UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

Variación inversamente proporcional y resolución de problemas

Tesis

para obtener el grado de

Maestra en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTA

Elsa Citlali Chargoy Loustaunau

Directores de Tesis

Dr. César Cristobal Escalante

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Asesores

Dra. Verónica Vargas Alejo

Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar

MTI Melissa Blanqueto Estrada

Chetumal, Quintana Roo, México, Noviembre de 2012.

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

Trabajo de Tesis elaborado bajo supervisión del Comité de Asesoría y aprobada como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestra en Enseñanza de las Matemáticas

Comité de Tesis

Director:

Dr. César Cristobal Escalante

Director:

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Asesor:

Dra. Verónica Vargas Alejo

Asesor:

Dr. Jaime Silverio Ortegón Aguilar

Asesor:

MTI Melissa Blanqueto Estrada

Chetumal, Quintana Roo, México, Noviembre de 2012.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres y a mi esposo, por ayudarme cuando trataba de esconderme del tiempo para poder estudiar, trabajar y cuidar a mi hijita.

Gracias a mi director el profesor César Cristóbal Escalante, porque su filosofía es un puerto y tierra firme en un mar de opiniones acerca de la enseñanza de las Matemáticas. Gracias por ofrecerme su apoyo siempre.

Gracias a mi codirector de tesis, Dr. Aarón Reyes Rodríguez, por su tiempo y paciencia en la elaboración de este documento.

A todos los profesores de la MEM, que con entusiasmo nos guiaron en este viaje que nos ha brindado un panorama más amplio y rico sobre la enseñanza.

Dedicatoria

A mi hija Hania, que a la edad de 6 años, fue la más paciente pasajera del carro de papá, que esperaba para llevarme a casa después de la escuela.

Resumen

Este documento, es el resultado de una experiencia llevada a cabo con un grupo de alumnos de primer semestre de colegio de bachilleres del EMSaD Limones, Quintana Roo. El trabajo se implementó en dos fases. La primera consistió en un diagnóstico cuyo objetivo fue determinar cuáles son las herramientas matemáticas que los estudiantes emplean para resolver problemas de variación proporcional inversa, además de conocer los errores más comunes que cometen al abordar este tipo de tareas. La segunda etapa consistió en realizar acciones didácticas, para apoyarlos a superar las deficiencias encontradas.

Mediante la fase diagnóstica se pudo conocer que los estudiantes muestran poca habilidad para realizar operaciones con fracciones, y lo que es más preocupante, algunos alumnos desconocen el concepto de proporción. También se encontró que los alumnos recurren frecuentemente al uso de estrategias aditivas para tratar de resolver problemas de proporcionalidad inversa.

La propuesta didáctica se diseñó considerando los resultados del diagnóstico, y experiencias semejantes, reseñadas en artículos de revistas especializadas. Estas actividades utilizan situaciones en contextos cercanos a los estudiantes y el trabajo colaborativo para apoyar el desarrollo de un entendimiento conceptual. También se favorece el uso de diversas representaciones de un problema, esto contribuye a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.

La propuesta didáctica permite a los alumnos identificar y simbolizar patrones, que subyacen en las diversas actividades realizadas.

Contenido

Capítulo 1. Presentación

El estudio de los procesos de aprendizaje es una tarea compleja; sin embargo, entender cómo piensan los estudiantes es una tarea fundamental de todo profesor de matemáticas, ya que sin este conocimiento difícilmente podremos estructurar estrategias y acciones para que los alumnos superen sus dificultades y construyan nuevos conocimientos.

En este contexto, el presente trabajo tiene entre sus objetivos diseñar e implementar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes comprender el concepto de variación proporcional inversa. La observación en el aula, así como la investigación documental se han realizado con el propósito de identificar los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes para comprender relaciones de variación inversa, y a partir de esta información diseñar una propuesta de instrucción, así como acciones didácticas que puedan ayudar a los estudiantes a superar esas dificultades.

1.1. Antecedentes

La proporcionalidad es un concepto de gran relevancia en la educación matemática de todos los niveles escolares, ya que fundamenta una amplia variedad de temas, por ejemplo al analizar semejanza y escala, tasas, constantes de cambio y gráficas de funciones lineales que pasan por el origen, al realizar conversiones entre unidades de medida, al transformar fracciones o números decimales en porcentajes (Beckmann, 2004). Además, la noción de proporcionalidad es indispensable para entender muchos conceptos centrales en diversas áreas de matemáticas, física, química, ingeniería, tales como: semejanza, rapidez, gasto, flujo, variaciones, funciones, derivadas, ley de proporciones múltiples, Ley de Boyle, Ley de Coulomb, Leyes de Newton y muchas más.

Sin embargo, a pesar de la relevancia de este concepto, su comprensión no es un proceso sencillo. Algunos investigadores han detectado que los estudiantes muestran serias dificultades para razonar proporcionalmente (Ben-Chaim, Fitzgerald, Fey, Benedetto, & Miller, 1998), las cuales persisten incluso hasta el nivel universitario (Lawton, 1993). Además, se ha llegado a estimar que el 90% de los adultos no son capaces de razonar proporcionalmente (Lamon, 2007).

Al hablar de proporcionalidad, generalmente se hace referencia a la proporcionalidad directa, la cual es una relación matemática, de naturaleza multiplicativa, entre dos variables: x y y, que puede expresarse mediante una función lineal de la forma $y = kx$, donde k es una constante llamada *constante de proporcionalidad*. Sin embargo, existen otros tipos de relaciones multiplicativas entre dos variables x y y, una de estas relaciones se denomina proporcionalidad inversa, la cual se representa mediante una función de la forma $y = \frac{k}{x}$; equivalentemente se dice que dos variables x y y son inversamente proporcionales si el producto de éstas es constante, es decir $xy = k$.

La proporcionalidad inversa aparece durante el estudio de diversos fenómenos naturales o sociales, por ejemplo: al relacionar la velocidad de un auto y el tiempo que tarda en recorrer una distancia dada, al estudiar el equilibrio en palancas o para modelar el tiempo necesario para llevar a cabo una tarea en término de la cantidad de trabajadores.

La proporcionalidad inversa se considera un concepto importante para el desarrollo del pensamiento numérico y algebraico de los estudiantes, de ahí que se encuentre presente en el currículo de diversos países. Por citar un caso, en currículo de la educación básica en China se establece que los estudiantes deben ser capaces de entender el significado y propiedades de la proporción, en particular las relaciones proporcionales directas e inversas e identificar cuándo dos cantidades están relacionadas proporcionalmente de forma directa o inversa (Cai, 2004).

En México, los documentos oficiales como el plan de estudios DGB/DCA/07-2010 de Matemáticas I de la SEP para el Bachillerato, así como el Cuadernillo de actividades de aprendizaje de MATEMÁTICAS I (Subsecretaría de Educación Media Superior, 2010), contemplan el estudio de los modelos de variación directa e inversa. Cabe destacar que el único recurso propuesto para abordar este tema es la técnica expositiva, la cual desde mi punto de vista resulta insuficiente, sobre todo porque el tiempo asignado para cumplir la tarea es mínimo. Además, estas acciones, no corresponden con la concepción de aprendizaje que sustenta el documento, que es el de una perspectiva constructivista del aprendizaje.

La Guía Didáctica de Matemáticas I (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011) señala que los estudiantes deben desarrollar conocimientos sobre la proporcionalidad directa e inversa en un tiempo asignado de 5 sesiones, ahora bien, del total de sesiones asignadas al bloque, una está destinada para evaluar lo aprendido, por lo que todas las actividades deben realizarse en no más de 4 sesiones.

La guía menciona que el facilitador debe presentar a los alumnos, las tareas que deben cubrirse en las sesiones asignadas, las cuales consisten en resolver ejercicios y problemas acerca de tasas, razones, y proporciones. Es importante mencionar que el tema de variación inversa se aborda solamente en la Actividad II- 6, con un solo ejercicio, dado el tiempo que se dispone para desarrollar la totalidad de los temas.

Como se puede observar, se hace necesario elaborar propuestas didácticas pertinentes y adecuadas a los objetivos cognitivos asumidos en los planes y programas, que logren desarrollar una comprensión de los conceptos y procesos que los capaciten para solucionar problemas semejantes o incluso mas complejos a los que estudiaron en el aula.

1.2. Justificación

El programa de estudios de Matemáticas I para Bachillerato (Secretaría de Eduacación Pública, 2010) señala que los alumnos deben resolver problemas matemáticos argumentado sus resultados mediante procedimientos matemáticos, ya sean aritméticos, algebraicos o geométricos, además de analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural, para determinar o estimar su comportamiento e interpretar tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

En este sentido es importante, elaborar y experimentar propuestas didácticas que lleven a los estudiantes a desarrollar conocimientos, habilidades y competencias para la resolución de problemas, contribuyendo así con la labor docente, dando un giro al enfoque tradicional de la enseñanza en el cual el alumno aprende matemáticas como un producto terminado, es decir, fórmulas o algoritmos.

Contribuciones de este tipo se hacen necesarias dado que el aprendizaje necesita del razonamiento y el análisis para organizar y conectar los conocimientos previos de cada individuo. Cada grupo de estudiantes y cada estudiante plantean características diferentes, algunos necesitan de una representación visual para comprender a fondo una problemática, y de esta forma planear una estrategia de solución. Estas diferencias plantean a los profesores contar con un repertorio amplio de situaciones que puedan ser utilizadas en las sesiones de instrucción. Los ejemplos y ejercicios utilizados, la reseña del modo de utilización en el aula y de los resultados obtenidos, son información valiosa para que otros colegas puedan utilizarlos de acuerdo a sus consideraciones y condiciones particulares. Este contexto es una de las directrices que me llevan a realizar este trabajo.

1.3. Objetivo

Elaborar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes relevantes para resolver problemas de variación inversa. A través de la resolución de estos problemas, lograr el desarrollo de una comprensión conceptual mediante trabajo colaborativo, el empleo de diversas representaciones, así como la exploración de varias formas o rutas de solución.

De manera que al final, los estudiantes puedan explicar, describir situaciones que involucren cantidades que se relacionan y varían inversa y directamente, y que puedan resolver problemas del tipo:

> Un grupo de jóvenes trabajó 3 horas diarias durante 5 días, para reforestar determinada área, si hubieran trabajado una hora menos al día ¿En cuántos días habrían terminado? ¿Cuantos días se requieren si el grupo tiene la mitad de integrantes? ¿Y si el número de integrantes se duplica? ¿Y si el área se duplica? ¿Y si el área es la mitad? ¿Y si es la tercera parte?
>
> Juan tarda tres días para cosechar la miel de 5 colmenas, Pedro tarda dos. Si trabajan juntos ¿En cuánto tiempo cosecharán las 5 colmenas? ¿En cuánto tiempo cosecharán dos colmenas? ¿En cuánto tiempo Juan cosechará 10 colmenas? ¿En cuánto tiempo lo hará Juan?

1.4. Alcances y limitaciones del proyecto:

El proyecto consiste en la elaboración de una propuesta didáctica que desarrolle las habilidades de los alumnos para resolver problemas de variación inversa y promueva la compresión de este concepto. El alcance de la propuesta es constituirse en una herramienta que permita al docente entender las formas de razonamiento de un grupo de bachilleres al resolver este tipo de problemas y proporcionar elementos para que otros profesores se interesen en el estudio de esta problemática o problemáticas similares.

Dicha propuesta está diseñada con el sustento de las teorías sobre el aprendizaje basado en problemas, trabajo colaborativo y el uso de diversas representaciones, se constituye en una aportación de estrategias para que en el proceso de aprendizaje de estos conceptos, los estudiantes puedan resolver las dificultades de aprendizaje específicas señaladas anteriormente.

Asimismo, es un instrumento que puede ser útil para analizar el proceso del desarrollo de la simbolización; el cual puede ser refinado y mejorado en estudios posteriores. Algunas de las limitaciones están asociadas con el tiempo de clase, el cual restringe la cantidad y el tipo de problemas que integran la propuesta y los cuales no abarcan de forma integral la totalidad de las situaciones que favorecen la construcción y compresión del concepto de proporcionalidad, tanto inversa como directa. Este análisis puede dar argumentos para sustentar la asignación de mayor tiempo de clase, así como diferentes actividades de aprendizaje.

Otra de las limitaciones de este trabajo se debe a su carácter longitudinal, ya que sólo analiza la problemática en un momento dado en el tiempo, y no da cuenta de las sucesivas etapas de desarrollo del pensamiento proporcional, el cual inicia su gestación desde la infancia temprana y concluye hasta la adolescencia tardía (Piaget & Inhelder, 1959).

