UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

CÁLCULO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

TESIS
Para obtener el grado de

MAESTRA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
GLORIA MARÍA ALVARADO FARÍAS

DIRECTORA
DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

ASESORES
DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE
DR. JOSÉ GUZMÁN HERNÁNDEZ
DR. AARÓN VÍCTOR REYES RODRÍGUEZ
DRA. DARLY ALINA KÚ EUÁN

Chetumal Quintana Roo, México, Junio de 2014

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TRABAJO DE TESIS ELABORADO BAJO SUPERVISIÓN DEL COMITÉ DE ASESORÍA APROBADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

COMITÉ DE TESIS

DIRECTORA: ______________________

DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

SUPERVISOR: ______________________

DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE

SUPERVISOR: ______________________

DR. JOSÉ GUZMÁN HERNÁNDEZ

Chetumal, Quintana Roo, México, Junio de 2014.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La presente tesis documenta el proceso de diseño e implementación de una Propuesta Didáctica que propició en los estudiantes la construcción de conocimientos y habilidades relacionadas con el concepto de área de figuras planas. Fue diseñada contemplando indicadores de desempeño emanados del programa de estudio que se presenta en un contexto institucional RIEB (Reforma Integral de la Educación Básica), la cual se orienta al desarrollo de competencias de la asignatura de matemáticas I bloque III de Medida (Cálculo de área de Figuras Planas) para alumnos del primer grado, del Programa de Estudios de Educación Básica, Secundaria. Esta propuesta se diseñó también contemplando aportes de varios investigadores en educación matemática.

Dos fases esenciales caracterizaron el proceso de elaboración e implementación de la propuesta didáctica. La primera consistió en la elaboración, implementación en fase piloto con estudiantes de secundaria y el rediseño de la propuesta. En la segunda fase, la propuesta didáctica se implementó a un grupo normal de estudiantes de secundaria, cuyas características se describen en este documento. Se documentan los resultados de la implementación (segunda fase) y el análisis de los mismos.

En el Capítulo 1 se presentan los antecedentes y justificación en torno al problema de la tesis “Calculo de Área de Figuras Planas”. Se describe el objetivo de la tesis y de la propuesta didáctica cuyo diseño, implementación y análisis se discute a lo largo del documento. Se mencionan también los alcances y las limitaciones.

En el Capítulo 2 se documenta la revisión de literatura de investigación alrededor de cómo se concibe la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, qué elementos se requieren para una planeación que apoye el desarrollo de conocimiento matemático y, en particular, se revisa la teoría de los Van Hiele por su aportación para la comprensión del desarrollo de conocimiento en geometría.

En el Capítulo 3 se muestra la metodología de trabajo. Se describe el contexto institucional donde fue aplicada la propuesta, las fases del proceso del diseño de la propuesta y los criterios que se siguieron para implementarla, analizarla y evaluarla.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados y el análisis derivado de la implementación de la secuencia didáctica en el aula. Se documenta el proceso de aprendizaje de los estudiantes en cuanto al concepto de área, mediante la descripción y el análisis de los procedimientos de los alumnos al resolver cada una de las actividades. Se presentan dificultades y logros de aprendizaje así como el papel del profesor para apoyar el desarrollo de conocimiento. Se muestra un análisis obtenido a partir de la prueba piloto y posteriormente se documenta la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia didáctica después de haber sido modificada.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones con base en los resultados y análisis de los mismos. Las recomendaciones serán útiles para mejorar la propuesta, su implementación y resultados.

Los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica muestran que el desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes es un proceso que requiere de más tiempo del señalado en los planes y programas de estudio. Se identificaron dificultades de aprendizaje como las señaladas en la literatura de investigación: varios estudiantes mostraron dificultades para resolver las actividades, ya que requerían no solo calcular el área aplicando fórmulas aprendidas de memoria, sino que implicaban descomponer figuras complejas en figuras más simples que las figuras dadas.

