda es la mitad, o sea $1/_2$ pero la siguiente, ¿cuánto representa?

Profesor: Recuerden estamos dividiendo en cuatro partes iguales, ahora, iniciando desde el origen, la primera marca, ¿cuántas partes de las cuatro ocupa?

Alumno 1 (Pareja 5): La primera solo una parte, la segunda dos partes y la tercera tres,..., ¿los números serian $1/_4$, $2/_4$ y $3/_4$, no?

Con estas aclaraciones, todas las parejas lograron determinar las números que ayudan a dividir el intervalo $(0\,,1)$ en cuatro partes iguales (Figura 31) y también lograron comprender que cada una de estas divisiones tienen una longitud de $1/_4$.

En este momento los estudiantes aprendieron a crear una partición del intervalo $(0\,,1)$, al dividirlo en cuatro partes de igual longitud. Esta partición está formada por la secuencia de números: 0, $1/_4$, $2/_4$ y $3/_4$ y 1, que limitan las cuatro partes de igual longitud en que queda dividido el intervalo. Cabe mencionar que las partes en que se divide el intervalo para formar la partición del mismo pueden tener longitudes diferentes pero en este caso para propósitos de comprensión se trabajó considerando las partes de igual longitud.

Cuando se les pidió calcular la base y altura (inciso b, actividad 2.4, sesión2), de los rectángulos sombreados que se levantan sobre algunas de estas divisiones del intervalo, una de las parejas (pareja 4) presento dificultades que se hizo evidente cuando preguntaron:

Alumno 2 (Pareja 4): ¿Cómo calculamos la altura de los rectángulos?

Pero fueron superadas rápidamente cuando un estudiante de otra pareja menciono:

Alumno 1 (Pareja 3): Si miras bien la figura, las alturas son los números que calculamos para la división del intervalo.

Cuando el profesor preguntó:

Profesor: ¿por qué consideras que son los mismos?

El alumno respondió:

Alumno 1 (Pareja 3): Porque la función $y = x$ me dice que el valor que tenga la "x" es el mismo que tendrá la "y", así que el valor de "x" en la marca de división es lo mismo que la altura.

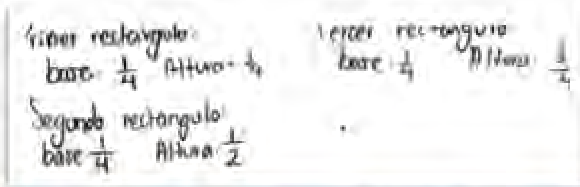


Figura 30. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2. 4 de la Sesión 2.

Una vez que lograron superar estas dificultades, todos los estudiantes pudieron calcular el área para cada uno de los rectángulos (Figura 32) y la suma de dichas áreas (inciso c, actividad 2.4, sesión 2).

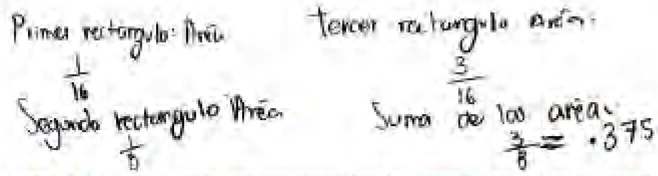


Figura 31. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2.4 de la Sesión 2.

También escribieron (Figura 33) en forma de notación las operaciones hechas (inciso d, actividad 2.4, sesión 2), y mencionaron que el área obtenida es menor que el área del rectángulo (inciso e, actividad 2.4, sesión 2).

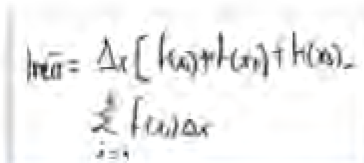


Figura 32. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 2.4 de la Sesión 2.

Al realizar esta actividad, los estudiantes nuevamente utilizaron la estrategia de inscribir un polígono irregular dentro de la región plana, cuya área desean calcular. Aprendieron que trabajar con un sistema de referencia bidimensional permite introducir el concepto de función para delimitar el problema a trabajar solamente con regiones planas limitadas por la gráfica de una función positiva y el eje de las abscisas. También aprendieron que el patrón adecuado para construir polígonos irregulares inscritos, o que cubran la región, son los rectángulos, ya que con la introducción del concepto de partición de un intervalo es más sencillo y sistemático construirlos, obtener sus medidas y aproximar el área de la región.

Tabla 2. Logros alcanzados por los estudiantes y dificultades encontradas en la sesión 2.

Parejas	Observaciones
2 y 3	Transfirieron el conocimiento. Proporcionaron estrategias para estimar el área de una región plana limitada por curva general.
1, 3 y 5	Emplearon el acotamiento. Proporcionaron estimaciones del área para una región plana limitada por curva. Midieron la precisión de sus estimaciones. Identificaron patrones. Calcularon la suma de los primeros 100 números naturales. Generalizaron la suma de los primeros "n" números naturales para cualquier natural "n". Calcularon los números que sirven para hacer la partición de un intervalo. Construyeron rectángulos inscritos al triángulo. Determinaron la base y altura de los rectángulos. Calcularon el área de los rectángulos. Calcularon la suma de área de los rectángulos. Escribieron que la suma de áreas es menor que el área del triángulo. Escribieron los primeros pasos para el concepto de integral definida.
1, 4 y 5	Desconocimiento de estrategias.
1, 2, 3, 4 y 5	Dificultades para la abstracción y la generalización a partir de patrones.
4	Dificultades para determinar los números que sirven para construir la partición de un intervalo, Dificultades para determinar la altura de los rectángulos construidos sobre una partición.

4.3.3. Análisis de actividades de la sesión 3

En la tercera sesión se pidió a los alumnos formar nuevamente pareja con el compañero que habían trabajado las sesiones anteriores 1 y 2. Después de entregar la lista de actividades, se explicó a los alumnos el contenido de las misma así como el objetivo que se persigue con su realización. Se les pidió revisar las declaraciones (texto que acompaña la actividad) hechas en las mismas a fin de detectar posibles dudas o impedimentos para su realización.

Posterior a la revisión los alumnos iniciaron el análisis de las actividades para determinar la forma en que debían realizarlas.

Actividad 3.1 (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes reconocieran y desarrollaran de forma general el proceso utilizado para calcular el área, visto en la sesión anterior (actividad 2.4, sesión 2). Esta generalización requiere la introducción de otros conceptos así como la integración de algunos utilizados antes.

Al intentar responder el primer planteamiento de la actividad, las parejas tuvieron dificultades para obtener los números que permiten dividir, en "n" partes iguales, el intervalo $(0, x)$, (inciso a, actividad 3.1, sesión 3), estas dificultades fueron manifestadas cuando hicieron la pregunta:

> Alumno 1 (Pareja 2): ¿Cuánto vale la "x"?
>
> Profesor: Si "x" fuera 5 y queremos dividir en 8 partes iguales, ¿qué longitud tiene cada una de las 8 partes en que se divide el intervalo de 0 a 5?
>
> Alumno 1 (Pareja 2): Seria 5/8.
>
> Profesor: Utilizando la "x" como un número general en lugar del 5 y se quiere dividir en "n" partes en lugar de 8, ¿cuál es la longitud de cada una de las divisiones?
>
> Alumno 2 (Pareja 2): Creo que sería x/n.
>
> Profesor: Partiendo del origen, ¿cuántas de estas longitudes ocupa la primera división? ¿Cuántas la segunda? ¿Cuántas la tercera? Etc.
>
> Alumno 1 (Pareja 2): Ya entendí,... , es como la clase pasada pero, ..., si ocupo dos divisiones ¿cómo quedaría el número? ¿2+ x/n?
>
> Profesor: Si cada división fuera de longitud 3 y tomas dos divisiones ¿cuál sería la longitud total?
>
> Alumno 1 (Pareja 2): Seria 6.

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 1 (Pareja 2): Porque 3 más 3 es 6,..., son dos partes de tres cada una, ..., mmm, pero también da multiplicando.

Profesor: ¿Queda claro para todos?

Alumnos: Siiii, se multiplican.

Luego de la aclaración, los estudiantes lograron escribir (Figura 34) los números pedidos:

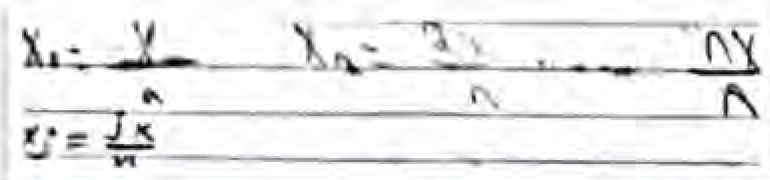


Figura 33. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 2) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 3.1 de la Sesión 3.

Una vez comprendido el inciso anterior, el siguiente (inciso b, actividad 3.1, sesión 3) fue resuelto rápidamente con la observación que la longitud de las divisiones formadas es x/n, y como se trataba de un triángulo semejante al de la actividad 2.4 sesión 2, reconocieron rápidamente cuales debían ser las alturas (Figura 35).

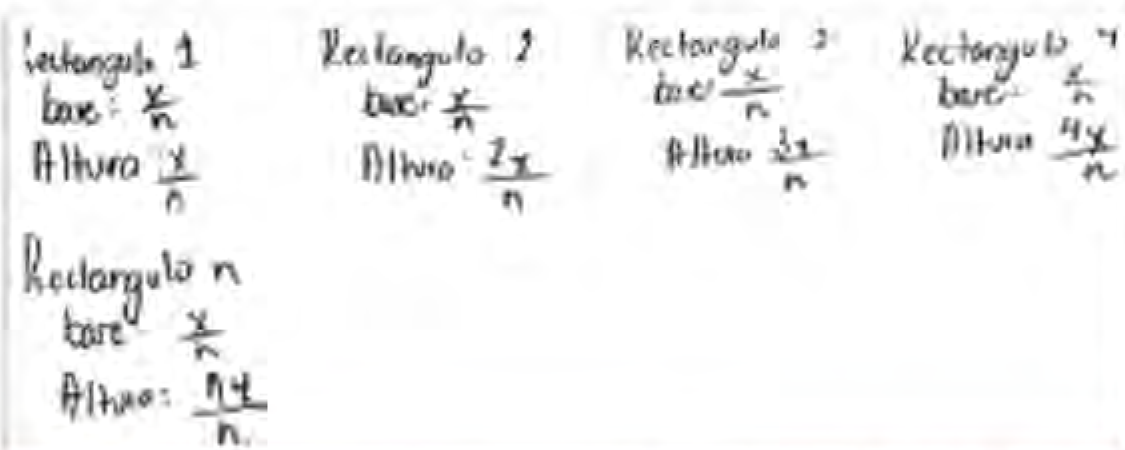


Figura 34. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3.1 de la Sesión 3.

Basados en estos resultados los estudiantes, lograron expresar el área de los rectángulos y la suma de dichas áreas (inciso c, actividad 3.1, sesión 3). Así como expresar la notación de sumatoria para la misma (inciso e, actividad 3.1, sesión 3), pero no intentaron transformarla o analizar si podían reducir esa suma, hasta que un alumno de equipo 4 preguntó:

Alumno 2 (Pareja 4): Profe, ¿se puede simplificar esta suma?