1.5. Viabilidad de la Propuesta

Los materiales usados para llevar a cabo la propuesta son económicos, e incluso se puede ser flexible y creativo usando otros materiales para representar las variaciones entre los datos, estos materiales incluyen: papel, cubos de madera o plástico, incluso representaciones que muestren secuencias de eventos, como recipientes llenados paulatinamente con agua. Los problemas son adecuados al nivel bachillerato, dadas las competencias disciplinares básicas señaladas en los planes y programas de estudio.

Es natural que los jóvenes se sientan motivados al manejar materiales, de ahí que aumente la viabilidad de la propuesta, ya que la comodidad que brinda la manipulación de objetos concretos les ayuda a sentir confianza en sus conjeturas y conclusiones, así como a valorar el uso del lenguaje algebraico para representar un evento.

Solo se requiere la intervención del profesor en los momentos en donde los conocimientos del alumno y su experiencia no le permiten relacionar la información, esta intervención no implica que el profesor resuelva el problema sino que guíe el sentido de las preguntas que lleven a la solución.

La propuesta es viable pues requiere de inversiones mínimas en cuanto a materiales, para poder implementarla es necesario contar con un mínimo de 5 horas durante las cuales se desarrollará una dinámica, y se resolverán las actividades propuestas, al final, la hoja de trabajo servirá para evaluar el desempeño del alumno.

Capítulo 2. Marco Teórico

Este capítulo está dividido en dos secciones, en una se exponen los fundamentos matemáticos del trabajo y en otra se caracterizan los elementos teóricos que sustentan la propuesta didáctica. En la primera sección, además de revisar la forma en que algunos libros de texto definen a las relaciones de variación proporcional inversa, se exponen y analizan diversos ejemplos de tareas propuestas en los textos y otros materiales didácticos, con la finalidad de que los estudiantes desarrollen una compresión de la proporcionalidad inversa.

2.1. Conceptos matemáticos

La proporcionalidad inversa es una relación de carácter multiplicativo entre dos variables x y y. Así, se dice que *x* y *y* son inversamente proporcionales si su producto xy es constante. En esta sección se analizará la forma en que diversos textos definen la proporcionalidad inversa. Por ejemplo, Ibañez-Carrasco y García-Torres (2009, p. 101) expresan que:

> "*Una proporción o variación inversa tiene como característica principal que si una de las magnitudes relacionadas aumenta, la otra disminuye y si una disminuye, la otra aumenta. Ejemplo: La velocidad y el tiempo de recorrido de una distancia. Matemáticamente, decimos que las dos cantidades son inversamente proporcionales o tienen una variación inversa si cumple que:*
>
> $$y = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$
>
> *Donde* $k = xy$*(p. 101)*

Observemos que las cantidades velocidad y tiempo guardan una relación funcional, esto es, v depende de t. Se puede observar que, si la distancia se mantiene constante, a mayor velocidad del móvil se requiere menor tiempo para recorrer esa distancia. La expresión que relaciona estas dos cantidades es:

$\mathrm{v(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}$Donde la distancia es siempre la misma, es constante.

Si una magnitud varía inversa y proporcionalmente con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por el recíproco de la segunda.

Ejemplo:

Donald quiere repartir, en forma inversamente proporcional a su edad, la cantidad $15,000 entre Hugo, Paco y Luis quienes tienen 15,12 y 10 años respectivamente.

Solución:

Diremos que $15{,}000 = x + y + z$,

Donde:

X = $ de Luis, y= $de Paco, z= $ de Hugo

También sabemos que cada uno recibirá una cantidad que varía inversamente con su edad, de ahí que Hugo recibirá menos cantidad de dinero que Luis, pero para ser equitativos definimos que $10x = 12y = 15z$, *o escrito de otra forma:*

$$\frac{x}{\frac{1}{10}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}}$$

Parece un tanto sin sentido, pero dividir un entero entre una fracción nos puede decir cuántas veces cabe dicha fracción en el entero, como dividir 1 entre 0.5, es igual a decir cuántas monedas de 50 centavos hacen un peso.

Ahora tenemos que dividir 15000 entre una fracción que represente el tamaño de las porciones que vamos a repartir, esto se logra sumando las porciones que asignamos a cada uno:

$$\frac{x + y + z}{\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}} = \frac{15000}{\frac{450}{1800}} = \frac{15000}{\frac{45}{180}}$$

Para el sobrino Luis:

Sustituyendo y haciendo operaciones:

$$\frac{15000}{\frac{45}{180}} = \frac{x}{\frac{1}{10}}$$

$$x = \frac{15000\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{45}{180}} = \frac{\frac{15000}{10}}{\frac{45}{180}} = \frac{15000\ (180)}{45(10)} = 6000$$

Para el sobrino Paco

$$y = \frac{15000\left(\frac{1}{12}\right)}{\frac{45}{180}} = \frac{\frac{15000}{12}}{\frac{45}{180}} = \frac{15000\ (180)}{45(12)} = 5000$$

Para el sobrino Hugo

$$z = \frac{15000\left(\frac{1}{15}\right)}{\frac{45}{180}} = \frac{\frac{15000}{15}}{\frac{45}{180}} = \frac{15000\ (180)}{45(15)} = 4000$$

A continuación se expresa otro concepto importante relacionado con la proporcionalidad inversa, que es la variación compuesta, la cual aparece en diversos problemas de los libros de texto.

Diremos que un problema es de proporcionalidad compuesta si intervienen tres o más magnitudes. Al intervenir más de dos magnitudes las relaciones proporcionales dos a dos de las magnitudes pueden ser distintas, es decir, si tenemos las magnitudes A, B y C, la relación entre A y B puede ser directa o inversa y entre B y C puede ocurrir lo mismo, es decir, se presenta como una combinación de Proporciones Directas e Inversas.

Caso 1. Combinación de dos proporciones inversas

9 pintores trabajando 8 horas diarias pintan un edificio en 12 días. ¿Cuántos días demorarán 18 pintores en pintar el mimo edificio trabajando 6 horas diarias?”

“Solución:

Numero de pintores	Numero de horas	Número de días
9	8	12
18	6	x

En forma de proporción

$$\frac{9}{18} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{9}{18} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{12(9)}{18} = 6$$

Este es el número de horas que tardarían 18 pintores trabajando 8 horas diarias. Ahora calculemos cuánto tardarán trabajando 6 horas

$$\frac{8}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{x}{6}$$

$$x = \frac{8(6)}{6} = 8$$

Conclusión: 18 pintores trabajando 6 horas diarias tardan 8 días en pintar el mismo edificio.”[1]

[1] Tomado de Matemáticas I, Aritmética y álgebra (Ibáñez Carrasco & García Torres , 2009)

Caso 2. Combinación de una proporción directa y una inversa

Nueve trabajadores terminan 20 kayaks en 60 días, ¿cuántos kayaks pueden construir 12 trabajadores en 36 días?

La primera parte es de variación inversa, es decir: si aumenta el número de trabajadores, disminuirá la cantidad de tiempo necesaria para terminar una cantidad dada de trabajo, así

$$\frac{9}{12} = \frac{x}{60}$$

Así que x, que representa el número de días es igual a 45, también puede verse así: si son 20 kayaks en 60 días, entonces 9 trabajadores tardarán 3 días en terminar un cayac, si consideramos que la cantidad de trabajadores aumenta en una tercera parte, entonces el tiempo disminuirá en la misma proporción: 60*0.75=45.

Una forma más de encontrar la respuesta, es obteniendo la parte que corresponde al trabajo elaborado por un trabajador en un día, con respecto al total. Para el ejercicio anterior, es una de 540 (o 60x9), luego dividimos esta cantidad entre el número de trabajadores es decir 540/12=45.

La segunda parte es variación directa, pues si disminuye el tiempo que tienen los trabajadores para laborar, también disminuirá la cantidad de trabajo realizado, así que si dividimos 45 días entre 20 kayaks, tenemos que se realiza un cayac cada 2.25 días, luego si son 45-36= nueve días menos de trabajo, por tanto 9/2.25 es igual a cuatro kayaks menos, es decir 16 kayaks, ó

$$\frac{20}{45} = \frac{x}{36} \qquad entonces\ \ x = 16\ cayacs$$

Por otra parte, en el documento Guía Didáctica de Matemáticas I del Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, se ejemplifica el tipo de problemas y procesos de solución que se espera que los estudiantes lleven a cabo al abordar el tema de variación proporcional inversa (p. 37).

Si en la construcción de una calle se emplearon 10 obreros y se terminó en 20 días, ¿en cuántos días hubieran realizado 40 obreros la misma construcción?”

Solución:

"Una forma equivocada de resolver este problema es a través de una regla de tres simple, obsérvese lo siguiente:"

10 obreros emplean 20 días

40 obreros emplean a número de días

"Por lo que se plantearía la siguiente proporción de manera equivocada

$$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{20}} = \frac{\mathbf{40}}{\boldsymbol{x}}$$

"Al despejar x, se tiene que x=80 días, esto implicaría que entre más obreros laborando, se llevarían más días, lo cual contradice toda lógica, esto se deriva ya que la proporción no es directa sino inversa."

"Solución correcta:

Como 10 obreros hacen la obra en 20 días, entonces 1 obrero la hace en 200 días, 2 la harían en 100 días, 4 la hacen en 50 días, 40 obreros la haría en 5 días"[2]

El siguiente problema fue tomado del libro Matemáticas 1 Álgebra en acción de Joaquín Ruiz Basto, el cual sigue un enfoque por competencias.

"**Alimento para aves**. Una granja posee comida para alimentar 5400 pollitos durante 15 días. Si el total de pollitos aumenta 4%:

a) ¿Cuánto durará el alimento para la nueva población?
b) Halla un modelo predictivo para la duración del alimento para cualquier cantidad de pollitos (iguales condiciones de consumo y aumento). Úsalo en otra situación similar." (p. 13).

En el Cuadernillo de actividades de aprendizaje de MATEMÁTICAS I (Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General del Bachillerato DCA, DSA., 2010), se encuentra el siguiente problema:

En un rancho hay 1400 vacas y hay alimento para 10 días, si se compran 600 vacas más ¿Cuánto tiempo durará el alimento?

[2]Este problema también se encuentra en el libro Matemáticas 1, Pulido Chiunti& Vélez Castillejos, p. 63, ejemplo 2.12

Otros ejemplos de problemas de variación inversa encontrados en libros de nivel secundaria y bachillerato se muestran en el Anexo A, los problemas propuestos para cuarto semestre de bachillerato, se estudian como un caso particular de la función racional; algunos ejercicios están relacionados con temas de física como la velocidad, la ley de Boyle o la ley de gravitación universal de Newton.

2.2. Aspectos cognitivos y didácticos

Es necesario que los alumnos de bachillerato dominen las representaciones algebraicas, entre otras cosas porque esto les permitirá desarrollar procesos de abstracción y modelización. La habilidad para comprender representaciones algebraicas incluye tener la capacidad de interpretar los símbolos, manipularlos y utilizarlos para llegar a la solución de un problema. Éste es un proceso complejo, múltiples autores coinciden en que los estudiantes tienen dificultades para comprender lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas (English & Warren, 1998) (Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler, 1990) (Ursini, Lozano, & Trigueros , 2000).

Es igualmente complejo definir la estrategia a seguir para lograr que los estudiantes lleguen a este dominio; sobre todo porque hay una variedad de factores que influyen en esto; autores como (Fujii, 2004) proponen la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética introduciendo el uso de los números como cuasi-variables. Independientemente del camino que se tome para lograr que los alumnos cuenten con las herramientas necesarias para desenvolverse matemáticamente, existen teorías del aprendizaje que brindan una guía a quienes están interesados en la enseñanza de la misma.

Acerca del aprendizaje

Para tratar de superar los obstáculos que impiden el aprendizaje de los estudiantes, debemos reconocer que la construcción de conocimiento, es un proceso que se realiza por la necesidad del individuo de adquirir saberes que le permitan interactuar con la sociedad o modificar el medio en el que se desenvuelve, por ejemplo: aprender a leer la hora o escribir un libro. Durante el proceso de aprendizaje el individuo desarrolla sistemas conceptuales que le permiten explicar, describir, comunicar, pronosticar el comportamiento y evolución de lo que le rodea a otros individuos.

Estos sistemas conceptuales están constituidos por las relaciones entre los conceptos, sus propiedades y reglas de interacción, por ejemplo, el sistema conceptual de un niño con respecto a lo que sabe acerca del vuelo de las aves. En este sistema se encuentran relacionados los conceptos de forma, peso, textura, altura etc., cada uno con sus propiedades y reglas de interacción entre estos. Dichos sistemas conceptuales están en constante transformación, de acuerdo con las experiencias de las personas y de la sociedad. (Collins, Greeno, & Resnick, 1996) (Lesh & Doerr, 2003)

Las experiencias vividas por un individuo se reflejan en los modelos o sistemas conceptuales que construye e interioriza. Para exteriorizar de alguna forma sus ideas o modelos internos, las personas construyen modelos externos, utilizando alguna forma de representación, esto lo hacen cuando comunican sus ideas a otras personas.