Con esta propuesta se muestra como a partir de la resolución de problemas y actividades se puede propiciar la construcción y el desarrollo de conocimiento matemático mediante la interacción de los estudiantes en equipo, la comunicación de sus ideas y las discusiones grupales, lo cual también permitió observar diferentes ciclos de entendimiento, los cuales fueron relacionados con los niveles de razonamiento de los Van Hiele.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA

En este capítulo se presentan los antecedentes y justificación del problema de tesis elegido. Se describe y explica el objetivo de la tesis y de la propuesta didáctica, cuyo diseño, implementación y análisis se discute a lo largo del documento. Se mencionan también los alcances y las limitaciones de esta propuesta.

1.1 ANTECEDENTES

Los conceptos geométricos más antiguos de los que se tiene noticia pertenecen a los tiempos prehistóricos y son consecuencia de las actividades prácticas del ser humano (Aleksandrov *et al.,* 1985). Los primeros hombres llegaron a conceptualizar y abstraer las formas geométricas a través de la observación activa de la naturaleza; la luna llena y en cuarto creciente, la superficie lisa de un lago o de un árbol bien conformado. Pero sobre todo, la actividad para dar forma a materiales que le posibilitaran satisfacer sus necesidades, permitió abstraer "la forma" como algo que puede imprimirse en los materiales y considerarla como un objeto de reflexión y estudio.

La gente medía longitudes, determinaba distancias, estimaba el área de superficies y el volumen de los cuerpos, fue así como descubrieron las primeras relaciones geométricas: que el área de un rectángulo es igual al producto de las longitudes de sus lados.

> La geometría fue descubierta por los egipcios como resultado de las medidas de sus tierras, y estas medidas eran necesarias debido a las inundaciones del Nilo, que constantemente borraban las fronteras. No hay nada notable en el hecho de que esta ciencia, al igual que las otras, haya surgido de las necesidades prácticas del hombre. Todo conocimiento que surge de circunstancias imperfectas tiende por sí mismo a perfeccionarse. Surge de las

> impresiones de los sentidos, pero gradualmente se convierte en objeto de nuestra contemplación y finalmente entra en el reino del intelecto. (Aleksandrov *et al.,* 1985, p. 39)

Los egipcios y babilonios sabían determinar ciertas áreas y volúmenes, "conocían con considerable exactitud el cociente de la longitud de una circunferencia a su diámetro, y quizá incluso supieran calcular el área de la superficie de una esfera" (Aleksandrov *et al., ibid*, p. 39). Por ejemplo el papiro de Ahmes contiene una colección de problemas sobre cálculos de capacidades de contenedores y almacenes. Algunas figuras geométricas planas conocidas por estas culturas fueron: cuadrado, rectángulos, triángulos, trapecios, círculo.

1.1.1 El concepto de medición en la geometría

Medir (NTCM, 2000/2003) se define como "asignar un valor numérico a un atributo de un objeto" (p. 47) y (NTCM, 2000/2003) "Un atributo mensurable es una característica cuantificable de un objeto" (p. 47). La cuantificación o medida de los objetos geométricos se constituye a partir de atributos mensurables como características propias de estos objetos. Ésta se constituye, por ejemplo, a través del cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras planas y sólidos geométricos básicos.

1.1.2 El concepto de área

Los usos más comunes o cotidianos del concepto de área pueden darse al tratar de calcular la cantidad de mosaicos para cubrir un suelo, y la cantidad de pintura necesaria para pintar una pared. A menudo se pueden comparar directamente las áreas de objetos diferentes, sin necesidad de obtener un atributo numérico, por ejemplo, si una pieza de alfombra cubre completamente cierta superficie del piso, sabemos que la alfombra tiene un área igual que ese piso.

El concepto de área en algunos de libros de texto como Baldor (2009) se refiere a la medida de una superficie comprendida entre ciertos límites. Relacionan la superficie con la forma: hay superficies rectangulares, cuadradas, circulares, etc. y superficies irregulares.