Profesor: ¿Por qué consideras que se puede simplificar?

Alumno 2 (Pareja 4): Como anteriormente obtuvimos la fórmula para una suma, ..., pero, ¿cómo le hacemos si la suma tiene letras?

Profesor: Bueno, recuerdan la factorización:

Alumno 2 (Pareja 4): mmm, ..., creo que ya entendí, factorizando: $\frac{x^2}{n^2}$

Alumno 1 (Pareja 3): ¡Si factorizamos es la suma que hicimos antes!

Fue entonces que los alumnos lograron recordar que ya habían obtenido una expresión para dicha suma y que podían utilizarla para reducir la expresión (Figura 36).

Figura 35. Respuesta representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3.1 de la Sesión 3.

Cuando leyeron la penúltima instrucción de esta actividad (inciso d, actividad 3.1, sesión 3), los estudiantes no tenían idea alguna de que le pasaría a la suma cuando "n" tomara valores cada vez más grandes. Esta duda fue externada cuando preguntaron:

Alumno 1 (Pareja 4): ¿Cómo sabemos hacia donde se aproxima esta suma cuando "n" toma valores muy grandes?

Profesor: Primero recuerden que dicha suma se obtuvo sumando las áreas de los rectángulos que cubren al triángulo y observen que una parte de los rectángulos sobrepasa al triángulo. Si aumentamos el número de rectángulos construidos, ¿qué ocurre con el área por encima del rectángulo?

Alumno 1 (Pareja 2): Lo que sobresale va disminuyendo.

Profesor: Al ir disminuyendo el exceso de área, ¿qué ocurre con la suma de áreas de los rectángulos?

Alumno 1 (Pareja 3): Entonces la suma de áreas se va pareciendo al área del triángulo.

Profesor: Cuando aumenta "n" también aumenta la cantidad de rectángulos y la suma de sus áreas se va aproximando al área del triángulo.

Alumno 2 (Pareja 1): Si "n" aumenta lo suficiente, en algún momento la suma será el área del triángulo.

Profesor: ¿Ha quedado claro para todos?

Alumnos: Si profe.

También hubo dificultades a la hora de utilizar la notación de límites (inciso e, actividad 3.1, sesión 3) para representar el resultado obtenido en el inciso anterior, esto debido a que recordaban que se utilizaba una función pero en este caso no tenían la función (Figura 37). Hubo que aclarar entonces que la función estaba representada por una sumatoria que depende de "n".

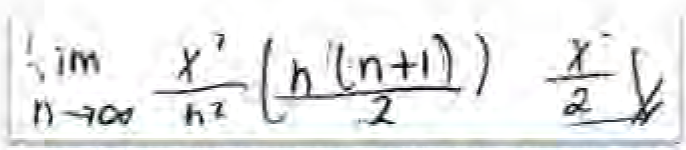


Figura 36. Respuesta representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3.1 de la Sesión 3.

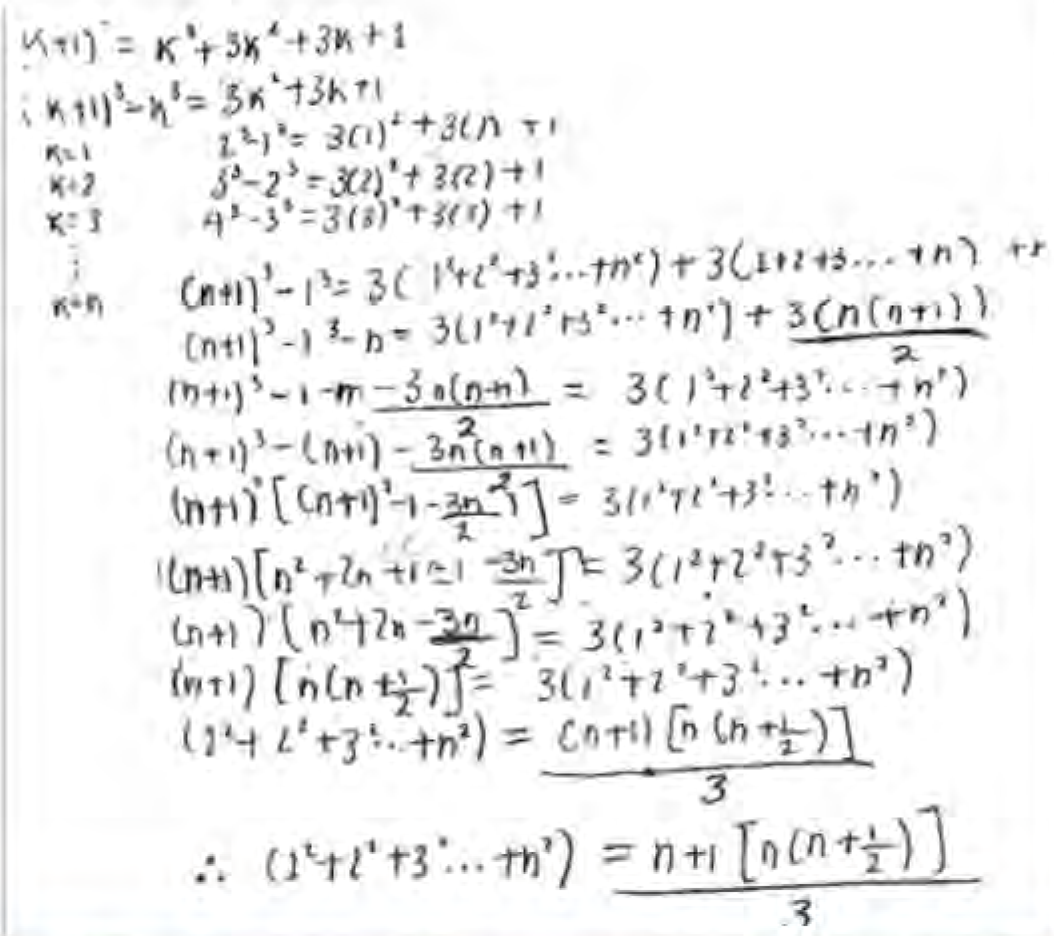
En esta actividad podemos observar que cuando se trata de generalizar un proceso que parecía haber quedado claro para los estudiantes, no siempre lo logran ya que la mayoría de ellos están acostumbrados, en el mejor de los casos, a trabajar de forma numérica no con símbolos. Sin embargo, al realizarla aprendieron a construir de forma general la partición de un intervalo, dividiéndolo en "n" partes iguales que les permitió establecer rectángulos y la construcción de un polígono irregular para aproximar el área de la región. Lograron expresar el área de este polígono irregular como una sumatoria de números que reconocieron después de un proceso de factorización, y lograron establecer el límite de dicha sumatoria al incrementar el número de partes en que se divide el intervalo (refinar la partición). Esto es, los estudiantes finalmente aprendieron a escribir el proceso de integral definida para determinar el área de la región planteada en esta actividad.

Actividad 3.2 (Anexo A), tomando como base las necesidades para calcular sumatorias de las actividades anteriores, en esta actividad se pretendía que los estudiantes analizaran un ejemplo puramente algebraico que permite obtener la suma de los primeros "n" números naturales, y que repitieran un proceso similar para obtener otras sumas que involucran potencias de los primeros "n" números naturales.

Luego de analizar el ejemplo por varios minutos, las parejas, con algo de dificultad, lograron repetir los primeros pasos del proceso para sumar las potencias 2 de los primeros "n" número naturales (inciso a, actividad 3. 2, sesión 3), las dificultades más evidentes se revelaron a la hora de simplificar la expresión obtenida.

> Alumno 1 (Pareja 2): Profe, ¿simplificamos el resultado?
>
> Profesor: Si, traten de factorizarlo.
>
> Alumno 1 (Pareja 2): Si lo pensé profe,…, pero no hay factor común, dos términos tienen el factor común (n+1), ¿qué hago con la "n" y el "1" que no tienen ese factor?
>
> Profesor: Que tal si los agrupan como un solo término.

Fue entonces que lograron reconocer el factor común (Figura38) y pudieron escribir el resultado como producto de factores lineales.



$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$
$$\therefore (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$
$$k=1 \qquad 2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1$$
$$k=2 \qquad 3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1$$
$$k=3 \qquad 4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$$
$$\vdots$$
$$k=n \qquad (n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2) + 3(1+2+3\ldots+n) + n$$
$$(n+1)^3 - 1^3 - n = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2) + \frac{3(n(n+1))}{2}$$
$$(n+1)^3 - 1 - n - \frac{3n(n+1)}{2} = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right] = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(n+1)\left[n^2+2n+1-1-\frac{3n}{2}\right] = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(n+1)\left[n^2+2n-\frac{3n}{2}\right] = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(n+1)\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = 3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)$$
$$(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2) = \frac{(n+1)\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{3}$$
$$\therefore (1^2+2^2+3^2\ldots+n^2) = \frac{n+1\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{3}$$

Figura 37. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3. 2 de la Sesión 3.

Evidentemente con esta actividad no se pretendía que los estudiantes pudieran calcular una expresión simple para cualquier sumatoria que se les presente, más bien, se pretendía que los estudiantes pudieran calcular expresiones simples para las sumatorias que van surgiendo en el proceso de realización de las actividades de esta secuencia y que estas expresiones sirvieran como herramienta para lograr en ellos la construcción y/o comprensión del concepto de integral definida. El aprendizaje que obtengan del proceso de calcular estas sumatorias es ganancia para ellos.

Luego de comprender el proceso para la primera suma, los estudiantes lograron, sin dificultad (Figura 39), desarrollar el proceso para calcular la suma de los cubos de los primeros "n" números naturales (inciso b, actividad 3.2, sesión 3).