Por ejemplo, una persona que desarrollado sus propias teorías acerca del vuelo de las aves, puede valerse de la comunicación escrita o hablada para representar sus ideas al respecto. Al hacerlo tiene que adaptar las representaciones propias a representaciones compartidas o consensuadas con las otras personas, como el lenguaje algebraico. Durante estos procesos se pueden presentar discrepancias entre los modelos internos y externos (o representaciones externas) del individuo, que puede llevar a cambios en ambos modelos.

Cuando las interpretaciones de un modelo externo (o sistema experimentado) son compartidas, los modelos internos desarrollados por los individuos pueden ser modificados para acomodarse a las interpretaciones de los otros. En este sentido el aprendizaje es un proceso que implica una serie de ciclos de entendimiento formados por experiencias en las cuales los sistemas conceptuales o modelos van siendo modificados, desde sistemas conceptuales burdos y desarticulados hasta llegar a modelos más refinados e integrados. (Lesh & Doerr, 2003)

Las actividades adecuadas para desarrollar aprendizaje en cada ciclo, son aquellas que permiten que las personas elaboren descripciones, analicen situaciones, permitan la comunicación de las ideas, elaboren conjeturas y argumentos, usen diferentes formas de representación, y reflexionen sobre las actividades realizadas, elaborando modelos más refinados de las situaciones consideradas.

Una de las ideas fundamentales de la propuesta es el uso de las diversas representaciones como medio para llegar a una cantidad mayor de estudiantes, así como para enriquecer la visión que éstos tienen de un tema. El significado de representación en psicología, es el proceso de modelar situaciones concretas del mundo real, en conceptos o símbolos abstractos. Así un problema que puede representarse de manera algebraica, también puede representarse mediante dibujos, o mediante la manipulación de objetos concretos. Estos aspectos se ven reflejados en la propuesta.

Una *representación* es la descripción de la relación entre objetos y símbolos. Se reconocen cinco representaciones externas, la representación concreta, la representación simbólica en aritmética, el lenguaje hablado y el pictórico o gráfico. (Lesh, Post, & Behr, 1987) De estas, las tres últimas son más abstractas y se encuentran a un nivel más alto entre las representaciones para resolver problemas matemáticos (Hwang, Chen, Dung, & Yang, 2007)

Lesh y Doerr (2003) han diseñado y puesto en práctica distintas investigaciones, entre las que se encuentran algunas que abordan el aprendizaje de la razón y la proporción. Estos autores señalan que los estudiantes deben de enfrentarse a resolver problemas significativos a través de hacer descripciones simbólicas de las situaciones que se les presenten en la vida real. Aunado a esto, existen estudios que señalan que las habilidades de los alumnos para representar problemas en matemáticas, son la llave para resolverlos exitosamente, (Hwang, Chen, Dung, & Yang, 2007) de forma que en la medida que un estudiante desarrolle dichas habilidades, logrará en un mediano plazo, contar con las herramientas necesarias para comprender relaciones funcionales y sus aplicaciones, dichos temas son parte de su formación como bachiller y como universitario.

La propuesta contempla el desarrollo de las diversas habilidades para representar los problemas de variación inversa, de forma progresiva y natural (Lesh & Doerr, 2003), en la que el primer paso es la traslación de la representación verbal a la de patrones numéricos, luego transformar estos patrones en símbolos matemáticos y por último explicar oralmente la solución. (Gonzales Marí, y otros, 1990)

Habilidad de representación hablada. Es la habilidad de trasladar las propiedades observadas y las relaciones de problemas matemáticos en representaciones verbales.

Habilidad de representación gráfica. Es la habilidad de trasladar problemas matemáticos en figuras, dibujos o representaciones gráficas.

Habilidad de representación en símbolos aritméticos. Es la habilidad para trasladar problemas matemáticos a fórmulas aritméticas.

Cada estudiante tiene diferentes estilos de aprendizaje (Hwang, Chen, Dung, & Yang, 2007), algunos estudiantes prefieren las representaciones visuales o concretas, mientras otros, prefieren las representaciones simbólicas o abstractas. Normalmente, los estudiantes que son buenos resolviendo problemas son aquellos capaces de traducir sus representaciones verbales en gráficos o fórmulas. Por otro lado, los estudiantes con pocas habilidades para resolver problemas siempre tienen dificultad en traducir y representar dichos problemas. De ahí que es importante desarrollar en estos estudiantes, las habilidades para representar un problema de distintas formas, comenzando con las representaciones concretas, (usando objetos) verbales, mediante el trabajo colaborativo, y otras representaciones más abstractas, como la gráfica o la algebraica.

Este desarrollo conceptual es congruente a lo que señala Glasersfeld (1995) respecto a la necesidad de que el sujeto autorregule y construya estructuras conceptuales a través de la reflexión y abstracción. Por ejemplo, los estudiantes, al resolver problemas no rutinarios en un ambiente de trabajo colaborativo, confrontan sus propias representaciones con las de otros, construyen nuevas representaciones para contestar las preguntas planteadas. Los problemas no son resueltos por recuperación de datos, o por un aprendizaje automático de respuestas correctas.

El aprendizaje basado en problemas es uno de los paradigmas constructivistas en el que el trabajo personal como en equipo provee al alumno de un ambiente para la construcción de conocimientos, pues mediante esta estrategia, el estudiante usará diferentes métodos para indagar, preguntar, comunicar, analizar, buscar respuestas, justificar y argumentar conjeturas (Freudenthal, 1968) (Schoenfeld, 1992).

Capítulo 3. Metodología.

El proceso de elaboración de la propuesta didáctica, siguió las siguientes etapas:

- Investigación documental
- Fase diagnóstica
- Selección de las actividades de instrucción
- Organización de las actividades
- Elaboración de la propuesta.
- Aplicación de la propuesta

La investigación documental consistió en la búsqueda y análisis de documentos en libros, artículos de revistas especializadas, páginas de internet, que abordaran experiencias y resultados de investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la variación inversa.

La fase diagnóstica consistió en la compilación y aplicación de problemas de variación inversa, que permitiera observar los conocimientos de los alumnos y las dificultades conceptuales y operativas de los estudiantes al abordar estos problemas. Este instrumento de diagnóstico consistió de tres problemas y se aplicó previamente a un grupo de 18 estudiantes en el ciclo de invierno de 2010. Los resultados del diagnóstico, se organizaron y analizaron para identificar los conocimientos y dificultades de los alumnos.

Los resultados de las etapas anteriores sirvieron para la selección y organización de las actividades de instrucción, que integran la propuesta.

La selección de las actividades se realizó considerando que estas pudieran ser: manipulables físicamente por los alumnos, se pudieran representar de diversas formas, en diversas situaciones, en contextos no matemáticos y cercanos a los estudiantes.

La organización de las actividades en el aula, contempla el trabajo en equipo en las primeras sesiones, con el propósito de propiciar la reflexión y la discusión de las interpretaciones e ideas. Posteriormente se propone que los estudiantes desarrollen las actividades de la hoja de trabajo, y respondan individualmente a las preguntas. Estas últimas buscan reafirmar las ideas y corregir desviaciones mediante el análisis.

3.1. Fase diagnóstica

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la prueba de diagnóstico aplicada en el aula. El propósito fue identificar los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes para comprender relaciones de variación inversa, y a partir de esta información diseñar una propuesta de instrucción.

Prueba escrita

La fase diagnóstica se llevó a cabo mediante una prueba escrita consistente en tres problemas. Estos problemas fueron resueltos por estudiantes de primer semestre de Colegio de Bachilleres. Los problemas incluidos en la prueba fueron:

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un automóvil que viaja a 30 km/h de velocidad, tarda 8 1/4 horas en ir de una ciudad a otra, ¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple?
2. 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días ¿Cuántos hombres harían la obra en un día?
3. Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas. Las dos llaves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?

Esta fase se llevó a cabo el 12/11/10, entre las 11 y 12 del día. Se explicó a los estudiantes el propósito de este ejercicio. El grupo al que se le aplicó la prueba es un grupo pequeño y heterogéneo, la gran mayoría de los integrantes son participativos y entusiastas. La solución de los problemas les llevó entre 15 y 40 minutos.

La siguiente tabla muestra un resumen de la información sobre las respuestas que dieron los estudiantes al abordar la prueba diagnóstica.

Tabla 1. Respuestas a los problemas de la prueba diagnóstica

1.*"Un automóvil…"*	2.*"9 hombres….."*	3.*"una llave de agua…"*
Triplicó la velocidad	Elaboró una tabla de dobles-mitades 9-5 18-2.5	Divide 3 horas entre 2
Seis alumnos contestaron: Dividió el tiempo (8 ¼hr) entre 3	Elabora una tabla 9-5 18-4 27-3 36-2 45-1	Elaboró una tabla Llaves --- tinacos 1 2 1 2 3 ½ Juntas 2.5 1 ¼
Dividió 30 Km entre el tiempo y luego multiplica por 3	Multiplicó 9 x 5	Suma 2+3=5
Cuatro alumnos contestaron: Dividió el triple de la velocidad entre 8 ¼hr	Divide 9 / 5	Elabora una tabla 1 llave-2 horas 2 llaves 3 horas
Dos alumnos Calcularon la distancia recorrida	Sumó 9+9+9+9+9=45	Suma 2+3 y divide entre 2
Tres alumnos Elaboraron una tabla como la siguiente: 8.25-30Km 4.125-60Km 2.06-90km	Elaboró una tabla 1-13 2-12 3-11 4-10 5-9 6-8 7-7	Caso único: Solicitó el volumen para calcular gasto (litros/min) ejemplo: 50 *l* en 2 hrs 50 *l* en 3 hrs 0.4 *l* x min 0.27 *l* x min Posteriormente suma estas cantidades. 0.41+0.27=0.67 Luego divide 50 entre 0.67
Elabora una tabla como la siguiente 30 km 8.15	Elabora una tabla como la siguiente 9-5	

90 km 2.71 120 km 0.9hrs	18-2.5 24-1.5 45-1	
Multiplica (8 ¼hr) por 3	Elevó 9 a la quinta potencia	
	Elaboró una tabla 9-1 18-2 23-3 36-4 45-5	

Dificultades encontradas.

Cada problema al que nos enfrentamos tiene un conjunto de variables, algunas veces tenemos herramientas de las cuales echar mano, puntos de apoyo donde anclar nuestras conjeturas, a veces no. Es aquí donde se observan las estrategias que los alumnos utilizan para resolver este tipo de problemas.

Sabemos que los alumnos reciben información sobre variaciones durante su estadía en secundaria, veremos cómo algunos de ellos tratan de usar esas herramientas, algunas veces infructuosamente, ya sea por inexperiencia o como veremos a continuación en algunos casos, por que hay deficiencias más profundas.

El problema -"*Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas. Las dos llaves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?*" suele crear verdadera confusión entre los alumnos, muchos contestaron que el tinaco se llenaría en 5 horas, y en el mejor de los casos algunos promediaron.

Durante la aplicación de los problemas, se realizaron algunas preguntas en voz alta como: "¿Si uso dos llaves de agua para llenar un tinaco, tardo más o tardo menos que si usara sólo una?" Algunos contestaron con un –"pues menos"-. Pero aun así, muchos jóvenes conservaron su respuesta de 5 horas como si este comentario hubiera sido un evento poco útil, lo que indica claramente que a pesar de haber confrontado su aritmética con su lógica, deciden ofrecer una respuesta "calculada" mas no razonada. Dichas acciones indican un desconocimiento del significado de las operaciones.

Que el alumno confronte su respuesta lógica con la calculada, es una herramienta de análisis útil para encontrar la solución, de ahí que la propuesta didáctica debe incluir preguntas que promuevan dicha confrontación, por ejemplo:
-¿Cuál llave vierte más agua en el mismo intervalo de tiempo?
-¿Si ambas están abiertas una hora? ¿Cuál de ellas vertió más agua? ¿Cuánta agua vertió cada una?
-Si suponemos que el tinaco tiene un volumen de 750 litros. ¿Cuánta agua vierte en cada hora cada llave?

Por otro lado, si no se tiene idea de lo que significa el gasto (por ejemplo: metros cúbicos / segundo), puede que se tenga una idea errónea acerca de la rapidez con la que se llena algo. Probablemente algunos estudiantes consideren el tiempo como una medida del gasto y por tanto tiene lógica para ellos que éste sea mayor. Finalmente son más litros, luego, más tiempo.