Para el cálculo de área de figuras geométricas en el nivel secundaria se sugiere la comprensión y la aplicación de las siguientes fórmulas (SEP, 2006) para las figuras planas:

- Cuadrado: lado *x* lado, o bien, lado al cuadrado
- Rectángulo: *bxh* (*b*=base y *h*=altura)
- Rombo: *Dxd*/2 (*D*= diagonal mayor y *d*=diagonal menor)
- Romboide: *bxh*
- Trapecio: (*B*+*b*) *h*/2 (*B*=base mayor y *b*= base menor)
- Triángulo: *bxh*/2
- Círculo: πr^2
- Polígonos regulares: *P x a*/2 (*P*=perímetro y *a*=apotema)

1.1.3 La unidad de medida para el cálculo de área de figuras planas

Para medir el área de figura plana cualquiera se necesita una unidad de medida. Muchas unidades de medidas de áreas diferentes se han utilizado a lo largo de la historia. El acre se sigue utilizando como una unidad de medida de la superficie, junto con millas cuadradas. La pulgada cuadrada, el pie cuadrado y la yarda cuadrada son unidades de área en el sistema Inglés.

En la mayor parte del mundo se usa oficialmente el Sistema Métrico Decimal, excepto en tres países: Estados Unidos de América, Birmania y Liberia. Con el metro como unidad de longitud estándar, la unidad de medida de área es 1 m^2. En el Sistema Métrico Decimal, los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado (unidad principal para medir el área) más empleados son estos (Álvarez & Palmas, 1997):

> 1 metro cuadrado (m^2) = 100 decímetros cuadrados (dm^2) = 10,000 centímetros cuadrados (cm^2).

> 1 kilómetro cuadrado (km^2) = 100 hectómetros cuadrados (hm^2) = 10,000 decámetros cuadrados (dam^2) = 1,000,000 metros cuadrados (m^2). (p. 146)

El procedimiento empleado para medir la longitud de un segmento es importante en la obtención del área de una figura u objetos complejos. Una forma de calcular el área consiste en contar el número de unidades cuadradas (*cm* cuadrados, por ejemplo) necesarias para cubrir una superficie. Para contar el número de unidades cuadradas (centímetros cuadrados), se pueden construir estas unidades dentro de la región deseada o bien se puede superponer una plantilla [1] (de acetato, por ejemplo) que contenga las unidades cuadradas (centímetros cuadrados, por ejemplo, o alguna otra unidad de medida). Podrían utilizarse diferentes plantillas, cada una construida con diferentes unidades cuadradas (por ejemplo, milímetros cuadrados), contar la cantidad de veces que esta unidad de medida cabe en la figura (medición directa), y posteriormente comparar los resultados obtenidos a partir de las mediciones con distintas plantillas. Este método permitiría a los alumnos comprender el concepto de área de una figura dada y obtenerla de manera aproximada.

La identificación de un patrón al medir figuras de diferente tamaño con una misma malla podría observarse y generalizarse en fórmulas que posteriormente (medición indirecta) permitieran obtener el área de figuras regulares (NTCM, 2000/2003, p. 178). En este caso, los estudiantes estarían haciendo uso de una medición indirecta basada en la medición de otros atributos del objeto o figura (longitudes de los lados, por ejemplo).

Utilizar métodos como los mencionados anteriormente apoyarían la comprensión de área de las figuras tanto regulares como irregulares (como el de una hoja de árbol, por ejemplo), para la cual no existen fórmulas.

[1] Se utilizará una plantilla compuesta por unidades cuadradas (centímetros cuadrados) en la secuencia didáctica que se propone en esta tesis (Anexo 1).

1.1.4 La comprensión del concepto de medición de área en geometría

Se ha identificado que los estudiantes muestran diversas dificultades asociadas con la comprensión del concepto de medición de área: “varios estudios han indicado que los estudiantes tienen dificultad para relacionar y separar los conceptos de longitud, área y volumen” (Battista, 2007, p. 899).