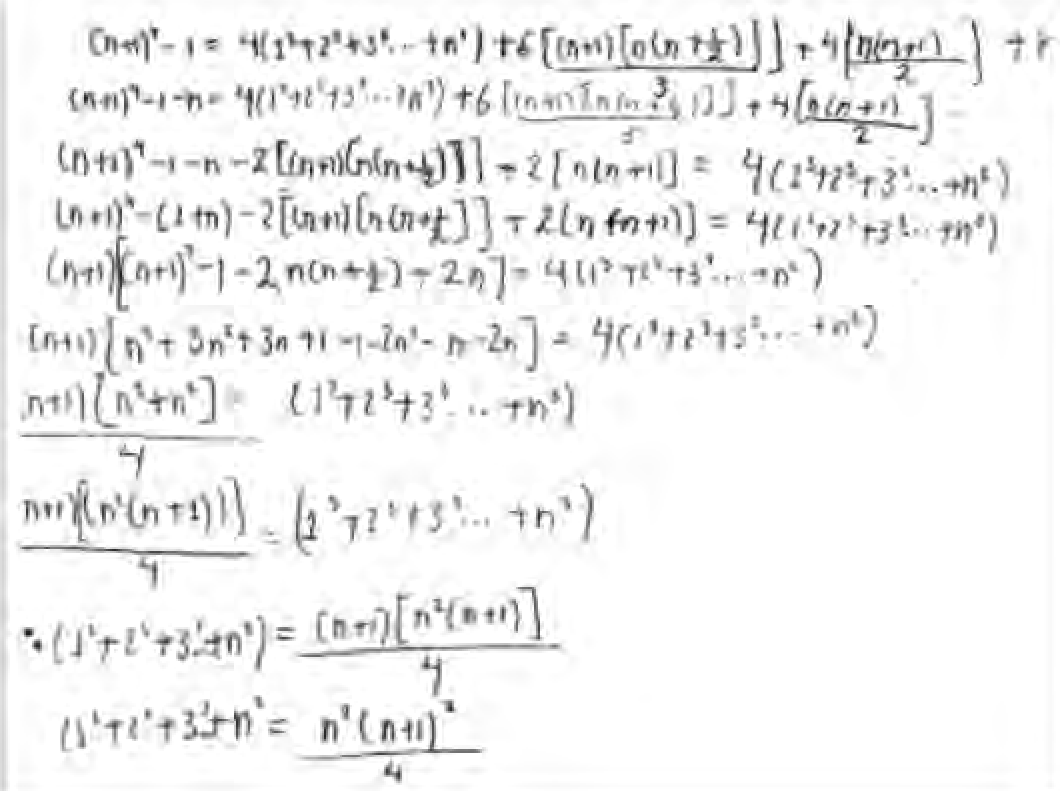


Figura 38. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3. 2 de la Sesión 3.

En esta última actividad vemos claramente que los estudiantes comprendieron y aprendieron el proceso para calcular sumatorias cuando se trata de sumatorias involucrando una potencia entera de los números naturales.

Actividad 3.3 (Anexo A) Con esta actividad se pretendía que los estudiantes aprendieran y/o comprendieran la estrategia (ley de los grandes números) para el análisis del comportamiento de funciones de la forma: $f(n) = an + b$, definida en los naturales, para "valores muy grandes" y para "valores infinitamente grandes" de "n". Esta actividad es importante, les permitirá predecir el comportamiento de las sumatorias cuando "n" toma valores cada vez más grandes, tal como ocurrió en la actividad 3.2 de esta sesión.

En la figura 40, que es representativa de lo que hicieron todas las parejas, podemos observar que el estudiante (alumno 1, pareja 4) logró completar, sin problemas, las tablas en el primer inciso de esta actividad (inciso a, actividad 3. 3, sesión 3), en las que se les pide evaluar las expresiones "$an + b$" y "an", para distintos valores de "n", también logró responder sin dificultad para qué valores de "n" las expresiones "$an + b$" y "an" son parecidas (incisos b, actividad 3.3, sesión 3)

Valores muy grandes de n:

n	600	200000	30000000	400000000	5000000000
$an + b$	1201	400001	60000001	800000001	10000000001
an	1200	400000	60000000	800000000	10000000000

Valores "infinitamente grandes" de n:

n	$2x10^{100}$	$3x10^{1000}$	$4x10^{10000}$	$5x10^{[illegible]}$	$8x10^{[illegible]}$
$an + b$	$4x10^{[illegible]}$	$6x10^{[illegible]}$	$8x10^{[illegible]}$	$10x10^{[illegible]}$	$16x10^{[illegible]}$
an	$4x10^{[illegible]}$	$6x10^{[illegible]}$	$8x10^{[illegible]}$	$10x10^{[illegible]}$	$16x10^{[illegible]}$

Figura 39. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3. 3 de la Sesión 3.

Sin embargo, cuando las parejas tuvieron que indicar el comportamiento de esas expresiones para valores infinitamente grandes de "n", no lograban comprender por qué las expresiones se pueden considerar como iguales.

Alumno 1 (Pareja 3): Profesor, ¿también para valores infinitamente grandes los resultados son parecidos?

Profesor: Imaginen dos reglas colocadas de forma paralelas una junto a la otra y que la longitud de una es un metro y la otra que era de un metro se ha reducido en un milímetro. ¿Qué concluiría una persona que vea las reglas juntas sin saber que a una de ellas se le ha quitado un milímetro?

Alumno 1 (Pareja 5): Pensaría que tienen la misma longitud.

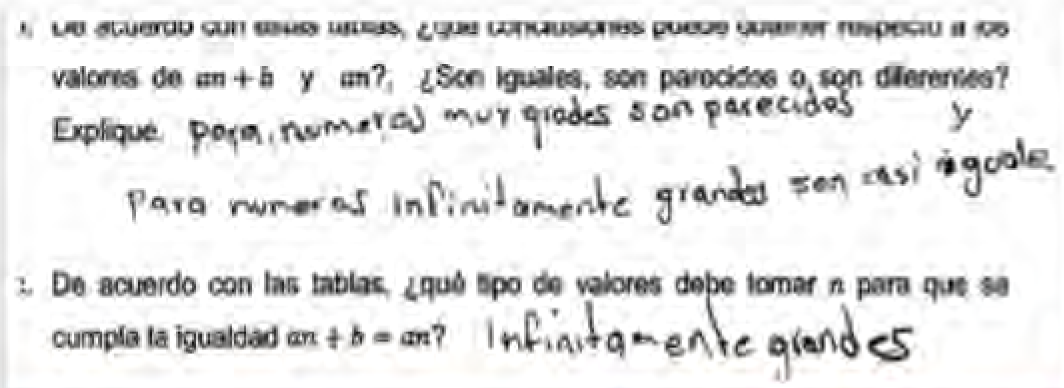
Profesor: Lo mismo pasa con las cantidades infinitamente grandes cuando tienen una diferencia imperceptible entre ellas, las vemos casi iguales.

Alumno 1 (Pareja 3): Entonces, si quitamos o agregamos una cantidad insignificante siguen siendo casi iguales.

Profesor: Todos comprenden lo que dijo José Luis

Alumnos: Si profe

Fue después de este refinamiento de ideas que todos los estudiantes lograron comprender y aprender (Figura 41) cuál es el tipo de relación que existe entre las expresiones dadas para cantidades infinitamente grandes (inciso c, actividad 3.3, sesión 3)


c. De acuerdo con estas ideas, ¿qué conclusiones puede obtener respecto a los valores de $an + b$ y an?, ¿Son iguales, son parecidos o son diferentes? Explique. para numeros muy grades son parecidos y para numeros infinitamente grandes son casi iguale

d. De acuerdo con las tablas, ¿qué tipo de valores debe tomar n para que se cumpla la igualdad $an + b = an$? Infinitamente grandes

Figura 40.Respuesta, respuesta representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3. 3 de la Sesión 3.

En esta actividad los estudiantes aprendieron que dependiendo de la magnitud de las cantidades, éstas pueden ser consideradas como parecidas o iguales, sin embargo fue necesario hacer un refinamiento de sus formas de pensar dado que no lograban comprender por qué en algunos casos podían considerarse como iguales. Esta comprensión también les permite deducir en qué casos las expresiones simbólicas $an + b$ y an son iguales y por lo tanto poder sustituir una por la otra sin problemas para transformar otras expresiones.

Actividad 3.4 (Anexo A) tomando como base lo aprendido en la actividad anterior (actividad 3.3, sesión 3) y bajo las condiciones establecidas en ella, con esta actividad se pretendía que los estudiantes proporcionaran expresiones más simples, que sean equivalentes a las que se presentan en una tabla de la misma y al mismo tiempo evaluar la comprensión de la actividad anterior de esta sesión.

En la Figura 42 podemos observar que las dos primeras expresiones en la tabla (actividad 3.4, sesión 3), estaban expresadas en factores de la forma $(an + b)$, con la ayuda del análisis hecho anteriormente (actividad 3.3, sesión 3), para estos factores, los estudiantes lograron determinar expresiones simples que fueran equivalentes a las dadas, pero dudaron a la hora de intentar proporcionar una expresión más simple para la tercera expresión de la tabla, dado que se trataba de una suma, sin embargo cuando recordaron que la suma la habían hecho anteriormente (actividad 3.2, sesión 3), y la habían expresado en factores de la forma $(an + b)$, también lograron obtener la expresión deseada.

Expresión	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$
Exp.Equiv.	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{2n^3}{6}$	$\frac{n^4}{4}$

Figura 41. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 4) de Ingeniería en Sistemas de Energía Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 3.4 de la Sesión 3.

Podemos observar claramente en esta actividad que los estudiantes aprendieron que con las condiciones establecidas en la ley de los grandes números ellos pueden ir cambiando los factores de la forma $an + b$ por factores de la forma an, y obtener una expresión simple a partir de una expresión compleja expresada en factores. También aprendieron que cuando las sumatorias pueden ser expresadas en factores de forma adecuada también pueden entrar en el dominio de dicha ley.

Tabla 3. Logros alcanzados por los estudiantes en la sesión 3.

Parejas	Observaciones
1, 2, 3, 4 y 5	Construyeron rectángulos sobre la partición e inscritos en un triángulo. Determinaron la base y altura de los rectángulos. Calcularon el área de los rectángulos. Escribieron la suma de área de rectángulos. Emplearon notación en sus procesos. Analizaron un proceso algebraico para calcular la suma de los primeros “n” números naturales. Aplicaron el proceso para calcular la suma de los cuadrados de los primeros “n” números naturales. Calcularon la suma de los cubos de los primeros “n” números naturales. Compararon dos expresiones lineales para diferentes valores entero. Dedujeron el comportamiento de las expresiones para valores enteros grandes y muy grandes.

	Escribieron expresiones equivalentes a expresiones expresadas como producto de factores lineales y regidos bajo la ley de los grandes números.
1, 2, 3, 4 y 5	Dificultades para escribir de forma general la partición de un intervalo, dificultades para obtener el límite de la suma de áreas, dificultades para simplificar expresiones, dificultades al trabajar con la ley de los grandes números.

4.3.4. Análisis de actividades de la sesión 4

Llegados a la sesión 4 los alumnos reconocieron sus parejas de trabajo, se les entregó la lista de actividades, posteriormente se explicó el contenido y el objetivo de realizar las actividades. También se les pidió revisar las declaraciones (texto que acompaña la actividad) hechas en las mismas a fin de detectar posibles dudas o impedimentos para su realización.