Si como estudiantes pensamos que: al final estamos uniendo los litros agua que han salido de una llave con los que han salido de la otra-, difícilmente abandonaremos la idea de que el problema se resuelve sumando los únicos datos disponibles.

Este fenómeno no es exclusivo de los bachilleres, el Dr Harvey Mellar del "The London Knowledge Lab" ha estudiado cómo se encuentran estudiantes de niveles superiores al trabajar con problemas de proporcionalidad; encontró que muchos de sus sujetos recurrieron a la suma, de manera incorrecta, como una estrategia que les permitiera llegar a una solución.[3]Karplus también enfatiza como error predominante, el uso incorrecto de la suma en los métodos de solución de los estudiantes.

Error común: resolver el problema con el algoritmo de variación directa.

Durante el desarrollo de las habilidades para resolver problemas, en particular las que implican fenómenos de variación, algunos alumnos siguen el algoritmo de variación

[3]http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig3/Tratamiento%20de%20los%20conceptos_FRuiz.pdf

directa, finalmente se tienen tres datos que varían; luego, automáticamente organizan los datos disponibles para luego multiplicar y dividir, pasando por alto el análisis del problema, es decir, como en los casos anteriores, no existe conexión entre los objetos concretos, sus relaciones y su representación simbólica.

Los alumnos de bachillerato deben tener la capacidad de analizar cómo se asocian dos grupos de datos que varían de forma inversa, es decir, deben identificar que cuando una de las variables aumenta, la otra disminuye. Deben comprender el sentido que tiene el dividir una cantidad entre otra, ya que de esta forma seguirán objetivamente una secuencia lógica en sus cálculos.

Tablas de mitades.

Otro tipo de respuestas comunes y que llevan a los alumnos a cometer errores, es elaborar tablas de mitades de forma incorrecta. Por ejemplo, para resolver el problema: "Un automóvil que viaja a 30 km/h de velocidad, tarda 8 1/4 horas en ir de una ciudad a otra, ¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple?", algunos alumnos contestaron elaborando una tabla como esta:

8.25 - 30 Km

4.125-60Km

2.06-90km

Obsérvese que es una herramienta útil cuando se usa apropiadamente, efectivamente el alumno calcula la mitad del tiempo para después duplicar la distancia, excepto en la última fila, en esta lógica la tabla debería ser:

8.25 – 30 km

4.25 – 60 km

2.06 – 120 km

En el caso anterior, al duplicar las velocidades, el alumno ajusta su respuesta a 90 en vez de calcular el doble de 60, creo que esto último se puede deber a que en el momento de calcular el doble de 60, encuentra que 120 no se parece en absoluto al triple de 30, y entonces "ajusta", en vez de notar que 2.06 no es la respuesta.

Casos similares se observan en las respuestas de distintos problemas por ejemplo: para resolver el problema:“9 hombres pueden hacer una obra en 5 días ¿Cuántos hombres harían la obra en un día?” Uno de nuestros alumnos elaboró la tabla de la izquierda:

9	5
18	4
27	3
36	2
45	1

9	5
18	2.5
27	1.6
36	1.25
45	1

En ambos casos se llega a la respuesta correcta pero la tabla que se encuentra a la izquierda está mal proporcionada, el alumno sabía que el número de días disminuiría, así que completa la regresión usando enteros, los números enteros son particularmente seductores para los alumnos, generalmente los asocian con respuestas, probablemente porque desde que se comienza la formación en la primaria siempre se trabaja con enteros.

En total, de nueve tablas que se usaron como herramienta para solucionar el problema, solo dos se construyeron adecuadamente. La tabla de mitades es una herramienta útil para resolver problemas, siempre y cuando estén correctamente elaboradas. Una forma de asegurar esto, es mostrar al alumno que es posible también una tabla de terceras o quintas partes.

El problema entonces, es que no existen conexiones entre la información que tiene el alumno acerca de fraccionar o de la fracción como una representación de la parte con respecto a un todo y su utilidad para resolver problemas de variación inversa.

Algunos autores coinciden en que los estudiantes tienen dificultades para comprender lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas. Así lo publicaron (Gómez Otero & Dolores Flores, 2007) en “La noción de variable. Estado del arte”.

En resumen, la secuencia didáctica debe contemplar los siguientes aspectos.

- ✓ Los alumnos deben entender los conceptos de rapidez, gasto, flujo, costo, etc.

- ✓ Entender el cambio y representarlo numéricamente. Por ejemplo: distancia recorrida en un tiempo dado, Flujo o gasto: a mayor flujo menos tiempo de llenado. Entre más trabajadores menos tiempo en realizar una obra. Entre más comensales menos duran las provisiones.
- ✓ Comparar procesos: ¿Quién requiere más tiempo? ¿Quién requiere más combustible?¿Más dinero?
- ✓ Usar lenguaje algebraico para representar las relaciones entre las variables.

3.2. Criterios para la selección y organización de actividades de instrucción.

Las actividades tienen el propósito de acercar a los estudiantes al estudio de la variación inversa en un ambiente relajado donde todos pueden interactuar con materiales, realizar mediciones y compartir puntos de vista.

Una ventaja de los materiales, es que dan forma a las estructuras matemáticas sin estar ligados necesariamente a los sistemas de notación simbólica. (Resnick & Ford). El uso de objetos concretos ayuda a descubrir soluciones a las preguntas planteadas, ya que los conceptos abstractos como las operaciones numéricas se vuelvan familiares.

Durante el desarrollo de las dinámicas, se realizan preguntas que promueven el análisis del comportamiento de las variables, por ejemplo: durante la construcción de determinada obra, si aumenta el número de albañiles, ¿Qué pasa con el tiempo de construcción? Los alumnos deben comentar entre sí, las posibles soluciones a los cuestionamientos.

Esta propuesta muestra el uso de las diversas representaciones de los problemas, como herramientas útiles para propiciar que el alumno descubra caminos a la solución, y que utilice símbolos para representar las variables.

Capítulo 4.Propuesta Didáctica

El capítulo muestra las estrategias didácticas pertinentes al estudio de la variación inversa, cabe señalar que para llevar a cabo dichas estrategias, los estudiantes deberán contar con conocimientos previos de aritmética básica, deberán entender el concepto de proporciones, y conceptualizar cómo se relacionan las variables.

En lo que respecta al tema específico de variación inversa, se espera que mediante el desarrollo de las actividades propuestas, los estudiantes identifiquen las variables involucradas en la situación problemática, desarrollen acciones en las que logren dividir o racionar la unidad implícita, sean capaces de multiplicar esta razón para solucionar el problema y obtener una solución.

4.1. Elementos de la propuesta didáctica

De acuerdo con Lesh y Doerr (2000), los estudiantes deben "...*desarrollar constructos (modelos o sistemas conceptuales inmersos en una variedad de sistemas de representación) que proporcionan los fundamentos conceptuales para una comprensión de mayor profundidad y de mayor orden de muchas de las ideas más poderosas del currículo de matemáticas y ciencias preuniversitarias*".

La propuesta está elaborada en base a este principio: las diversas representaciones se pueden apreciar en las distintas etapas del proceso, que inicia con los organizadores previos, posteriormente los problemas a resolver en equipo y finalmente con la evaluación individual.

Se sugiere que las actividades correspondientes a la revisión de los organizadores previos, así como las del laboratorio de variación inversa se lleven a cabo en equipos, dado que en esta etapa de la propuesta es donde se propicia el diálogo y comunicación de las ideas de los alumnos acerca de los problemas y cómo resolverlos. Finalmente se propone aplicar la evaluación de forma individual, ya que en esta etapa se pone a prueba el uso de las nuevas herramientas de solución adquiridas. Las preguntas planteadas propician la reflexión acerca de los fenómenos, lo que posteriormente es útil en el sentido de dirigir las estrategias de solución.

A continuación se incluyen las hojas de trabajo que conforman la propuesta didáctica.

Variación inversa

Organizadores previos

Según la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, el alumno debe poseer los conocimientos previos adecuados para poder acceder a los conocimientos nuevos. En este sentido, se precisan estrategias metodológicas que activen los conceptos previos.

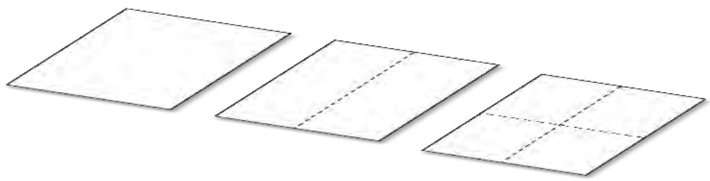
Estos organizadores pueden ser expositivos, proporcionando elementos donde integrar la información nueva, cuando el alumno tiene poco conocimiento de esta, o, pueden ser organizadores previos comparativos, en los que se introduce el nuevo material estableciendo analogías entre lo nuevo y lo conocido.

Las actividades siguientes, son parte de la propuesta didáctica, pueden ser incluidas como un encuadre para propiciar la reflexión del alumno, acerca de cómo pueden variar dos grupos de datos, incluso, la información se puede repartir por equipos como material de consulta.

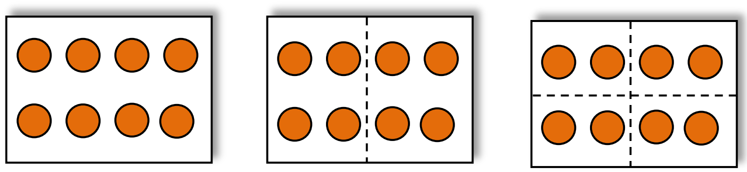
Tablas de mitades y terceras partes

Para crear una tabla de mitades, tomar una hoja de papel, y doblarla en mitades. Registra el número de cuadrados que se forman con cada nuevo doblez.

Ejemplo:



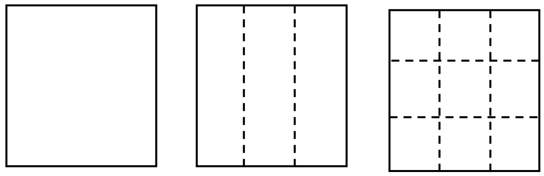
Si en la hoja hubiera estampados 8 lunares distribuidos en un patrón regular, cuántos lunares corresponden a cada nueva superficie? ... 8, luego 4 y dos



Nuestra tabla de mitades tendría la siguiente forma:

Rectángulos	lunares
1	8
2	4
4	2

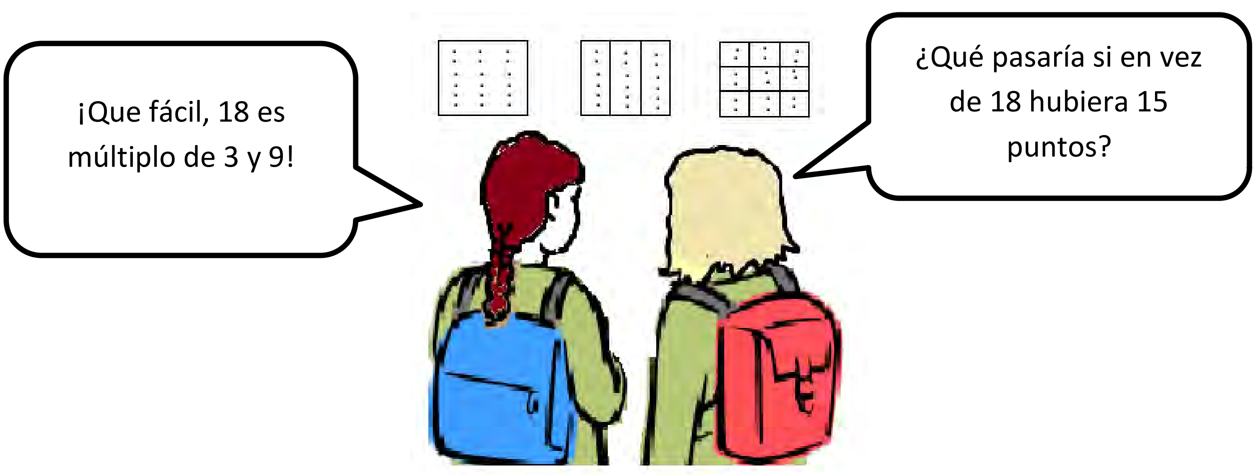
Elabora una tabla de terceras partes, usando una hoja doblada como sigue:



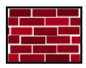
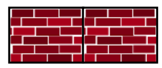
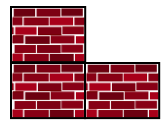
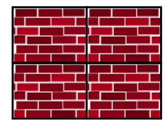
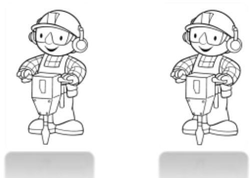
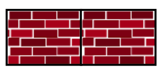
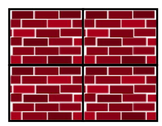
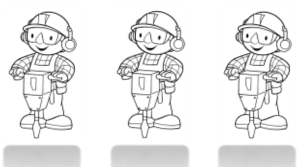
Puedes dibujar un patrón de lunares, pero cuida que cada casilla formada, contenga igual cantidad de estos, ahora llena la siguiente tabla

Cuadrados	lunares
1	
3	
9	

Expón tus resultados y explica la razón de los valores obtenidos.