> Los niños tienen dificultad para entender que para medir atributos diferentes, se necesitan unidades distintas. Aprender cómo elegir la unidad apropiada es parte importante de la comprensión de la medida. Por ejemplo desde el Prekindergarden hasta el nivel 2, debería aprenderse que la longitud puede medirse mediante instrumentos lineales, pero el área no se puede medir directamente así; deberían ver que para medir áreas necesitaran unidades cuadradas. Los alumnos de los niveles medios deberían aprender que las unidades cuadradas no sirven para la medida de volúmenes, y deberían explorar el empleo de unidades cúbicas. (NCTM, 2000/2003, p. 48)

Es importante que los estudiantes comprendan cómo las decisiones sobre la elección de las unidades y la escala pueden afectar a las medidas (NCTM, 2000/2003) y que toda medida es una aproximación. Muchos niños tienen dificultad para entender las nociones de perímetro y área (Kenney & Kouba, 1997; Lindquist & Kouba 1989). Los profesores tienen que ayudarles a ver las conexiones entre la fórmula y la medida de los atributos del objeto real.

Los estudios (Kenney & Kouba 1997; Lindquist & Kouba 1989, NCTM, 2000/2003) coinciden en que las dificultades de comprensión del concepto de medición de área están asociadas, por un lado con la elección de instrumentos para medir diferentes atributos, así como con la utilización de unidades estándar y no estándar, a las estrategias para medir figuras u objetos complejos, así como con ideas erróneas acerca del concepto de área y a la forma como se ha abordado en el aula el aprendizaje de estos conceptos.

Raghavan (1998) al examinar las ideas de los niños sobre el área y el volumen, identificó aspectos problemáticos específicos, entre los que destaca el hecho de que los niños pequeños tienen nociones elementales sobre figuras geométricas y sus propiedades, como la medición de su perímetro y área; su habilidad de aplicar esas nociones en situaciones escolares es extremadamente limitada; además de que existen dificultades para entender las unidades estándar que se utilizan al medir atributos de las figuras en una, dos y tres dimensiones.

Se ha encontrado que los estudiantes están a menudo confundidos por el hecho de que la conservación de una cantidad implica una compensación en otra cantidad, al parecer debido a la dificultad de coordinar simultáneamente variables interrelacionadas. Aunque los estudiantes parecen ser competentes en la aplicación de las fórmulas (que se han aprendido de memoria), las tareas que requieren la adaptación de procedimientos revelan un conocimiento subyacente frágil y limitado. Los estudiantes no comprenden los principios detrás de las fórmulas, y, como consecuencia, tienen dificultades para reconocer cuándo una fórmula es inapropiada o cómo adaptarla a una situación nueva (Raghavan *et al.*, *ibid*).

El concepto de medición de área es fundamental en la educación matemática de un individuo debido a su relación y aplicación con otros temas y conceptos matemáticos importantes como las operaciones con números, las ideas geométricas, los conceptos estadístico, las nociones de función, variación, longitud, proporción, semejanza, perímetro, altura, área, volumen, escala, unidades de medida, etcétera. Al respecto el NCTM (2000/2003) menciona que:

> Muchos temas de la medida están íntimamente relacionados con lo que los alumnos aprenden en Geometría. En particular, los estándares de medida y geometría abarcan muchos tópicos importantes de los niveles medios, como son la semejanza, el perímetro, el área, el volumen, y la clasificación de figuras según la longitud de sus lados o la medida de sus ángulos. La medida está también ligada a ideas y destrezas numéricas, algebraicas, y el análisis de datos, en temas como el sistema métrico de medidas, las relaciones entre distancia, velocidad y tiempo, y la recogida de datos a través de mediciones directas o indirectas. (p. 245)

El estudio de la medida es “importante debido a su práctica y presencia constante en muchos aspectos de la vida diaria” (NCTM, 2000/2003, p. 47). Además, “Resalta las conexiones dentro de las matemáticas y entre éstas y otras áreas como las ciencias sociales, las ciencias, el arte y la educación física” (NCTM, *ibid*, p. 47). La medida es:

> una de las aplicaciones más ampliamente utilizadas de las matemáticas. Sirve de puente entre dos áreas importantes de las matemáticas escolares: la Geometría y el número. Las actividades de medición pueden, simultáneamente, enseñar habilidades importantes de cada día, reforzar el conocimiento que tienen los alumnos de otros temas de matemáticas, y desarrollar conceptos y procedimientos de medida que serán más tarde formalizados y ampliados. (p. 107)

1.2 PROBLEMA

En la materia de matemáticas 1 en el nivel básico de educación secundaria se abordan temas correspondientes a geometría. En el tercer bloque se estudia el concepto de medición en el eje “Forma, espacio y medida” con el subtema Estimar, medir y calcular (SEP, 2011).