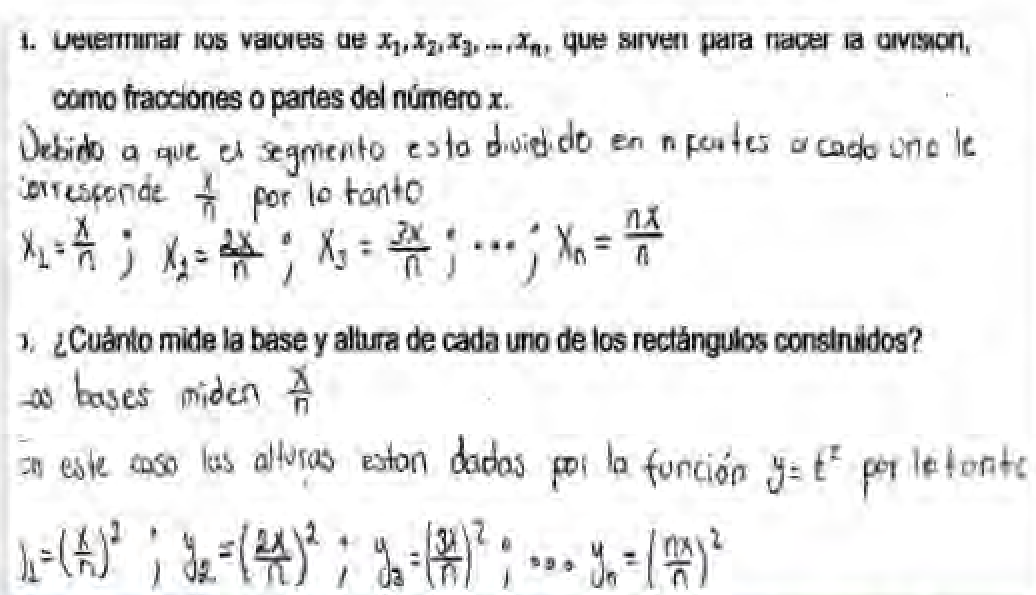
Actividad 4.1 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía, a modo de evaluación, que los estudiantes desarrollaran el concepto de integral definida para calcular el área limitada por la curva $y = t^2$, y el eje de las abscisas, sobre el intervalo $[0, x]$. También se pretende que los estudiantes refuercen el uso de la notación para representar los procesos que se van realizando y que les permitirán identificar la expresión general del proceso a realizar en cualquier otro caso y que llamamos integral definida. Esta actividad es la que determina si los estudiantes comprendieron y aprendieron el concepto de integral definida.

Al iniciar con las actividades los alumnos reconocieron que la primera actividad era parecida a una de las actividades en la sesión anterior (Actividad 3.3 de la sesión 3), por lo que todas la parejas lograron, sin dificultad, determinar los números que sirven para hacer la división del intervalo de $(0,\ x)$ (inciso a, actividad 4.1, sesión 4), esto es, los estudiantes lograron sin dificultad establecer la partición del intervalo dado, dejando claro que han comprendido este proceso que habían venido aprendiendo en las actividades anteriores (Figura 43).

También, por similitud a lo aprendido anteriormente, lograron determinar la medida de la base de cada uno de los rectángulos verticales formados, pero cuando tuvieron que determinar la altura de los rectángulos, (inciso b, actividad 4.1, sesión 4), una de las parejas mostro dificultades (Pareja 5), que fue externada con preguntas como la siguiente:

> Alumno 1 (Pareja 5): ¿Cómo sabemos cuál es la altura de los rectángulos?
>
> Profesor: Observen que uno de los vértices del rectángulo queda sobre la línea curva, ¿cómo podemos obtener su coordenada?
>
> Alumno 1 (Pareja 5): Ya entendí, la altura es la coordenada "y". Sólo debemos sustituir en la función la "x" del vértice.

Ante esta dificultad fue necesario refinar en los estudiantes sus formas de analizar las gráficas y construcciones sobre ellas. Algunas veces fue necesario observar la gráfica y construcciones como un todo y en otras ocasiones se debe enfocar en observar una pequeña porción de la gráfica o la construcción o de ambas. De esta forma podemos establecer claramente lo que debemos calcular y como lograrlo.


a. Determinar los valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que sirven para hacer la división, como fracciones o partes del número x.

Debido a que el segmento esta dividido en n partes a cada uno le corresponde $\frac{x}{n}$ por lo tanto

$X_1 = \frac{X}{n}$; $X_2 = \frac{2X}{n}$; $X_3 = \frac{3X}{n}$; ... ; $X_n = \frac{nX}{n}$

b. ¿Cuánto mide la base y altura de cada uno de los rectángulos construidos?

Las bases miden $\frac{X}{n}$

En este caso las alturas estan dadas por la función $y = t^2$ por lo tanto

$y_1 = \left(\frac{X}{n}\right)^2$; $y_2 = \left(\frac{2X}{n}\right)^2$; $y_3 = \left(\frac{3X}{n}\right)^2$; ... $y_n = \left(\frac{nX}{n}\right)^2$

Figura 42. Respuesta representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (Pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 4.1 de la Sesión 4.

Luego de determinar las alturas, también lograron calcular las áreas de los rectángulos verticales (figura 44), así como la suma de áreas (inciso c, actividad 4.1, sesión 4).


c. Calcula el área de los rectángulos y la suma de dichas áreas.

El área de un rectángulo está dado por $S=b*h$ donde b=base y h=altura

por lo tanto

$S_1 = \frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{x^3}{n^3}$

$S_2 = \frac{x}{n}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 = 4\frac{x^3}{n^3}$

$S_3 = \frac{x}{n}\left(\frac{3x}{n}\right)^2 = 9\frac{x^3}{n^3}$

$\vdots$

$S_n = \frac{x}{n}\left(\frac{nx}{n}\right)^2 = n^2\frac{x^3}{n^3}$

Luego

$S_{total} = \frac{x^3}{n^3} + 4\frac{x^3}{n^3} + 9\frac{x^3}{n^3} + \dots + n^2\frac{x^3}{n^3}$

Figura 43. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (Pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 4.1 de la Sesión 4.

Simplificaron esta suma de áreas (Figura 45), hasta expresarla en factores de la forma $an + b$, con lo que finalmente, por analogía con lo aprendido en la última actividad de la sesión 3, lograron determinar una expresión simple para calcular el límite de la sumas de áreas (inciso d, actividad 4.1, sesión 4), así como utilizar una notación para sus operaciones (inciso e, actividad 4.1, sesión 4).

Reconocemos en este proceso de solución, que los estudiantes han comprendido y aprendido el proceso de integral definida para calcular el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $y = t^2$ y el eje de las abscisas. Que son capaces de utilizar una notación que para ellos tiene sentido, aunque no sea la notación convencional.

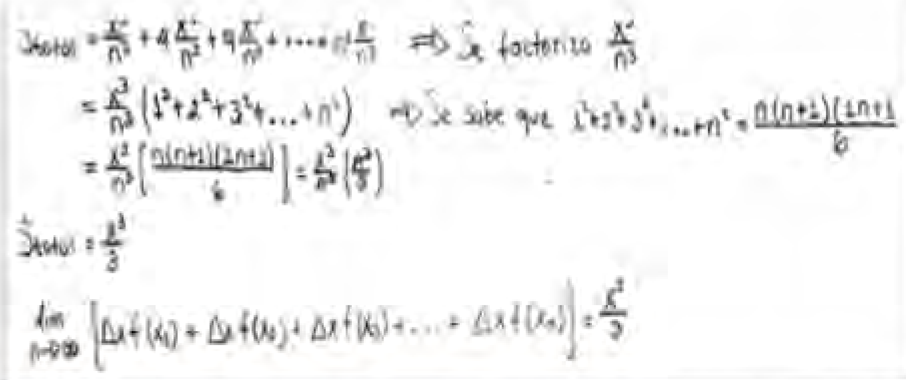


Figura 44. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 2 (Pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 1 de la Sesión 4.

Actividad 4.2 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía que los estudiantes comprendan y/o aprendan que puede eliminar la limitante de utilizar el proceso de integral definida sólo para funciones positivas y en el primer cuadrante del plano coordenado. Para ello debían analizar los cambios que ocurren en el área cuando reflejan una región sobre el eje positivo de las abscisas.

En esta actividad, en la que los estudiantes trabajaron con la curva $y = t^2$, reflejada sobre el eje de las abscisas, todas las parejas lograron dibujar la curva reflejada, establecer la función que describe esta curva reflejada y determinar el área limitada por el eje de las abscisas y la curva reflejada (Figura 46). También lograron expresar el área con la notación convencional.

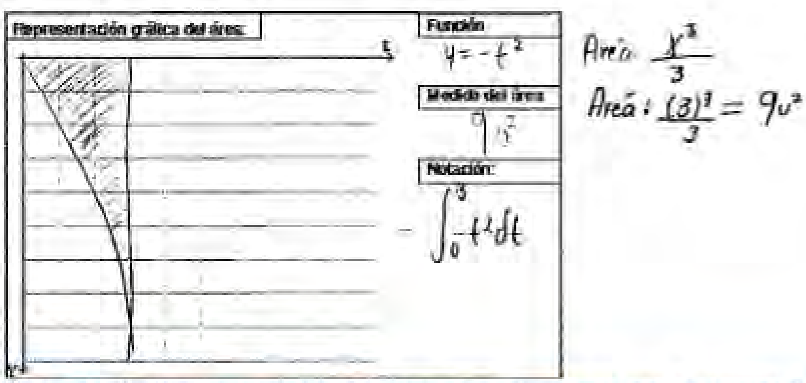


Figura 45. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 4.2 de la Sesión 4.

En la Figura 46, representativa de las respuestas de los estudiantes, podemos observar que el estudiante (alumno1, pareja 5) aprendió que cuando la curva se refleja sobre el eje de las abscisas, la función que describe la curva reflejada es el negativo de la función original y la región que limitan, la curva reflejada y el eje de las abscisas, tiene la misma área que la región sin reflejar pero afectada por un signo negativo.

Actividad 4.3 (Anexo A), Con esta actividad se pretendía que los estudiantes continuaran analizando los cambios que ocurren con el área limitada por la gráfica de una función y el eje positivo de las abscisas cuando se aplican transformaciones sobre dicha gráfica. En este caso se trataba de una traslación vertical hacia arriba en la que ellos debían analizar cómo este cambio afecta al área.

Todas las parejas lograron dibujar la curva trasladada, pero a la hora de establecer la función que describe esta curva reflejada todas las parejas presentaron dificultades, algunas porque no recordaban y otras porque no habían visto el tema, hubo la necesidad entonces de hacer una breve presentación, para todos, del tema (traslación vertical y horizontal principalmente), y como obtener la función de la curva transformada. Luego de superar estas dificultades los estudiantes lograron determinar la función de la curva trasladada (Figura 47).

Cuando intentaron calcular el área de la región limitada por la curva trasladada y el eje de las abscisas, los estudiantes observaron que hubo un aumento del área en la parte inferior por lo que preguntaron:

> Alumno 1 (Pareja 2): Profe,…, ¿tenemos que hacer la suma de áreas de rectángulos para esta función?
>
> Profesor: Recuerden las estrategias que aplicaron cuando calcularon el área de polígonos regulares.
>
> Alumno 1 (Pareja 3): Dividimos los polígonos en triángulos,…, aquí aumentó un rectángulo por abajo.
>
> Alumno 1 (Pareja 2): Entonces podemos sumar el área del rectángulo con el área sin trasladarla.
>
> Profesor: ¿Queda claro para todos?
>
> Alumnos: Siiiii.

Finalmente todos los estudiantes lograron representar el área con la notación convencional.