Observa las siguientes figuras y determina la 3ª fila. Esta tabla crea un conflicto en la tercera fila, pues ya no podrás contestar con un número entero, deberás entonces, crear una correspondencia entre el trabajo de cada constructor con la fracción de hora que le corresponde.

Trabajadores	1ª Hora	2ª Hora	3ª Hora	4ª Hora
				
				
	?			

Respuesta: 1hr 20 min.

Fieeesstaaa!

Esta dinámica involucra la organización de una fiesta de cumpleaños. Si se alquila un local por un precio fijo, calcula la aportación a los gastos según el número de amigos que asistirán a la fiesta.

Coloca los datos en una tabla que muestre la aportación de cada persona dependiendo del número de invitados. ¿Existe un número ideal de invitados?

El método de las proporciones

Este método consiste, en plantear las magnitudes como igualdad entre dos razones y calcular el valor de la incógnita. Por ejemplo:

1. Establecer el supuesto y la pregunta cuidando que las magnitudes relacionadas sean de la misma "especie".
2. Establecer la proporción, invirtiendo alguna de las razones de la misma "especie".
3. Calcular la incógnita, aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

Ejemplo: 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días ¿Cuántos hombres harían la obra en un día?

	hombres	Días
Supuesto	9	5
Pregunta		1

$$\frac{x}{9} = \frac{5}{1}$$

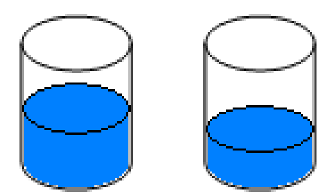
$x = 5 * 9 = 45$ hombres

Algunos alumnos consideran que para llegar a la respuesta es necesario saber qué parte de la obra hace cada hombre en un día, y con esta información deducir la respuesta, por ejemplo: Si 9 hombres terminaron 1 obra en 5 días, cada uno de ellos realizó 1/9 parte de dicha obra durante 5 días, luego, si consideramos que de esa novena parte lo que se hace en un día es una quinta de esta, entonces un hombre hace $\frac{1}{9} \div 5 = \frac{1}{45}$ de la obra en un día, luego entonces se necesitaría contar con 45 hombres para terminarla en ese tiempo.

Representaciones gráficas.

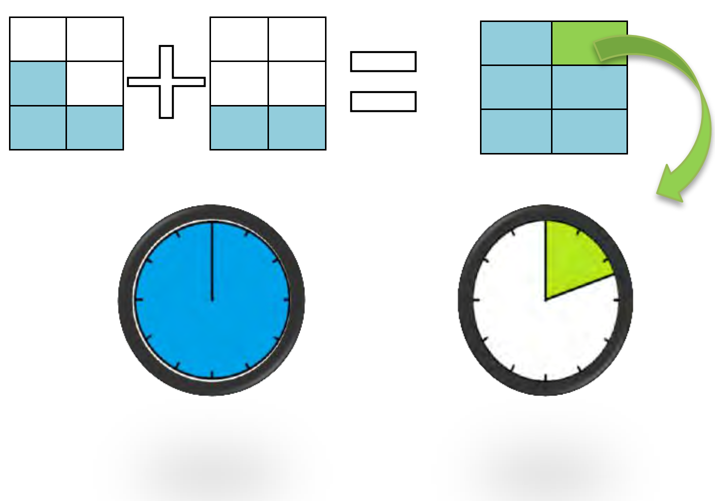
Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas. Las dos lleves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?

Observe los dos tinacos, uno está lleno hasta la mitad, el otro una tercera parte, sabemos entonces que ha pasado una hora, y que en conjunto se ha juntado una cantidad $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$



Luego, si nos falta 1/6 parte del tinaco por llenar, y sabemos que ambas llaves llenan en una hora 5/6 partes, entonces el tiempo que nos falta es 1/5 parte de una hora, es decir 60/5=12.

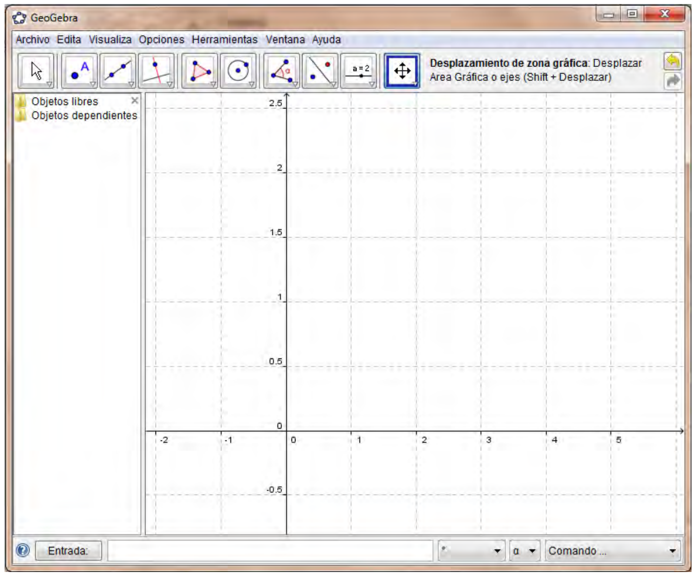
Ambas llaves llenan el tinaco en 1hr 12min



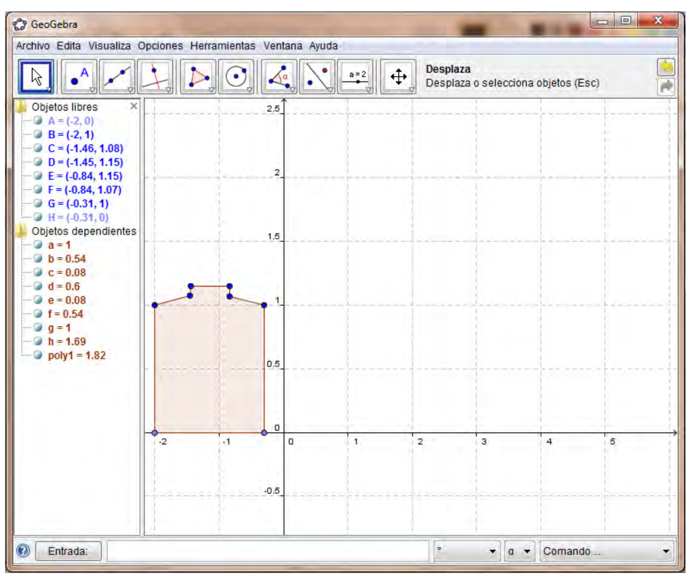
Usa Geogebra para resolver el problema de las llaves

Entra al programa Geogebra y realiza las siguientes actividades:

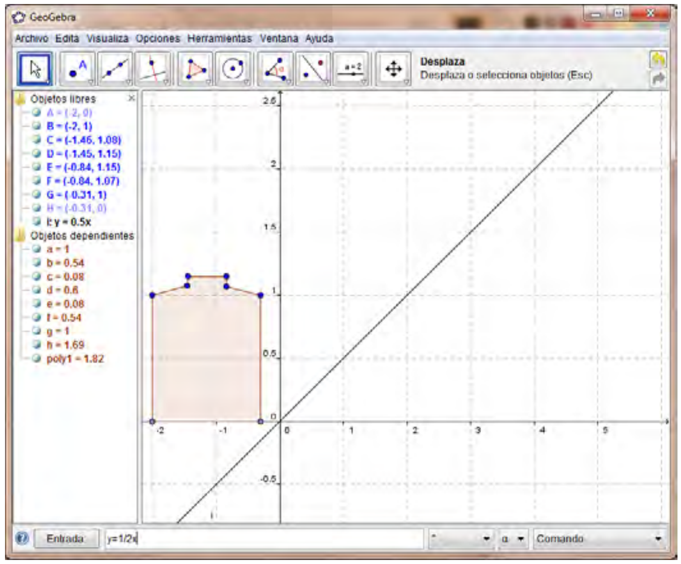
1. Abre un espacio de trabajo, y en el menú "visualiza" da un clic en "cuadrícula". Ajusta la escala de los ejes usando la herramienta "desplazamiento de zona gráfica" dando un clic sobre los ejes y arrastrando el mouse de izquierda a derecha.



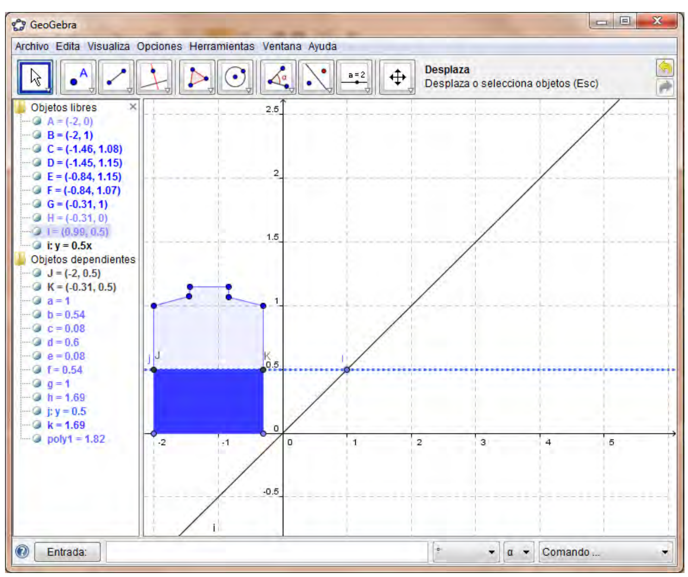
2. En la barra de herramientas elige "polígono" y crea un dibujo del tanque de agua, de preferencia en la ubicación mostrada en la figura.



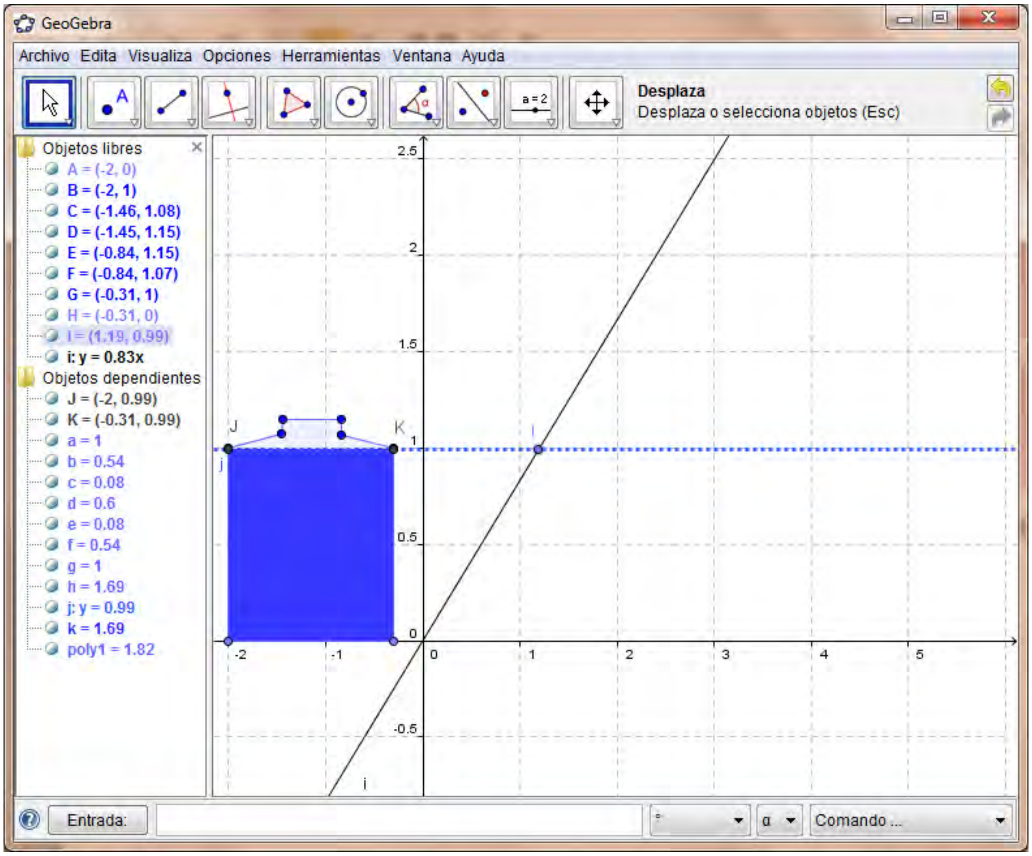
3. En la barra de entrada teclea “y=1/2x”para obtener una recta



4. Sobre la recta coloca un punto (I) y después traza una paralela al eje que pase por dicho punto, nota que puedes desplazar este a lo largo de la recta y que con él también se mueve la recta paralela a los ejes, luego traza un segmento de recta azul dentro del tanque, (segmento k del dibujo) y en sus propiedades selecciona la opción “activa trazo” puedes ver como el tanque de agua se “llena” cuando desplazas el punto I hacia la derecha, la paralela se comporta como el nivel del agua.