En el bloque 3 del programa de matemáticas (SEP, *ibid*) de educación secundaria se propone que el estudiante debe aprender a resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas y a establecer relaciones entre los elementos que se utilizan para calcular el área de cada una de estas figuras. Se sugiere (SEP, *ibid*) desarrollar en estudiantes del nivel básico de secundaria las competencias matemáticas siguientes:

- Resolver problemas de manera autónoma,
- Comunicar información matemática,
- Validar procedimientos y resultados,
- Manejar técnicas eficientes.

Dada la importancia del tema de medición de áreas, planteada en el apartado de antecedentes, las dificultades que se observan en el aprendizaje de este tema y la necesidad de abordarlo desde una perspectiva que busque la comprensión conceptual y el desarrollo de habilidades para el desarrollo de un pensamiento matemático, como lo marcan los actuales programas de estudio y las tendencias en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, existe una necesidad por diseñar propuestas didácticas que permitan a los estudiantes desarrollar conocimientos en torno al concepto de medición de área. Se requiere la planeación y el diseño de secuencias didácticas para temas como "cálculo de área de figuras planas" que permitan a los estudiantes construir conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas con el concepto de medición de área. Pero además, se requiere que la implementación de las tareas se lleve a cabo en ambientes de resolución de problemas, donde los estudiantes del nivel básico de secundaria del primer grado usen representaciones diversas, argumenten, expliquen y describan situaciones en ambientes de trabajo colaborativo, de tal manera que estos desarrollen competencias como las señaladas por el NCTM (2000/2003) y la reforma curricular (SEP, 2011).

1.3 JUSTIFICACIÓN

De acuerdo con la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), que en 2006 inició en secundaria, los programas de estudios de 2011 presentan una propuesta orientada al desarrollo de competencias y centrada en el aprendizaje de los estudiantes.

Los contenidos matemáticos que se estudian en la educación secundaria se organizan en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico: Forma, espacio y medida y Manejo de la información. El eje en el que se ubica el tema de esta secuencia didáctica es el de Forma, espacio y medida, eje que encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación básica. Es claro que no todo lo que se mide tiene que ver con formas o espacio, pero sí la mayor parte. Las formas se trazan o se construyen, se analizan sus propiedades y se miden.

De acuerdo con el programa de estudio de 2011 de secundaria, la secuencia didáctica a desarrollar, en esta tesis corresponde al primer año de secundaria (SEP, 2011):

3ER BLOQUE.

EJE: Forma, espacio y medida.

Tema: Medida.

Subtema: Estimar, medir y calcular.

Conocimientos y habilidades:

Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas y establecer relaciones entre los elementos que se utilizan para calcular el área de cada una de estas figuras.

Competencias:

Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, Manejar técnicas eficientes.

En los documentos de la Reforma se hace énfasis en la necesidad de que los estudiantes desarrollen no sólo conocimientos, sino también habilidades y actitudes. Esto requiere de la implementación de propuestas educativas que consideren que los estudiantes aprenden no sólo de forma individual, sino colectiva, en comunidades y ambientes de enseñanza y aprendizaje donde estos sean considerados como parte de la comunidad, la cual posee objetivos definidos. La comunicación es un aspecto relevante que permite a los individuos explicar y describir sus propias ideas, validarlas, negociarlas, redefinirlas o bien cambiarlas, lo cual es esencial en el desarrollo del conocimiento.

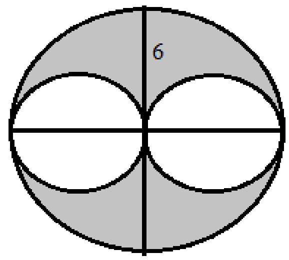
En el nivel básico (secundaria), se pretende que los alumnos usen fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad, desarrollen competencia para resolver problemas de manera autónoma, adquieran habilidades para lograr justificar, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente.