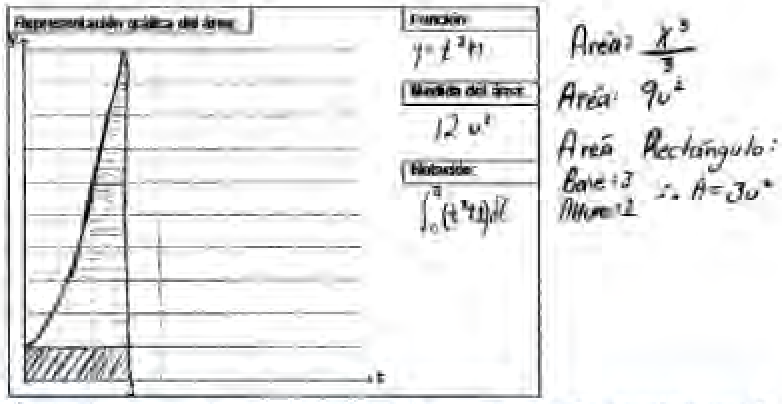


Figura 46. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 4.3 de la Sesión 4.

En esta actividad hubo la necesidad de que los estudiantes recordaran conocimientos olvidados o no aprendidos para que lograran responder las cuestiones que se planteaban, sin embargo, vemos que la elección de las figuras para aplicar la estrategia de obtener el área como suma de áreas, fue establecida sin dificultad. Esto indica que para aplicar dicha estrategia los estudiantes son capaces de elegir las figuras que convengan a sus necesidades no solamente cuadrados o rectángulos.

Actividad 4.4 (Anexo A). Con esta actividad se pretendía verificar que los estudiantes comprendieron la actividad anterior, para lo cual debían poder dibujar la curva trasladada en una unidad hacia arriba y una unidad hacia la derecha, debían obtener también la función de la curva trasladada, el intervalo sobre el eje de las abscisas en que queda la región y el área de dicha región, así como representarla con la notación convencional.

Podemos observar en la figura 48 representativa de lo que hicieron todas las parejas, que el estudiante (alumno 1, pareja 5) logró dibujar la curva trasladada y obtener la función para ésta, también logró identificar el intervalo sobre el que queda la curva trasladada, así como identificar que el área era la misma que en la actividad anterior y emplearon la notación para representarla.

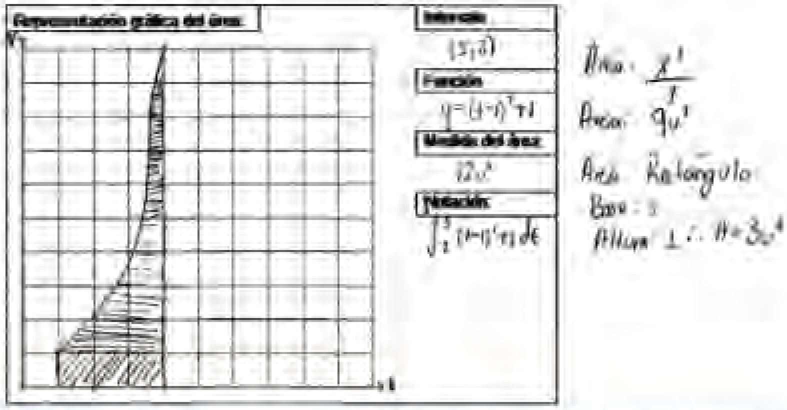


Figura 47. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 4.4 de la Sesión 4.

Los procesos de solución, para las actividades de esta sesión, indican que los estudiantes son capaces de calcular el área de una región plana limitada por la gráfica de una función y el eje de las abscisas, así como de obtener dicha área cuando se trata de una región limitada por las transformaciones aplicadas a la gráfica de la función y el eje de las abscisas, particularmente cuando se trata de funciones potencias.

Tabla 4. Logros alcanzados por los estudiantes en la sesión 4.

Parejas	Observaciones
1, 2, 3, 4 y 5	Calcularon en forma general los números que sirven para hacer la partición de un intervalo. Construyeron rectángulos sobre la partición, inscritos a una región limitada por la gráfica de la función cuadrática. Calcularon la base, altura y área de los rectángulos. Calcularon la suma de áreas de los rectángulos. Obtuvieron una expresión para la suma de áreas. Obtuvieron una expresión equivalente bajo la ley de los grandes números. Obtuvieron el área de la región. Utilizaron notación para sus operaciones. Dibujaron la traslación pedida de la región dada. Calcularon el área de la región trasladada.
5	Dificultades para obtener la altura de los rectángulos.
1, 2, 3, 4 y	Dificultades para obtener la función de la gráfica transformada

5	por traslación.

4.3.5. Análisis de actividades de la sesión 5

En la sesión 5, los alumnos se integraron en parejas, se les entrego la lista de actividades, posteriormente se explicó el contenido y el objetivo de realizar dichas actividades. También se les pidió revisar las declaraciones (texto que acompaña la actividad) hechas en las mismas a fin de detectar posibles dudas o impedimentos para su realización.

Actividad 5.1 (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes aprendieran identificar la cuadratura de la región plana limitada por la curva que describe la función $y = t^n$ y el eje de las abscisas, desde $t = 0$ hasta $t = x$, para cualquier entero positivo "n". Para ello debían completar una tabla con las áreas correspondientes a cada una de dichas funciones. Después de escribir los primeros valores en la tabla (calculados previamente), todas las parejas lograron identificar el patrón que siguen las cuadraturas pedidas para cada función potencia (Figura 49) y generalizarla para la potencian "n".

Función	$y = t$	$y = t^2$	$y = t^3$	$y = t^4$	—	$y = t^n$
Área	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	...	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Figura 48. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 5.1 de la Sesión 3.

Al lograr completar la tabla anterior (Figura 49), se está comprobando que los estudiantes comprendieron la mayoría de los procesos aprendidos en las sesiones anteriores y son capaces de realizarlos para calcular el área de cualquier función potencia que se les presente. Quizás también puedan emplearlo para otras funciones, con un poco de dificultades por las sumatorias que se obtengan, pero comprenden completamente el proceso de integral definida.

Actividad 5.2 (Anexo A), con esta actividad se pretendía que los estudiantes emplearan sus conocimientos de derivadas, para identificar que la derivada de la cuadratura vista como una función de "x", es la función de la que proviene dicha cuadratura (la integral es la inversa de la derivada), todo esto para las funciones potencias. También se pretendía que el estudiante expresara (en símbolos), la relación que existe entre la derivada y la integral.

Todas las parejas fueron escribiendo las áreas obtenidas en la actividad anterior (actividad 5.1, sesión 5), al mismo tiempo que fueron escribiendo la derivada de cada una de ellas (Figura 50). También en este caso reconocieron rápidamente el patrón que siguen estas derivadas: la derivada de las áreas es la función de la que proviene. También lograron escribir el símbolo para la relación entre la derivada e integral de funciones potencias.

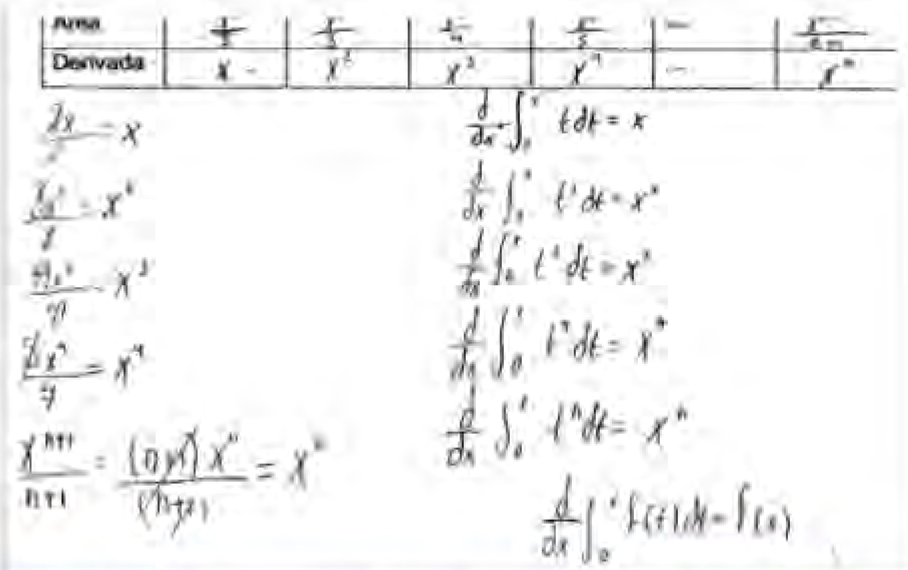


Figura 49. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 5.2 de la Sesión 5.

Aquí cabe mencionar que los estudiantes comprenden que esta relación se cumple cuando trabajan con funciones potencias y posiblemente la intuyan para otras funciones pero no todos los estudiantes podrían verificarla dado que la mayoría de ellos no ha tomado un curso de integrales.

Actividad 5.3 (Anexo A), con esta actividad (inciso a, actividad 5.3, sesión 5), se pretendía que los estudiantes aprendan y/o comprendan la relación que guardan la cuadratura de una suma de dos funciones potencias y la suma de las cuadraturas de cada función potencia, de donde deben deducir una importante propiedad de las integrales, al utilizar la notación de integral definida: la integral de una suma de funciones es igual a la suma de la integral de cada una de las funciones. Así mismo se pretendía que verificaran que las observaciones hechas en las actividades 5.1 y 5.2 de esta sesión (la integral es lo contrario de la derivada), también son válidas para esta suma de funciones potencias.

En la Figura 51, representativa de lo que hicieron los estudiantes, podemos observar que el estudiante (alumno 1, pareja 5) logró escribir el proceso de integral definida para determinar el área deseada, también logró observar que el resultado del área obtenida es el mismo que si hubieran sumado las áreas independientes de las funciones t y t^2. Finalmente con esta observación también logró establecer la propiedad esperada para la integral de una suma de funciones.

Figura 50. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 5) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 5.3 de la Sesión 5.

Finalmente derivaron el área obtenida (Figura 52) como una función de "x" logrando concluir que se obtiene la función que utilizaron para hacer los cálculos del área (inciso b, actividad 5.3, sesión 5).

Figura 51. Respuesta, representativa del grupo, propuesta por el alumno 1 (Pareja 3) de Ingeniería en Redes, para la Actividad 5.3 de la Sesión 5.

Lo anterior exhibe que los estudiantes aprendieron el proceso de integral definida puesto que lograron desarrollarlo sin dificultades para la suma de funciones presentadas. También aprendieron que el teorema fundamental del cálculo es válido para una suma de funciones potencias.

Actividad 5.4 (Anexo A), con esta actividad se pretendía evaluar el aprendizaje y comprensión de los estudiantes, para ello se propone una integral definida en forma de notación y deberán obtener el área que representa.

En la Figura 53, representativa de lo que hicieron los estudiantes, podemos observar que el estudiante (Alumno 1, pareja 1) supo reconocer la notación convencional de integral definida, además la interpretó y calculó como el área de la región limitada por la gráfica de la función dada y el eje de las abscisas desde 0 a 3. También utilizó propiedades, aprendidas en actividades anteriores, para expresar el área como una suma de áreas de funciones potencias, así como las cuadraturas deducidas para estas funciones y evitar reescribir todos los procesos requeridos para la integral definida.