1. Por último, haz doble clic en la ecuación que está enlistada en el recuadro izquierdo de la pantalla (“ i ” en la figura), y modifícala para que quede así :$y = \left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)x$, obtendrás lo siguiente



Contesta las siguientes preguntas:

¿Puedes deducir el tiempo que tardaron las dos llaves en llenar el tanque sólo con observar la escala?

¿Qué representa el eje de las x? ¿Qué representa la y?

Juega con la altura del agua en el tanque, modifícala para saber cómo cambia el tiempo de llenado, también cambia los coeficientes de la ecuación e interpreta qué significado tendría esto en el contexto del problema.

Laboratorio de Variación Inversa

A continuación presentamos una serie de actividades diseñadas para despertar las habilidades necesarias para resolver problemas de variación inversa en los alumnos.

Bloques de construcción

Material: bloques de juguete.

El juego consiste en que los equipos estimen la cantidad de “albañiles” necesarios para terminar una tarea dada. Por ejemplo: calcula cuantas personas deben participar armado un muro de 100 bloques, para que todas juntas lo terminen en un tiempo de 15 segundos. El equipo que estime mejor la cantidad de “albañiles” será el ganador.

Estimaciones precisas

¿Qué sucedería si en un equipo existen las siguientes restricciones:

- El albañil Jorge solo puede colocar un bloque por segundo
- El albañil Daniel solo puede colocar dos bloques por segundo
- El albañil Francisco solo puede colocar un bloque cada dos segundos
- ¿Cuánto tardaría Jorge para terminar un muro de 20 bloques?
- ¿Cuánto tardarían Jorge y Daniel juntos para terminar un muro de 20 bloques?
- ¿Cuánto tardarían Jorge, Daniel y Francisco juntos para terminar un muro de 20 bloques?

Carreras de tortugas.

Material: Papel, lápiz y un recipiente.

Se reúnen 5 “corredores” y cada uno de ellos toma un papel de una tómbola. En el papel aparecerá la velocidad a la que deben “correr”. Las velocidades pueden ir de 80 a 140 cm/ min.

Aquí gana el jugador que estime con exactitud y rapidez, el tiempo que le tomaría completar un recorrido de 8 metros, aún si por mala suerte obtuviera la más baja de las velocidades, si contesta correctamente en primer lugar, gana la carrera.

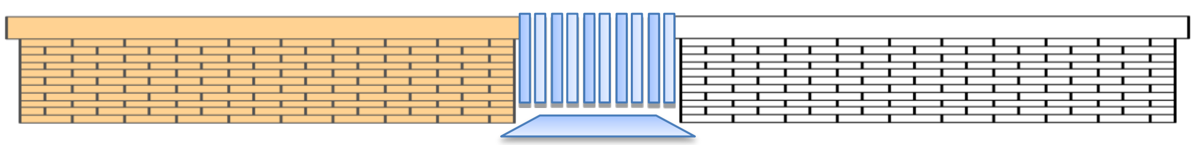
Evaluación

Problema 1. Un automóvil que viaja a una velocidad de 30 km/h, tarda 8 $\frac{1}{4}$horas en ir de una ciudad a otra,

a. ¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple de 30km/hr?
b. Realiza un dibujo donde representes la distancia entre las dos ciudades
c. ¿Qué distancia recorre el automóvil en 1 hora? Marca esa distancia en el dibujo anterior.
d. Si su velocidad fuera de 60 km por hora, ¿Qué distancia recorre en 8.25 horas?

Problema 2. La sociedad de padres de familia del EMSaD Limones, han decidido cercar la escuela con un muro de block. Hasta hoy se ha realizado la mitad de la obra, para ello 9 hombres trabajaron durante 5 días

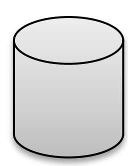
a. ¿Cuántos hombres necesitan para terminar la obra en un día?
b. El siguiente dibujo representa la obra construida (y lo que falta por hacer) colorea la parte que construyó un solo trabajador en un día.



c. ¿Cuántas veces más rápido se construirá la obra?________

Problema 3. Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas.

a. El dibujo representa un tinaco que se llenará solo con la primera llave, dibuje en nivel de agua que tendrá en una hora.



b. Si a esta cantidad de agua añadimos el agua que salió durante una hora de la segunda llave, ¿el tinaco se llena?________
c. Las dos llaves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?_____________

Una mirada a lo aprendido: Instrumentos de evaluación

Una vez que se ha realizado un ciclo de dinámicas - organizadores previos, es importante que el alumno realice un ejercicio de evaluación de lo aprendido.

La herramienta fue diseñada para que los estudiantes exploren las diversas representaciones al resolver problemas de variación inversa, ya que es parte de la evaluación el que realicen esquemas, y que los utilicen para resolver preguntas asociadas al problema, es parte también del proceso natural de elaborar conjeturas y comprobarlas, por ejemplo, un alumno puede conjeturar acerca de ¿Cuánto tardará un automóvil en recorrer determinada distancia, si su velocidad aumenta al triple? La conjetura puede ser fácilmente validada o desechada al realizar un gráfico en el cual se solicita que ubique la posición del automóvil después de una hora.

Los problemas han sido elegidos por su cotidianidad, algunos están contextualizados con la vida de la escuela, lo que permite al alumno abrir puertas a la solución, activando su memoria espacial, ya sea imaginando o recreando la situación problemática. Se tomaron en consideración, los errores más comúnmente encontrados, el análisis de las respuestas nos llevó a concluir que algunos estudiantes tienen dificultad para conceptualizar la racionalización de un todo y su utilidad.

Los fundamentos teóricos sobre los cuales descansa la propuesta didáctica son:

(1) El juego y trabajo colaborativo

(2) Enseñanza basada en problemas

(3) Diversas representaciones para abordar y resolver problemas.

El instrumento de evaluación está diseñado para conocer el nivel de profundidad de los conocimientos de los estudiantes con respecto al tema de variación inversa, debido a que medir estas capacidades es un tema importante pero distinto de los objetivos del presente trabajo, usaremos como referente, parte del documento publicado por Kilpatrick(2001), que trata de las características que debe mostrar un alumno que ha aprendido matemáticas.

(a) Comprensión conceptual, es decir comprensión de conceptos, operaciones y relaciones matemáticas.

(b) Manejo fluido de procedimientos, es decir, si es hábil para realizar procesos de manera flexible, precisa, eficiente y apropiadamente.

(c) Competencia estratégica, esto es, si tiene habilidad para formular, representar y solucionar problemas matemáticos.

(d) Razonamiento flexible, es decir, si tiene capacidad para pensar, reflexionar, explicar y justificar lógicamente.

(e) Disposición productiva o inclinación para ver las matemáticas como una disciplina sensible, útil y valiosa;

(f) Confianza en sus conocimientos y capacidades

La hoja de trabajo (anexo B), es el instrumento mediante el cual, podemos observar el nivel de comprensión del problema planteado y las herramientas con las que cuentan los alumnos para resolverlo.

Por ejemplo, en el problema del automóvil que viaja a una velocidad dada, se solicita a los alumnos que dibujen la distancia que hay entre las dos ciudades, y que posteriormente ubiquen en ese mismo dibujo, la posición del auto después de una hora. Si el alumno no puede ubicar la posición del auto después de una hora, entonces no ha conceptualizado qué es la velocidad y tampoco tendrá idea de qué hacer con esta información.

Otro aspecto que puede ser evaluado mediante los dibujos de los alumnos, es su competencia estratégica, es decir, su habilidad para representar el problema planteado, y su habilidad para explotar las ventajas que esto ofrece.

Hiebert y Carpenter, (1992) mencionan que las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. De ahí que si pueden verbalizar, dibujar, recrear el problema usando objetos concretos, estamos teniendo pruebas de su comprensión.

4.2 Resultados de la implementación de la secuencia didáctica

Se trabajó con un grupo de 15 alumnos de primer semestre en noviembre de 2011, es un grupo heterogéneo, se distinguen subgrupos de jóvenes formados por lazos de amistad. Algunos subgrupos son participativos, otros no muestran interés por lo general con respecto a matemáticas.

La secuencia inició con una dinámica, ésta consistió en hacer que un grupo pequeño de alumnos (entre 7 y 10 alumnos), calculara cuánto tiempo le tomaría a uno de sus compañeros construir un muro con 50 bloques de juguete, al principio parecía una subasta, se alentó a todos a dar un aproximado del tiempo necesario, mientras tanto, un alumno del grupo, cronometró el tiempo que le tomó a su compañero realizar la obra.

Una vez que todos supieron cuánto había tardado una persona en concluir la obra, se solicitaron nuevos constructores, esta vez fueron dos los que construyeron la obra. Se solicitó a todos los demás alumnos que realizaran una aproximación acerca de cuánto tardarán ambos en realizar la misma obra de 50 bloques.

Luego de que se observa claramente que el tiempo de construcción disminuye con el número de constructores, comenzamos con las restricciones. Solicitamos entonces a dos de los alumnos que cronometraran y señalaran a los constructores cuándo colocar un bloque. Así pudimos preguntar a los demás ¿Cuánto tiempo les tomará construir un muro de 50 bloques, a Juan y a Pedro, si Juan solo puede colocar 3 por minuto y Pedro 6?

Fue importante colocar los datos obtenidos en tablas. Los alumnos debieron explicar el origen de sus estimaciones, usando dibujos, los bloques o verbalmente. La siguiente etapa consistió en hacer que los alumnos a resolvieran problemas de variación inversa, es aquí donde se motiva la creatividad de los alumnos, mostrando las diversas representaciones que puede tener un problema.

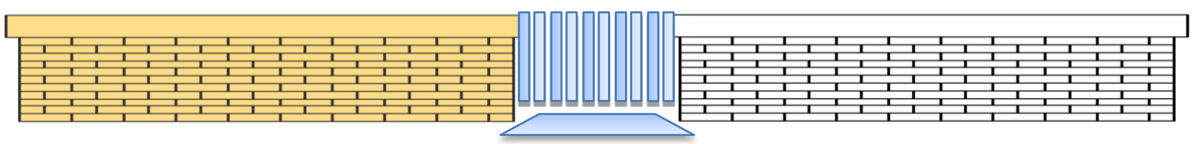
Por último, en una tercera sesión se aplicó la hoja de trabajo ANEXO B, que nos permitió medir la profundidad del aprendizaje de los alumnos. A continuación se muestran las preguntas realizadas y los resultados.

Problema 1. Un automóvil que viaja a una velocidad de 30 km/h, tarda 8 $\frac{1}{4}$ horas en ir de una ciudad a otra,

- e. *¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple de 30km/hr?*
- f. *Realiza un dibujo donde representes la distancia entre las dos ciudades*
- g. *¿Qué distancia recorre el automóvil en 1 hora? Marca esa distancia en el dibujo anterior.*
- h. *Si su velocidad fuera de 60 km por hora, ¿Qué distancia recorre en 8.25 horas?*

Problema 2. La sociedad de padres de familia del EMSaD Limones, han decidido cercar la escuela con un muro de block. Hasta hoy se ha realizado la mitad de la obra, para ello 9 hombres trabajaron durante 5 días

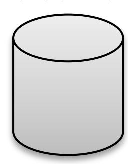
- c. *¿Cuántos hombres necesitan para terminar la obra en un día?*
- d. *El siguiente dibujo representa la obra construida (y lo que falta por hacer) colorea la parte que construyó un solo trabajador en un día.*



- f. *¿Cuántas veces más rápido se construirá la obra?_______*

Problema 3. Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas.