De acuerdo con la experiencia de la docente, entre las dificultades que presentan los alumnos de primer grado de secundaria al momento de abordar el tema de medición de áreas, como se marca en el tercer bloque, se pueden mencionar las siguientes:

- Se ha observado que los alumnos sólo memorizan fórmulas para aplicarlas a figuras regulares tales como el triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio y círculo.
- Mecanizan ciertos procedimientos para resolver problemas de cálculo de área de figuras planas.
- No logran resolver problemas que plantean la medición del área de superficies irregulares, relacionadas con situaciones de la vida real.
- No logran calcular área sin asociar la aplicación de fórmulas.
- No identifican que las figuras se puedan descomponer en otras figuras para que sea fácil el cálculo de área.

Los resultados de la prueba Enlace, aplicada en 2009 a los alumnos de primer año de secundaria de la escuela “Moisés Sáenz Garza”, permitieron identificar que los estudiantes tienen dificultades para contestar correctamente los reactivos que contemplan el eje forma espacio y medida. En este reactivo (Figura 1.1) los alumnos tienen que calcular el área de figuras planas.

El Sr. Pedro quiere construir un jardín circular de 3 metros de radio, pero quiere dos círculos dentro del jardín para usarlos como lugar de fiesta, como lo muestra la figura. Si la parte sombreada es el área que será de jardín, ¿qué área tendra el jardín? Considera Pi = 3.14



A) 113.10 m
B) 106.30 m
C) 98.96 m
D) 14.13 m

REACTIVO PRUEBA ENLACE 2009.

Figura 1.1. Reactivo de la prueba Enlace.

A partir de estos resultados, de la aplicación de la prueba Enlace, se detectó la necesidad de que los estudiantes de primer año de secundaria desarrollen habilidades como analizar, razonar, aplicar y sustentar sus modelos al resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas.

Las dificultades que se observan, en los ámbitos internacional y local, para que los estudiantes de nivel básico desarrollen competencias respecto al concepto de medición de áreas, las directrices que establece la RIEB, y la importancia del tema de medición de áreas en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundaria hacen necesario el diseño e implementación de propuestas didácticas, estrategias y materiales que proporcionen a los maestros herramientas para propiciar el desarrollo de competencias y el aprendizaje de este tema y los directamente relacionados como éste, el de área de figuras planas.

Se requiere desarrollar secuencias que posibiliten a los estudiantes de primer año de secundaria profundizar sus conocimientos sobre el concepto de área. Particularmente, que propicien el que estos estudiantes comprendan, utilicen y apliquen fórmulas para calcular el área de rectángulos, triángulos, trapecios, círculo y, en general, de figuras que se pueden descomponer en las anteriores. Los estudiantes deben desarrollar habilidades para analizar, razonar, aplicar y sustentar modelos que se construyen al resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas.

De forma particular, estas secuencias de aprendizaje deberían estar diseñadas para que cada alumno conozca que medir significa “asignar un valor numérico a un atributo de un objeto” (NCTM, 2000/2003, p. 47), en donde “un atributo mensurable es una característica cuantificable de un objeto” (NCTM, *ibid*, p. 47). Por ejemplo, que “los segmentos de recta tienen longitud, las regiones planas tienen área y los objetos físicos tienen masa” (NCTM, *ibid*, p. 47).

Mediante el estudio de las matemáticas, específicamente de la medición de áreas, debe buscarse que los niños y los jóvenes desarrollen formas de pensamiento que les permitan expresar o representar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se debe buscar que asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y critica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes.

De antemano se reconoce que para lograr lo anterior se requiere no sólo de la elaboración e implementación de una propuesta didáctica, se requiere de un trabajo continuo y en los distintos grados escolares de secundaria. La escuela debe brindar las condiciones que hagan posible una actividad matemática verdaderamente autónoma y flexible donde la participación colaborativa y crítica resulte de la organización de actividades escolares colectivas en las que se requiera que los alumnos formulen, comuniquen, argumenten y muestren la validez de enunciados matemáticos, poniendo en práctica tanto las reglas matemáticas como socioculturales del debate, que los lleven a tomar las decisiones más adecuadas en cada decisión.