Lo descrito muestra que los estudiantes han comprendido el proceso de integral definida para estas funciones y tienen idea del proceso a realizar en caso de aplicarlo a otro tipo de funciones.

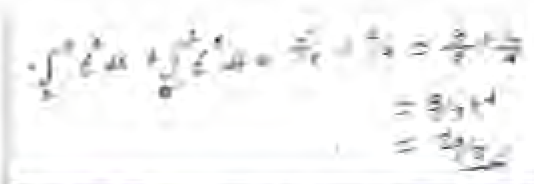


Figura 52. Respuesta, del alumno 1 (Pareja 1) de Ingeniería en Sistemas de Energía, para la Actividad 5.4 de la Sesión 5.

Tabla 5. Logros alcanzados por los estudiantes y dificultades encontradas en la sesión 5.

Parejas	Observaciones
1, 2, 3, 4 y 5	Escribieron el proceso de integral definida para la suma de dos funciones potencias. Generalizaron la expresión del área para cualquier función potencia. Calcularon la derivada de las áreas. Escribieron la relación entre la derivada del área y la función de la curva que limita el área. Identificaron la propiedad de la suma en la integral definida para las funciones potencias. Identificaron como el mismo objeto el símbolo para representar integral y el área de la región acotada por una función.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados descritos en el capítulo 4, puedo decir que se logró el propósito principal de la secuencia didáctica: Los estudiantes desarrollaron su comprensión del concepto de integral definida. Esto se hace evidente a partir de las respuestas proporcionadas para cada una de las actividades, en particular las que se presentaron para las últimas actividades, que muestran la integración de conceptos y métodos.

A partir del análisis de los resultados plasmados por los estudiantes en cada una de las sesiones, podemos corroborar que la mayoría de ellos lograron comprensión y apropiación del concepto de integral definida en el contexto del área. Inicialmente, los estudiantes mostraron algunas debilidades en cuanto a su conocimiento de procesos para obtener el área de regiones planas limitadas por curvas, por ejemplo: desconocimiento de estrategias para obtener el área de regiones limitadas por curva. (Actividad 1, sesión 2); poca habilidad en el uso de la factorización para simplificar las expresiones obtenidas en las sumatorias (Actividad 3.1 y 3.2, sesión 3); dificultades para obtener las fracciones del total que representan cada una de las subdivisiones obtenidas en la partición de un intervalo (Actividad 3.1, sesión 3); dificultades para obtener la función que describe la curva obtenida al aplicar una transformación a la gráfica de una función (Actividad 4.3 y 4.4, sesión 4). Todas estas debilidades se fueron corrigiendo durante el proceso de implementación de la secuencia de manera que la comprensión y conocimiento de los estudiantes fue cambiando al mismo tiempo que se fueron apropiando del nuevo conocimiento. En las últimas actividades podemos observar que los estudiantes pudieron realizar los mismos procesos sin presentar debilidades.

En general se puede decir que el actitud de la mayoría de los estudiantes fue positiva, mostraron disposición para realizar las actividades, lograron recordar conceptos y aprender conceptos que no conocían, así como utilizar los conocimientos previos y estrategias que son importantes para lograr la comprensión del concepto de integral definida, tales como la estimación del área de regiones planas limitadas por curvas y la estrategia de inscribir o cubrir una región plana con polígonos regulares o irregulares para obtener aproximaciones del área.

En la segunda sesión podemos ver la transferencia del conocimiento previo, calcular el área de polígonos regulares por medio de inscribir triángulos, cuando algunos estudiantes inscriben círculos o utilizan una cuadricula para indicar como calcular una aproximación del área de una región plana limitada por una curva, en la cual no se cuenta con medidas y después de compartir sus ideas con los demás estudiantes todos logran hacerlo para otra región similar en la que cuentan con medidas. Esta transferencia también podemos observarla cuando construyen rectángulos, que en conjunto podemos ver como un polígono inscrito en la región o que cubre la región, para aproximar el área de regiones planas limitadas por la gráfica de una función y el eje de las abscisas.

Es evidente que no se volvieron expertos para calcular sumatorias de cantidades pero son capaces de plantear y calcular las sumatorias de potencias enteras de los primeros “n” números naturales, que fueron de utilidad en las actividades posteriores, obteniendo expresiones para ellas y aprendiendo a simplificarlas.

Podemos observar que, durante su proceso de desarrollo, los estudiantes utilizan notaciones que son construidas de acuerdo a su entendimiento, y también pueden desarrollar su habilidad para utilizar las representaciones convencionales.

En cuanto al contenido de las actividades que conforman la secuencia se puede decir que el uso de un contexto conocido para los estudiantes (medición del área), les permitió utilizar sus conocimientos previos, enriquecerlos y tomarlos como base para generar, comprender y aprender los nuevos conceptos y procesos que fueron surgiendo durante la realización de las actividades. También propició que los estudiantes pudieran identificar las relaciones que pueden establecerse entre los conceptos y operaciones matemáticas involucradas, y a partir de ellas obtener procedimientos generales para calcular el área de figuras planas limitadas por curvas (concepto de integral definida).

El orden de las actividades contribuyó para que los estudiantes se aproximaran de forma inductiva al conocimiento. En este sentido las actividades iniciales abordaron casos sencillos para generar ciclos de comprensión en los estudiantes y permitirles avanzar hacia situaciones complejas (Lesh & Doerr, 2003). Por ejemplo, se inició calculando el área de polígonos regulares hasta lograr la generalización y luego se les planteo la situación de calcular el área para regiones limitadas por curvas. También se les planteó obtener la sumatoria de los primeros números naturales, reconociendo patrones geométricos, y posteriormente debían reconocer patrones algebraicos para obtener la suma de una potencia de los números naturales. Los procesos necesarios para realizar las actividades también fueron de complejidad creciente, y a medida que los estudiantes avanzaban fueron requiriendo del apoyo de los conocimientos abordados en las anteriores.

Uno de los aspectos importantes para que los estudiantes lograran un buen desempeño durante la realización de las actividades fue el trabajo en un ambiente de resolución de problemas. Ya que permitió a cada estudiante enfrentarse con las diversas situaciones que van surgiendo durante el proceso de construcción del concepto de integral definida. Los estudiantes pudieron observar como a partir de conocimientos elementales, el uso de estrategias y el reconocimiento de patrones, se pueden generar otros conocimientos o refinar los ya existentes.

El trabajo de colaboración en parejas y la discusión en grupo permitió a los estudiantes describir, explicar, comunicar, validar y argumentar sus procedimientos al momento de solucionar las situaciones. Los estudiantes fueron protagonistas de la generación de su propio conocimiento. Que los estudiantes repitieran los procesos de una actividad en la siguiente, aumentando el grado de dificultad en cada repetición, permitió que valoraran su propia comprensión y el aprendizaje de los mismos así como el refinamiento en sus formas de pensar (Lesh & Doerr, 2003).

Aunque no hay evidencia material disponible y dado que la implementación estuvo a mi cargo, puedo decir que el papel del docente fue muy importante para mantener un ambiente de resolución de problemas. Durante la implementación de las actividades el profesor jugó diferentes papeles. Promovió la participación activa de los estudiantes y la colaboración para trabajar en parejas y las discusiones de las respuestas en el grupo completo. Guío el trabajo de los estudiantes mediante la reflexión con preguntas para despejar sus dudas, expuso temas que los estudiantes habían olvidado o que desconocían. Promovió que los estudiantes evaluaran sus respuestas, sus argumentos y formas de trabajo durante el proceso, improvisando las preguntas que permitieran la reflexión.

5.2 Comentarios

De acuerdo con la perspectiva de modelos y modelación (Lesh & Doerr, 2003), el conocimiento matemático, y en general el conocimiento, son sistemas conceptuales que están en constante cambio. Esto aplica para el conocimiento que desarrolla una persona, esto es, el conocimiento de una persona está en constante cambio de acuerdo a la interacción de esta persona con el medio. Esto aplica para el conocimiento que desarrollan las personas en las escuelas. El conocimiento matemático que van desarrollando los estudiantes en los diferentes niveles educativos depende del tipo de experiencias que tenga. Al inicio sus conocimientos son aislados y pueden ser utilizados para abordar situaciones y problemas muy particulares. Conforme avanzan estos conocimientos deberían ser más integrados y ser útiles para analizar situaciones más complejas. Esto no sucede con los conocimientos relacionados con el concepto de área. Antes de abordar la integral definida los estudiantes tienen conocimientos limitados sobre el concepto de área. Solo manejan fórmulas para calcular el área de figuras regulares limitadas por rectas, no han desarrollado estrategias suficientes para calcular el área de figuras irregulares limitadas por recta, y menos para las figuras limitadas por curvas.

A partir de esta experiencia observé que hay aspectos relacionados con el concepto de área que pueden ser enseñados y aprendidos por los estudiantes en los niveles básico y medio superior. Por ejemplo: cálculo del área de figuras irregulares limitadas por rectas, de figuras limitadas por rectas y curvas, estrategias para calcular y estimar el área de figuras limitadas por rectas y curvas.

Desafortunadamente a medida que avanzamos en el nivel educativo estos conocimientos y estrategias se van rezagando, existiendo periodos en los que no hay ningún nuevo desarrollo. El tratamiento que se da al cálculo integral en el nivel medio superior enfatiza el uso de fórmulas para obtener la antiderivada de la función, no se aborda la integral definida como una estrategia y como herramienta para el cálculo de área y volumen.

El nivel de los conocimientos que sobre el área desarrollen los estudiantes en cada ciclo educativo estaría asociado con el tipo de problemas y de las herramientas métodos y estrategias que ellos utilizan para resolverlos.

5.3 Recomendaciones

Para usos posteriores de esta secuencia se recomienda que el profesor genere un ambiente de trabajo diferente al de los profesores tradicionales, un ambiente en el que sean las ideas de los estudiantes las que construyen el conocimiento, no la presentación de los temas por parte del profesor. Un ambiente en el que los estudiantes se sientan motivados a participar y tengan la oportunidad de expresar libremente sus formas de pensar e involucrarse con la generación de su conocimiento. Es importante que los profesores promuevan la resolución de problemas en el aula, dado que es una de las estrategias de enseñanza que permite a los estudiantes desarrollar sus propias ideas y se ve favorecido cuando el estudiante participa en colaboración con otros estudiantes dentro de grupos pequeños de trabajo.

Los profesores deben cambiar la percepción que los estudiantes tienen de ellos, como poseedores de todas las verdades y todo el conocimiento. En los estudiantes debe quedar la visión de que los conocimientos y verdades van surgiendo a partir de resolver problemas. Que al adaptar los procesos y las soluciones de problemas para resolver otras situaciones diferentes al problema de donde surgió el conocimiento van refinando y generando nuevos conocimientos.