- d. *El dibujo representa un tinaco que se llenará solo con la primera llave, dibuje en nivel de agua que tendrá en una hora.*



- e. *Si a esta cantidad de agua añadimos el agua que salió durante una hora de la segunda llave, ¿el tinaco se llena?_______*
- f. *Las dos llaves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?____________*

Resumen de resultados

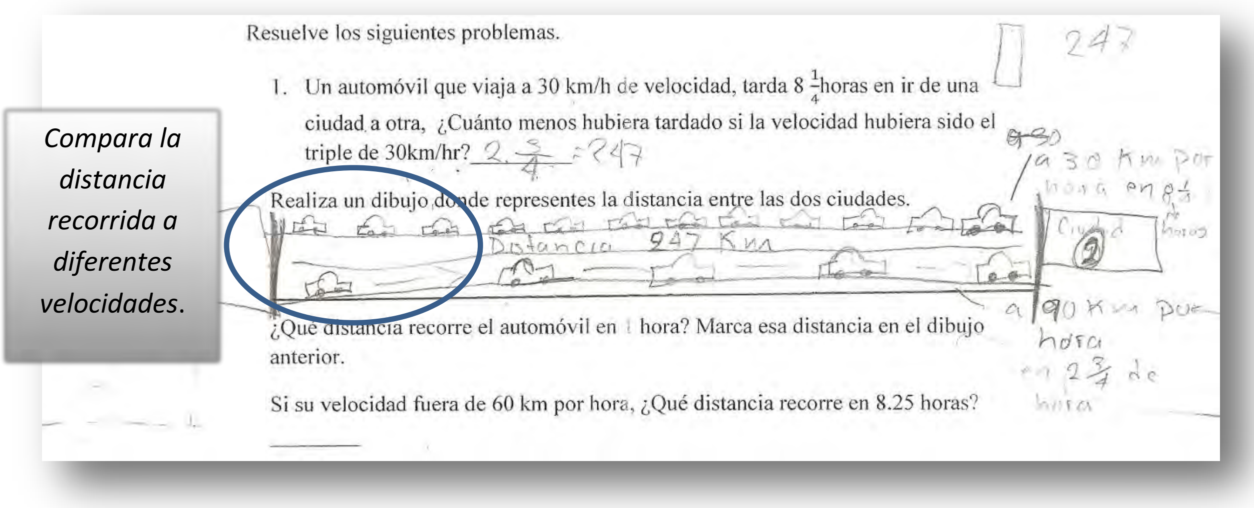
<table>
<tr><th>Problema uno</th><th>Problema dos</th><th>Problema tres</th></tr>
<tr>
<td>• Dos alumnos contestaron 2 hr,
• Dos alumnos contestaron 5hr 30 min, un alumno contestó 2hr 42 min,
• Seis alumnos contestaron 2hr 45 min,
• Dos alumnos contestaron 5 horas 30 segundos,
• Dos alumnos contestaron 5hr 30 min.</td>
<td>• Dos alumnos contestaron que la obra necesitaba de 18 albañiles
• Diez alumnos contestaron que se necesitaban 45 albañiles para terminar la obra
• Un alumno contestó que se necesitaban 90 albañiles
• Un alumno no contestó al cuestionamiento.</td>
<td>• Doce alumnos marcaron correctamente el nivel del agua en el tanque después de una hora,
• Tres alumnos no marcaron el nivel del agua en los tanques.</td>
</tr>
<tr>
<td>• Seis alumnos realizaron un dibujo simple sin escala para representar la distancia entre las dos ciudades,
• Tres alumnos realizaron dibujos con escalas, pero estas estaban mal proporcionadas.
• Cinco alumnos elaboraron un dibujo con escala, Un alumno no realizó esquemas.</td>
<td>• Cuatro alumnos omitieron usar el dibujo,
• Cuatro personas colorearon sin proporción la parte que corresponde a un día de trabajo,
• Siete personas colorearon correctamente la parte proporcional a un día de trabajo de un albañil</td>
<td>• Cuatro alumnos contestaron de forma incorrecta,
• Dos alumnos no contestaron la pregunta.
• Nueve alumnos contestaron correctamente a la pregunta</td>
</tr>
<tr>
<td>• Cinco alumnos marcaron correctamente la posición del automóvil,
• Dos alumnos ubicaron mal la posición del vehículo.</td>
<td rowspan="2">• Diez alumnos contestaron que la obra se construiría 5 veces más rápido</td>
<td rowspan="2">• Dos alumnos llegaron correctamente a la solución del problema,
• Cuatro alumnos realizaron aproximaciones a la respuesta, la variación máxima entre el resultado correcto y su aproximación fue de 18 minutos, mientras que la respuesta más próxima varió en 5 minutos.
• Nueve alumnos no llegaron a la respuesta.</td>
</tr>
<tr>
<td>• Todos los alumnos tienen como respuesta 495km</td>
</tr>
</table>

Capítulo 5. Comentarios y Observaciones

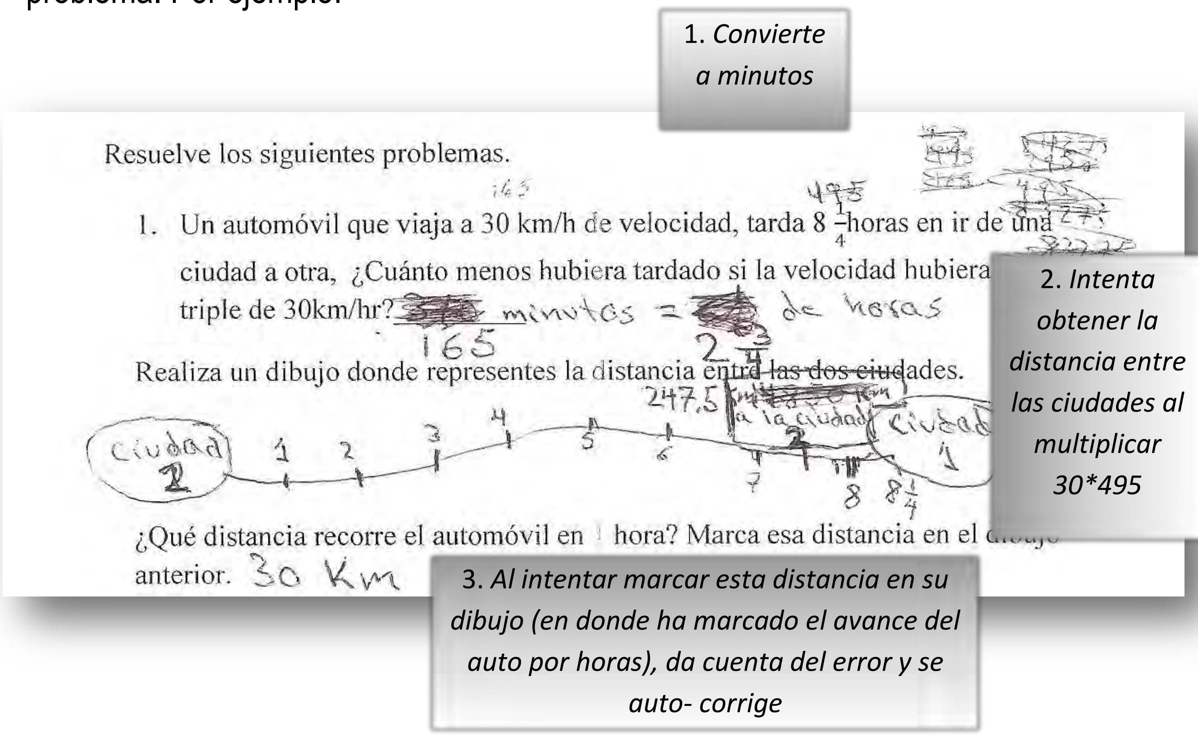
Los estudiantes exploraron nuevas formas de resolver los problemas de variación inversa, una vez que usan las diversas representaciones y que han desarrollado la secuencia. A diferencia de la primera evaluación, una mayor cantidad de alumnos utilizó dibujos.

También el número de aciertos aumentó; por ejemplo: al resolver el problema del automóvil que viaja al triple de la velocidad, sin secuencia didáctica, 31% contestaron correctamente mientras que usando la secuencia, un 40% contestó correctamente. Cabe señalar que aunque pareciera que este último valor no es significativo, observamos que dentro del grupo que no llegó a la solución, una tercera parte se aproximó a la respuesta; lo importante es que, ya puede observarse un sentido en las respuestas, los esfuerzos de los alumnos están enfocados en refinar su técnica para llegar a la solución exacta, en encontrar un algoritmo.

El proceso de simbolizar un fenómeno ya sea de forma algebraica o mediante otros recursos, es un indicador del nivel de dominio de un concepto. A continuación se muestra como una representación puede evidenciar lo anterior, y sobre todo, cómo influyó esto en la solución del problema. En este caso puede apreciarse que el alumno muestra que un auto viaja tres veces más rápido que otro. Entonces dado que es tres veces más rápido hubiera tardado 2 horas y 45 min en realizar el trayecto, hubiera ahorrado 5 horas 30 min de viaje.

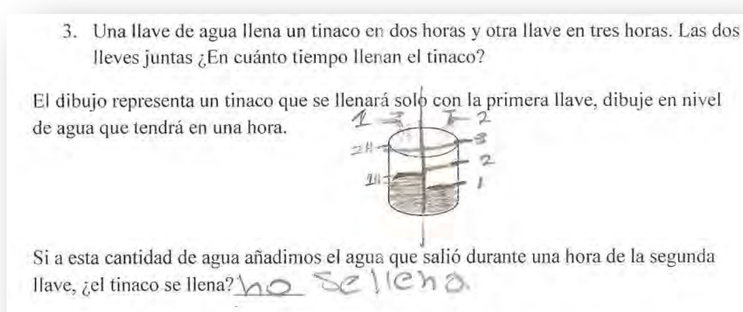


La siguiente imagen muestra cómo algunas de las preguntas planteadas sirven para confrontar las ideas del alumno contra lo que se supone es una representación de la realidad, esto a veces nos lleva a replantear nuestras ideas, acerca de la solución del problema. Por ejemplo:



En el problema de los albañiles, el porcentaje de estudiantes que contestaron correctamente sin haber seguido la secuencia, fue del 15%, sin contar que algunas respuestas curiosamente eran correctas por cuestiones del azar. El número de aciertos de los alumnos que siguieron la secuencia, fue de un 66%.

Por último, en el problema de los tanques, mientras los alumnos que no siguieron la secuencia no pudieron llegar a una respuesta, 13% contestaron correctamente una vez que siguieron la secuencia, mientras que un 26% se aproximó a la respuesta.



Como se muestra en la imagen, el alumno representa correctamente el problema. Este simple dibujo puede evitar errores comunes como el de sumar el tiempo de llenado.

Un aspecto que considero importante es: durante el desarrollo de la dinámica donde se usaron bloques para construir muros, los resultados fueron producto de iteraciones en las que los alumnos se corregían entre sí, como en una cacería, algunos exponían en voz alta su estrategia, mientras otros elegían el método que estaba mejor argumentado.

Durante el desarrollo de la secuencia didáctica se observó una mayor participación de los alumnos que generalmente no se involucraban con ideas durante la clase. Ha sido importante observar que la validación tangible de los resultados de los problemas es un aspecto importante tanto para los alumnos que tienen problemas para aprender matemáticas como para los que no los tienen.

Los alumnos que presentan dificultades para resolver problemas en matemáticas, comúnmente se ven abrumados con la toda la información acerca del problema. Es igual que perderse en un jardín en forma de laberinto, comparado con resolver el mismo laberinto sobre papel. Es diferente cuando se puede "ver" el rumbo de las estrategias de solución, centrar la atención en lo verdaderamente importante y autocorregir nuestros desvíos. "Las matemáticas son comprendidas, si su representación mental es parte de una red de representaciones." (Hiebert & Carpenter, 1992)

En este sentido, "el proceso de construcción del concepto de numero racional, exige un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados… para alcanzar la comprensión, es necesario el dominio coordinado de dos o mas sistemas de representación" (Kaput, 1992)

Bibliografía

Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demostrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*(1), 42-46.

Ben-Chaim, D., Fitzgerald, W., Fey, J., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricular Experiences. *EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, 36*(3), 247-273.

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the erlier grades: A case study of the Chinese mathematics curriculum. *Journal of Mathematics Educators, 8*(1), 107-130.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo. (2011, Mayo). MATEMÁTICAS I, Programa de estudio DGB/DCA/07-2010. *Guía Didáctica, Reforma Integral del la educación Media Superior, GD-RIEMS-DOC-4101*, 37. Quintana Roo, México.

Collins, A., Greeno, J., & Resnick, L. (1996). Cognition and Lerning. In D. Berliner, & R. Calfee, *Handbook of Educational Psychology* (pp. 15-46). New York: Macmillan.

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern explorarion. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-171.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1).

Fujii, T. (2004). *Probing students´understanding of variables throug cognitive conflict problems: es the concept of a variable so dificult for students to understand?* Retrieved from http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/Plen5fujii.pdf

Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism : A Way of Knowing and Learning.* Falmer Press.

Gómez Otero, E. J., & Dolores Flores, C. (2007, Mayo). La noción de variable. Un estado del arte. (C. R. Crespo Crespo, & Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 461-466.

Gonzales Marí, J. L., Iriarte Bustos, M. D., Ortiz Comas, A., Vargas-Machuca, I., Jimeno Pérez, M., Ortiz Villarejo, A., et al. (1990). *Números Enteros.* Madrid, España: Síntesis.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and Learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 191-212.

Ibáñez Carrasco, P., & García Torres , G. (2009). *Matemáticas I, Aritmética y álgebra con enfoque en competencias.* México: CENGAGE Learning.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. Grouws, *Handbook of reserch on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G., & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher, & J. Kilpatrick, *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). New York: Melbourne Sydney.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing.

Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 460-466.

Lesh, R., & Doerr, H. (2000). *Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. .* (E. Y. P. Cobb, Ed.)

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching.* Mahwah, N. J.: Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Traslations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, *In Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Licencia Creative Commons Reconocimiento Compartir Igual 3.0. (2010, 12 1). Retrieved 12 07, 2010, from Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Competencia_(aprendizaje)

Piaget, J., & Inhelder, B. (1959). *The grow of logical thinking from childhood to adolescence.* USA: Basic Books.

Pulido Chiunti, A., & Vélez Castillejos, M. (2011). *Matemáticas 1* (2a ed.). México, D.F, México: Nueva Imagen.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (n.d.). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.*

Ruiz Basto, J. (2009). *Matemáticas 1. Algebra en acción* (1a ed.). México, DF: Grupo Editorial Patria.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathemetics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Secretaría de Eduacación Pública. (2010). MATEMATICAS I. *Serie Programas de Estudio*. México, DF, México.

Solomos, K., & Avouris, N. (1999). Learning From Multiple Collaborating Intelligent Tutors: An Agent-Based Approach. *10*(3.4).

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2010). *Matemáticas 1, cuadernillo de actividades de aprendizaje.* México: Secretaría de Educación Pública.

Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General del Bachillerato DCA, DSA. (2010). *Matemáticas 1, cuadernillo de actividades de aprendizaje.* México: Secretaría de Educación Pública.

Ursini, S., Lozano, M., & Trigueros , M. (2000). "La concepción de la variable en la enseñanza media". *Educación Matemática, 12*(2).

ANEXOS

Anexo A

A continuación se muestra una lista de problemas que el alumno debe poder resolver una vez que ha concluido el primer semestre de Bachillerato. Los problemas se aplicaron con el propósito de conocer las dificultades de los alumnos en dos rondas distintas, en la primera se asignaron los problemas 1,3 y 7, mientras que en una segunda ronda se asignaron los problemas 2,4 y 5.

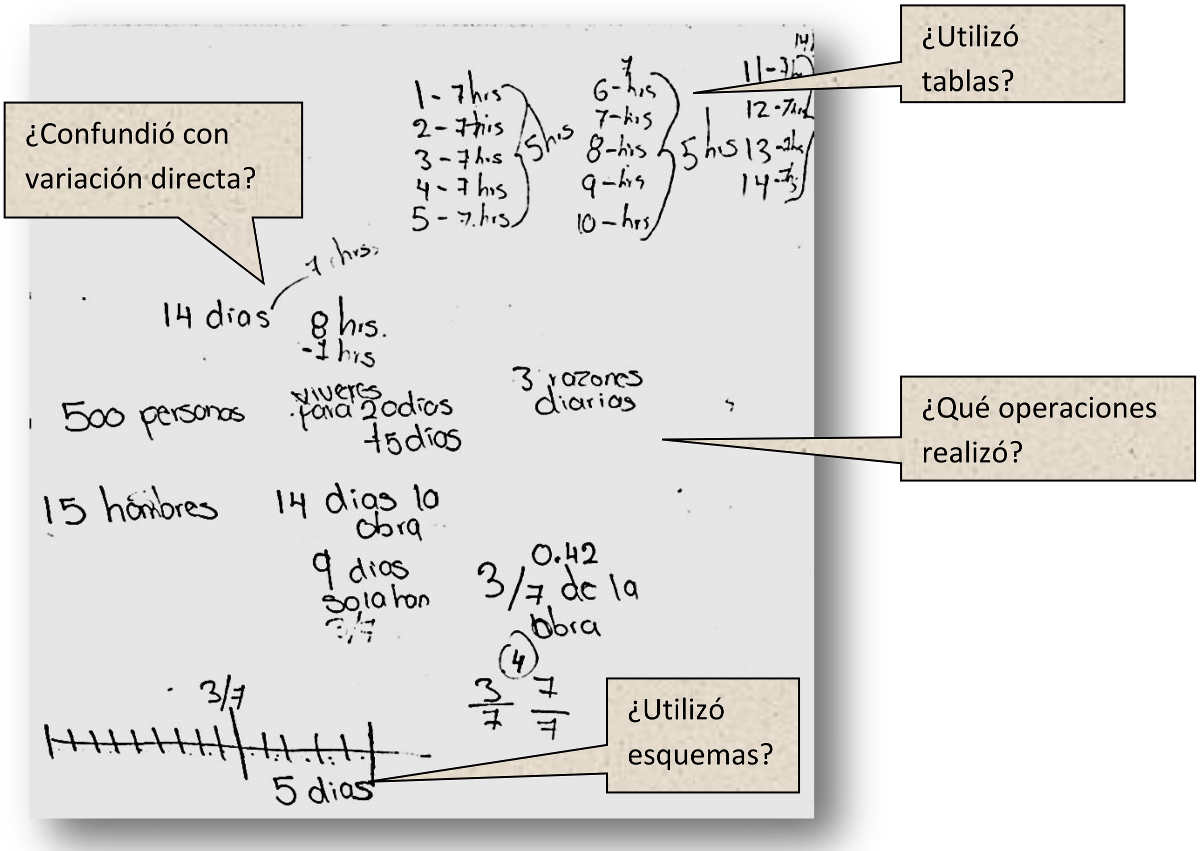
A cada equipo se le asignó un conjunto de problemas a resolver. El objetivo es tomar nota, de:

- Si los alumnos llegaron a la solución, ¿cuáles fueron los pasos que siguieron? Tuvieron alguna dificultad?
- Si los alumnos no llegaron a la respuesta, tomar nota de cuáles han sido las dificultades y los errores que se cometen con más frecuencia.

En esta etapa del estudio, es importante conocer los conocimientos previos que los estudiantes toman como base para dar solución al problema. Esto será mediante una entrevista simple y los análisis de los apuntes y operaciones realizadas durante el proceso.

Algunas preguntas de la entrevista fueron:

1. ¿Qué pasos seguiste para llegar al resultado?
2. ¿Por qué multiplicaste estos números?
3. ¿Cuál es el sentido de dividir entre x número?
4. ¿Habías resuelto problemas de este tipo con anterioridad?



Una vez finalizada la actividad, se procedió al análisis de la evaluación escrita, la información se condensó en tablas que se muestran en el capítulo cuarto. El análisis lleva al planteamiento de la secuencia didáctica.

Problemas que el alumno debe poder resolver

Los problemas que al final del curso propuesto, los estudiantes deberán poder resolver son

1. 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días ¿Cuántos hombres harían la obra en un día? Cuantos hombres para hacerla en 15 días?
2. Una cuadrilla de obreros emplea 14 días trabajando 8 horas diarias en realizar cierta obra, si hubieran trabajado una hora menos al día ¿En cuántos días habrían terminado la obra?

3. Un automóvil que viaja a 30 km/h de velocidad, tarda 8 1/4 horas en ir de una ciudad a otra, ¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple?
4. Un grupo de 500 personas tiene víveres para 20 días, a razón de 3 razones diarias. ¿Cuántas raciones deberá tomar cada persona si se desea que los víveres duren 5 días más?
5. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días cierta obra. Al cabo de 9 días, sólo han hecho 3/7 de la obra ¿con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar a obra en el tiempo acordado?
6. Un viejo desea repartir entre sus nietos, la cantidad de 15000 pesos en forma inversamente proporcional a su edad, ellos tienen 15, 12 y 10 años.
7. Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas. Las dos lleves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?
8. Según la Ley de Boyle, a temperatura constante la presión P de un gas comprimido es inversamente proporcional al volumen V. Suponiendo que la presión es de 25libras por pulgada cuadrada, cuando el volumen del gas es de 400 pulgadas cubicas, calcular la presión cuando el gas se comprime a 200 pulgadas cubicas.
9. Dado que y varia inversamente con x, y y=3 cuando x es igual a 8, escribe y grafica la función de variación inversa.

Anexo B

TEMA: VARIACIÓN INVERSA

Nombre del alumno____ Fecha__/__/__

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un automóvil que viaja a una velocidad de 30 km/h, tarda $8\frac{1}{4}$ horas en ir de una ciudad a otra, ¿Cuánto menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple de 30km/hr?_________

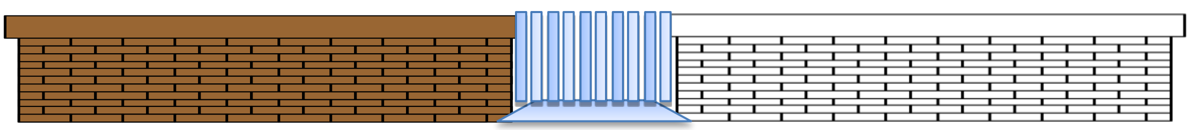
   Realiza un dibujo donde represente la distancia entre las dos ciudades.

   ¿Qué distancia recorre el automóvil en 1 hora? Marca esa distancia en el dibujo anterior.

   Si su velocidad fuera de 60 km por hora, ¿Qué distancia recorre en 8.25 horas?____

2. La sociedad de padres de familia del EMSaD Limones, han decidido cercar la escuela con un muro de block. Hasta hoy se ha realizado la mitad de la obra, para ello 9 hombres trabajaron durante 5 días ¿Cuántos hombres necesitan para terminar la obra en un día? _______

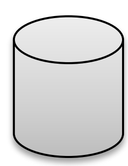
   El siguiente dibujo representa la obra construida (y lo que falta por hacer) colorea la parte que construyó un solo trabajador en un día.



   ¿Cuántas veces más rápido se construirá la obra?_______

3. Una llave de agua llena un tinaco en dos horas y otra llave en tres horas.

   El dibujo representa un tinaco que se llenará solo con la primera llave, dibuje en nivel de agua que tendrá en una hora.



   Si a esta cantidad de agua añadimos el agua que salió durante una hora de la segunda llave, ¿el tinaco se llena?_______

   Las dos llaves juntas ¿En cuánto tiempo llenan el tinaco?____________

Anexo C

Laboratorio de Variación Inversa

A continuación presentamos una serie de actividades diseñadas para despertar las habilidades necesarias para resolver problemas de variación inversa en los alumnos.

Bloques de construcción

Material: bloques de juguete.

El juego consiste en que los equipos estimen la cantidad de “albañiles” necesarios para terminar una tarea dada. Por ejemplo: calcula cuantas personas deben participar armado un muro de 100 bloques, para que todas juntas lo terminen en un tiempo de 15 segundos. El equipo que estime mejor la cantidad de “albañiles” será el ganador.

Estimaciones precisas

¿Qué sucedería si en un equipo existen las siguientes restricciones?:

- El albañil Jorge solo puede colocar un bloque por segundo
- El albañil Daniel solo puede colocar dos bloques por segundo
- El albañil Francisco solo puede colocar un bloque cada dos segundos
- ¿Cuánto tardaría Jorge para terminar un muro de 20 bloques?
- ¿Cuánto tardarían Jorge y Daniel juntos para terminar un muro de 20 bloques?
- ¿Cuánto tardarían Jorge, Daniel y Francisco juntos para terminar un muro de 20 bloques?

Carreras de tortugas.

Material: Papel, lápiz y un recipiente.

Se reúnen 5 “corredores” y cada uno de ellos toma un papel de una tómbola. En el papel aparecerá la velocidad a la que deben “correr”. Las velocidades pueden ir de 80 a 140 cm/ min.

Aquí gana el jugador que estime con exactitud y rapidez, el tiempo que le tomaría completar un recorrido de 8 metros, aún si por mala suerte obtuviera la más baja de las velocidades, si contesta correctamente en primer lugar, gana la carrera.