Es recomendable también que los estudiantes trabajen las actividades con lápiz y papel y una calculadora de bolsillo, como herramienta tecnológica de apoyo que les permita simplificar las operaciones y validar sus resultados, de esta forma podrán identificar y comprender la manera en que utilizan sus conocimientos previos y los van combinando con otros conceptos, procesos y estrategias para generar el nuevo conocimiento. Se deja a elección del usuario de esta secuencia el incluir actividades en las que los estudiantes trabajen el concepto de integral definida con un ordenador en el que puedan apreciar la facilidad y menor tiempo con que se realizan los cálculos. En este caso también se recomienda utilizar funciones de mayor complejidad a las utilizadas en esta secuencia.

El uso del contexto de área en estas actividades fue motivado por el hecho de que es uno de los conceptos que los jóvenes estudian ampliamente antes de ingresar al nivel superior, por lo menos más que cualquier otro contexto desde el que se pueda abordar el concepto de integral definida. Este trabajo previo facilita a los estudiantes la rápida comprensión de los conceptos, procesos, estrategias y la forma en que se van combinando para lograr el concepto de integral definida. Con esto no queremos decir que el uso de esta secuencia deba ser estrictamente basada en ese contexto, al contrario deben de sentirse libres para utilizar el contexto que consideren adecuado y que considere el conocimiento de los estudiantes.

Finalmente en esta secuencia no se incluyeron actividades extras a modo de evaluación como ocurre en los cursos tradicionales, en donde al final de un conjunto de temas (Determinados por el profesor), se les presenta a los estudiantes una lista de actividades similares a las realizadas en clases y en un tiempo límite los estudiantes deben realizarlas. En la secuencia, realizar una actividad de la misma implicaba para los estudiantes haber comprendido la anterior, de lo contrario debían volver sobre sus pasos hasta lograr la comprensión. Esto es, las actividades permitían que los estudiantes evaluaran por sí mismos la comprensión y el aprendizaje logrado en su realización. No lograr la comprensión implicaba regresar a lo realizado para refinarla.

La forma y el orden en que fueron presentadas las actividades permitieron llevar acabo ese proceso de recabar información para poder emitir un juicio, sin embargo se deja a criterio personal de quien haga uso de esta secuencia de actividades el incluir o no actividades extras con propósitos de evaluación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana B. E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"* (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. pp. 111-114.

Aleksandrov, A.D. Kolmogorov, A.N. Laurentiev, M.A. et al. (1985). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, España: Alianza.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: *Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*. Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1. No. 1. 40-55.

Ímaz J. C. & Moreno A. Luis. (2009). *Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza*. Cinvestav -IPN, México D.F.

Collins, A. M. Greeno, J. G. y Resnick, L. B. (1996). *Cognition and Learning*. En David C. Berliner and Robert C. Calfee, (1996). *Handbook of Educational Psychology*. (pp. 15 – 46). Simon & Schuster Macmillan. New York.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Cantoral, R. (1993). *Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición*. Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. 1, 397 – 410.

División de Ciencias e Ingeniería. (2007). *Programa de Estudio de Matemáticas III*. Quintana Roo, México. UQRoo.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics*. 61, 103–131

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. (2003). *Programa de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral*. México. IPN.

Facultad de Ingeniería. (2008). *Programa de Curso Cálculo Diferencial e Integral*. Chihuahua, México. UACH.

División de Ciencias Básicas. (2003). *Programa de Curso Cálculo Integral*. México. UNAM.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, NJ.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días*. Alianza Editorial. Madrid.

Flores, A. (1997). *Soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos*. Miscelánea Matemática 26, 49-57.

Niss, M. (1982). *Metas como un reflejo de las necesidades de la sociedad*. Estudios en Educación Matemática. UNESCO.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México. Ed. Iberoamérica.

Santos, L. M. (2002). Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes. *Memorias del seminario nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Colombia, 151-165.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc.

Orton, A. (1979). *An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Cognitive Development Research in Science and Mathematics, 201-215.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Ed. Trillas.

Quezada, M. (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial* (Tesis de maestría). México: Cinvestav.

Tall, D. (1985). *Understanding the calculus*. Mathematics Teaching, 110, pp. 49-53.

Tall, D. (1986). *A graphical approach to integration*. Mathematics Teaching, 114, pp. 48-51.

Tall, D. (1991b). *The psychology of advanced mathematical thinking, en Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pp. 3-21.

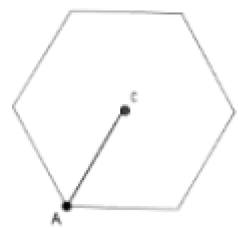
ANEXO A

SESIÓN 1

Análisis de estrategias y procesos utilizados al calcular el área de un polígono regular con un número "n" de lados.

Actividad 1.1.

En la siguiente figura suponga que el segmento AC mide 3cm de longitud.



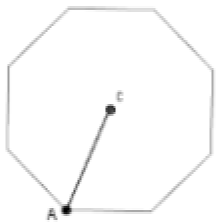
a. ¿De qué tipo de polígono regular se trata?
b. Si unimos el centro (C), del polígono con cada uno de sus vértices, ¿qué tipo de figuras geométricas elementales se forman en el interior del polígono?

   Tomemos una de estas figuras en las que ha quedado dividido el polígono inicial, colocando siempre como base el lado que corresponde al del polígono, para responder las preguntas (c) a (f):

c. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?
d. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?
e. ¿Cuánto mide su altura?
f. ¿Cuánto mide su área?
g. ¿Cuánto mide el área del polígono?

Actividad 1.2.

En la siguiente figura suponga que el segmento AC mide 3cm de longitud.



a. ¿De qué tipo de polígono regular se trata?
b. Si unimos el centro (c), del polígono con cada uno de sus vértices, ¿qué tipo de figuras geométricas elementales se forman en el interior del polígono?

   Tomemos una de estas figuras en las que ha quedado dividido el polígono inicial, colocando siempre como base el lado que corresponde al del polígono, para responder las preguntas (c) a (f):
c. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?
d. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?
e. ¿Cuánto mide su altura?
f. ¿Cuánto mide su área?
g. ¿Cuánto mide el área del polígono?

Actividad 1.3.

En esta actividad suponga que tenemos un polígono regular con “n” lados y, al igual que en las actividades anteriores, el segmento AC mide 3cm de longitud.

a. Si unimos el centro (c), del polígono con cada uno de sus vértices, ¿qué tipo de figuras geométricas elementales se forman en el interior del polígono?

   Tomemos una de estas figuras en las que ha quedado dividido el polígono inicial, colocando siempre como base el lado que corresponde al del polígono, para responder las preguntas de (b) a (e):
b. ¿Cuánto mide el ángulo interior opuesto a la base, en función del número de lados “n”?
c. ¿Cuánto mide su base, en función del número de lados “n”?

d. ¿Cuánto mide su altura, en función del número de lados “n”?
e. ¿Cuánto mide su área en función del número de lados “n”?
f. ¿Cuánto mide el área del polígono regular en función del número de lados “n”?

Actividad 1.4.
Tomando como base la actividad anterior:

a. Complete el espacio vacío, en la parte inferior de la tabla a continuación, con el área que corresponde al polígono regular cuyo número de lados aparece en la parte superior de la misma.

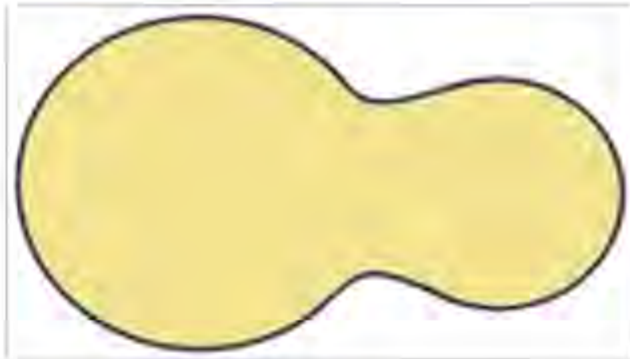
n	6	8	50	100	1000
$Área$					

b. Al aumentar el número de lados en el polígono regular, éste se va deformando hasta transformarse en otra figura. ¿Cuál es la forma final que toma la deformación de los polígonos para un número muy grande (infinito) de lados?

c. Si en la tabla proponemos valores muy grandes (infinito) de n, ¿qué ocurre con el área? Si aumenta indefinidamente, explique ¿Por qué? o si tiene un valor final, explique ¿por qué? y, ¿cuál sería su valor final?

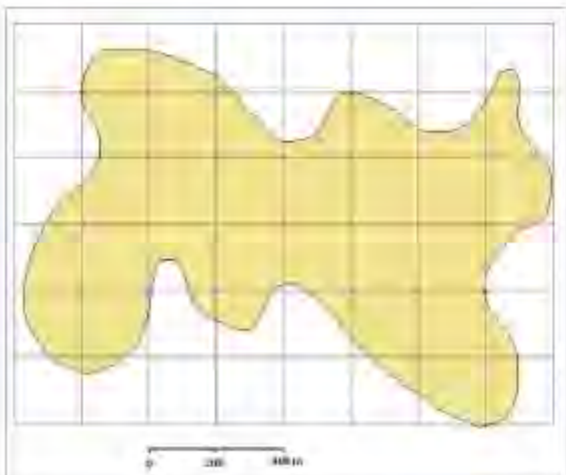
SESIÓN 2
Descubriendo o recordando estrategias que permiten aproximar y/o calcular el área de regiones limitadas por curvas, así como configuración de patrones geométricos que conducen a procesos algebraicos para calcular dichas áreas.

Actividad 2.1.
¿Conoce alguna fórmula con la que podamos calcular el área de la figura plana que se muestra a continuación? Explique ¿Cómo podemos calcular el área de esta figura o qué necesitamos para calcularla?



Actividad 2.2.

Para esta actividad consideremos la región plana sombreada, limitada por una línea curva que se muestra en la figura:



a) ¿Conoce alguna fórmula que permita calcular el área de la figura plana dada?

b) Dado que es complicado medir el valor exacto de dicha área, proporcione dos estimaciones de la misma, una que sea mayor y la otra menor que el valor real del área.

c) Proporcione otras dos estimaciones, una menor y otra mayor, al área de la región plana, pero que sean más próximas al valor real de misma que las obtenidas en el inciso b).

d) ¿Cuál es la diferencia entre las estimaciones obtenidas en el inciso b? ¿y entre las obtenidas en el inciso c? ¿Cómo interpreta estos resultados?

e) ¿Es posible obtener otras estimaciones que sean aún más próximas, a la medida real del área, que las obtenidas en los incisos anteriores? Explique brevemente como.

Actividad 2.3.

Suponer que cada uno de los tres cuadrados mostrados en la figura está subdividido en cuadrados de $1 \times 1\ \mathrm{cm}^2$ (cuadrados unitarios).

a. Complete la información pedida, en la siguiente tabla, con el objeto de calcular el área de la parte sombreada en cada cuadrado.

Dato	1erCuadrado	2°Cuadrado	3er Cuadrado	Generalización
N° de cuadros en el lado del cuadrado.				n
Área obscura debajo de la diagonal				
Área obscura sobre la diagonal				
Suma de áreas obscura bajo y sobre la diagonal				

b. Partiendo de estos resultados y contando el número de cuadrados unitarios que contienen los rectángulos verticales, de base unitaria, que configuran el área sombreada en cada uno de los tres cuadrados, calcule la suma:

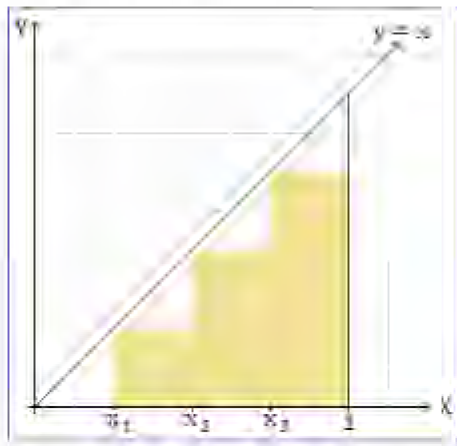
$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$?

c. Generalizar la suma para cualquier valor n

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

Actividad 2.4.

El segmento de "0 a 1", en el eje X, se divide en cuatro partes iguales y, sobre estas partes, tomadas como bases, se construyen rectángulos verticales inscritos a un triángulo tal como se muestra en la figura.



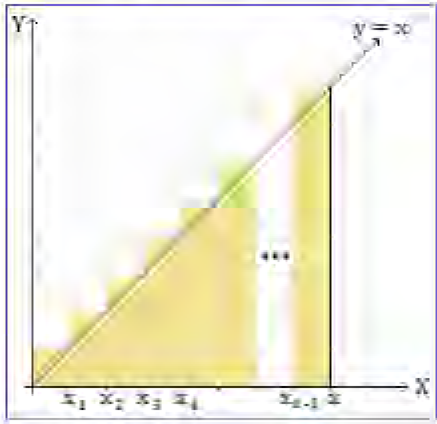
a. Determinar los valores x_1, x_2, x_3 como fracciones o partes de la unidad, que sirven para hacer la división del intervalo $(0, 1)$.
b. ¿Cuánto mide la base y altura de cada uno de los rectángulos sombreados cuyas bases descansan sobre las divisiones hechas en el inciso anterior?
c. Calcula el área de los rectángulos y la suma de dichas áreas.
d. Si las bases y alturas de los rectángulos las representamos como Δx y $f(x_i)$, respectivamente, $i = 1, 2, 3$, con esta notación, ¿cómo queda representada la suma de áreas?
e. ¿Qué relación hay entre la suma de áreas obtenida y el área del triángulo? ¿Son Iguales, una menor o mayor que la otra?

SECCIÓN 3

Generalizando algunos procesos aprendidos en las sesiones anteriores para casos muy específicos que facilitan la comprensión de los estudiantes.

Actividad 3.1.

Como generalización de la actividad 2, ahora supongamos que la base del triángulo tiene longitud "x", y dividamos el segmento de 0 a "x", sobre el eje X, en n partes iguales y, sobre estas partes, tomadas como bases, construyamos los rectángulos verticales de menor área que cubran al triángulo:



a. Determinar los valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que sirven para hacer la división del intervalo $(0 : x)$, como fracciones o partes del número x.
b. ¿Cuánto mide la base y altura de cada uno de los rectángulos sombreados, cuyas bases descansan sobre las divisiones hechas en el inciso anterior?
c. Calcula el área de los rectángulos y la suma de dichas áreas.
d. ¿Qué ocurre con la suma cuando "n" toma valores cada vez más grandes, es decir, cuál es su límite?
e. Si las bases y alturas de los rectángulos se representan con los símbolos Δx y $f(x_i)$, respectivamente, $i = 1,2,3, \ldots, n$, con esta notación, ¿cómo se representa la suma de áreas y su límite?

Actividad 3.2.
En la actividad 1 se observó geométricamente que la suma
$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$, se puede calcular como:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Un procedimiento algebraico que puede utilizarse para realizar dicha suma es el siguiente:
Del álgebra conocemos que se cumple la identidad:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Esta expresión se puede reescribir como:

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

Asignando valores a k desde $k = 1$ hasta $k = n$ se obtienen las igualdades:

$$\begin{array}{ll} k = 1, & (2)^2 - 1^2 = 2(1) + 1 \\ k = 2, & (3)^2 - 2^2 = 2(2) + 1 \\ k = 3, & (4)^2 - 3^2 = 2(3) + 1 \\ \vdots & \vdots \\ k = n, & (n+1)^2 - n^2 = 2(n) + 1 \end{array}$$

Sumando los miembros correspondientes de estas igualdades se tiene:

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n(1)$$

Que también se puede escribir como:

$$(n+1)^2 - n - 1 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

Factorizando queda:

$$(n+1)[(n+1) - 1] = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

Finalmente simplificando y dividiendo por 2 queda:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a. Escriba un procedimiento similar al descrito en el ejemplo, para calcular la suma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. [Sugerencia: utilizar $(k+1)^3$]

b. Escriba un procedimiento similar al descrito en el ejemplo para calcular la suma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$. [Sugerencia: utilizar $(k+1)^4$]

Actividad 3.3.

a. Complete las siguientes tablas, para determinar el comportamiento de la expresión $\mathrm{an} + \mathrm{b}$, cuando n toma valores "muy grandes" y predecir el comportamiento de dicha expresión cuando n toma valores "infinitamente grandes". Por simplicidad suponga que $a = 2$ y $b = 1$.

Valores "muy grandes" de n:

n	600	200000	30000000	400000000	50000000000
$an + b$					
an					

Valores "infinitamente grandes" de n:

n	$2x10^{100}$	$3x10^{1000}$	$4x10^{10000}$	$5x10^{100000000}$	$8x10^{100000000000}$
$an + b$					
an					

b. De acuerdo con estas tablas, ¿qué conclusiones puede obtener respecto a los valores de $an + b$ y an?, ¿Son iguales, son parecidos o son diferentes? Explique.

c. De acuerdo con las tablas, ¿qué tipo de valores debe tomar n para que se cumpla la igualdad $an + b = an$?

Actividad 3.4.

Tomando como base la actividad anterior, en la siguiente tabla complete el espacio en blanco, en la parte inferior de la misma, con la expresión equivalente a la dada en la parte superior, cuando n toma valores "infinitamente grandes"

Expresión	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$
Exp. Equiv.			

SESIÓN 4
Sumas inferiores, sumas superiores, concepto de integral definida.

Actividad 4.1.
Elaborar un procedimiento similar al realizado en la actividad 1 de la tercera sesión, para calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = t^2$, el eje positivo de las abscisas, desde "$t = 0$ hasta $t = x$".

a. Determinar los valores de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, que sirven para hacer la división del intervalo $(0 : x)$, como fracciones o partes del número x.

b. ¿Cuánto mide la base y altura de cada uno de los rectángulos sombreados, cuyas bases descansan sobre las divisiones hechas en el inciso anterior?

c. Calcular el área de los rectángulos y la suma de dichas áreas.

d. Emplear las ideas de la actividad 3 y 4 en la sesión 3 para proponer una expresión equivalente a la suma de áreas obtenidas en el inciso anterior y analizar hacia donde se aproxima cundo "n" toma valores infinitamente grandes.

e. Si las bases y alturas de los rectángulos se representan con los símbolos Δx y $f(x_i)$, respectivamente, $i = 1,2,3, \dots, n$, con esta notación, ¿cómo se representa la suma de áreas y su límite?

Notación:
En las siguientes actividades tome como base la función $y = t^2$ y utilice el símbolo $\int_0^x f(t)dt$ para representar el área limitada por la curva $y = f(t)$, el eje de las abscisas, desde "$t = 0$ hasta $t = x$".

Actividad 4.2.
Si la gráfica de la función se refleja respecto al eje de las abscisas, ¿cuál es la función que describes la curva reflejada? ¿Cuánto mide el área limitada por la curva reflejada y

el eje positivo de las abscisas, sobre el intervalo de "0 a 3"? Utilizando la notación descrita, ¿cómo representaría el área obtenida?

Actividad 4.3.

Si la gráfica de la función se traslada una unidad hacia arriba, ¿cuál es la función que describe la curva trasladada? ¿Cuánto mide el área limitada por la curva y el eje positivo t, sobre el intervalo de "0 a 3"? Utilizando la notación descrita de integral, ¿cómo representaría el área obtenida?

Actividad 4.4.

Si la gráfica de la función se traslada una unidad hacia arriba y una unidad hacia la derecha, ¿cuál es la función que describes la curva trasladada? ¿Cuánto mide el área limitada por la curva y el eje positivo t, ¿sobre qué intervalo del eje t se encuentra? Utilizando la notación descrita de integral, ¿cómo representaría el área obtenida?

SESIÓN 5

Integral definida y relación con el concepto de derivada

Actividad 5.1.

Complete los espacios vacíos, en la parte inferior de la tabla que se muestra a continuación, con los resultados de áreas obtenidas en sesiones anteriores para las dos primeras funciones de la parte superior, generalizando el resultado para las demás.

Función	$y = t$	$y = t^2$	$y = t^3$	$y = t^4$	---	$y = t^n$
Área					…	

Actividad 5.2.

Considere las áreas obtenidas, en la tabla de la actividad 1 de esta sesión, como una función de la variable x, escribirlas en los espacios superiores de la tabla a continuación y en la parte inferior correspondiente escribir el resultado de la derivada de dichas áreas. Compare los resultados con la función correspondiente en la tabla anterior, ¿qué observa? Con la notación que se utilizó en las actividades 2, 3 y 4 de la sesión 4, ¿Cómo representa su observación?

Área					---	
Derivada					…	

Actividad 5.3.

Escriba el proceso de integral definida para calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = t + t^2$, y el eje de las abscisas, desde $t = 0$ hasta $t = x$.

a. ¿Qué relación hay entre el área obtenida y las áreas limitadas por las gráficas de las funciones $y = t$ e $y = t^2$, sobre el mismo intervalo? Con la notación que se utilizó en las actividades 2, 3 y 4 de la sesión 4, ¿cómo representa esta relación?
b. ¿Se cumple la observación hecha en la actividad 2 de esta sesión para la función $y = t + t^2$? ¡Compruébelo!

Actividad 5.4.

Evalúe $\int_0^2 (t^2 + t^3)\,dt$.

ANEXO B

Población de Estudio

Pareja	Nombre de Alumnos
1	1. CANUL PANTOJA LUIS ALBERTO
	2. TAH CIAU JESUS ARIEL
2	1. SALVADOR PEREZ OSCAR
	2. RAMOS MIS CLARISSA DEL ROCIO
3	1. TORRES LORIA JOSE LUIS
	2. RIVERA CETINA WALTER ARNOLDO
4	1. PALAFOX GARCIA ADOLFO
	2. HERRERA WITZIL EDDY FRANCISCO
5	1. SANTOS ITZA MARIEL ESPERANZA
	2. YAM MOO ELMER JESUS