En este sentido, es importante diseñar, elaborar y experimentar propuestas didácticas que lleven a los estudiantes de primer año de secundaria a desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes para lograr que profundicen su conocimiento en cuanto al concepto de área y que aprendan a utilizarlo en la resolución de problemas.

1.4 OBJETIVOS

Objetivo General

El objetivo de la tesis es documentar el proceso de diseño e implementación de una secuencia didáctica que permita a los estudiantes construir conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas con el concepto de área de figuras planas. La implementación de la secuencia didáctica se llevará a cabo en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes usen representaciones diversas, argumenten, expliquen y describan situaciones en ambientes de trabajo colaborativo.

Se pretende a través de la secuencia:

> Lograr que los estudiantes profundicen su conocimiento en cuanto al concepto de área. Que comprendan, utilicen y apliquen fórmulas para calcular el área de rectángulos, triángulos, trapecios, círculos y de figuras que se pueden descomponer en las anteriores. Con la secuencia se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades para analizar, razonar, aplicar y sustentar modelos[2] que se construyan al resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas.

Objetivos particulares

En particular, se pretende con esta tesis ofrecer a los docentes una propuesta didáctica que permita a los estudiantes:

- Aprender a medir el área de un rectángulo utilizando una plantilla.

[2] Los modelos son sistemas conceptuales compuestos por elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones. La definición de modelo se encuentra en el Capítulo 2, en el apartado 2.1.1.

- Identificar patrones en los resultados de sus mediciones (directas) basadas en la plantilla y al mismo tiempo logren una comprensión de las fórmulas para calcular el área de rectángulos y triángulos.
- Utilizar y aplicar fórmulas en el cálculo de área de figuras que se pueden descomponer en otras como: rectángulo y triángulo, para facilitar el cálculo del área.
- Comprender que el área de una figura regular o irregular se puede determinar con una fórmula o mediante la descomposición en otras figuras más simples.

Al final de la implementación de la secuencia didáctica se espera que los estudiantes puedan resolver problemas como los siguientes (Figura 1.2).

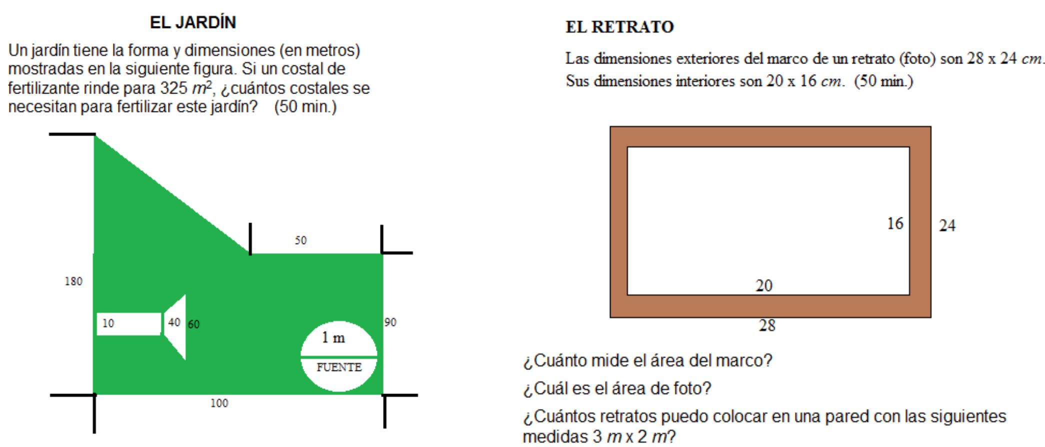


Figura 1.2. Tipo de problemas de la secuencia didáctica.

1.5 ALCANCES Y LIMITACIONES

La tesis se enmarca en una concepción socio constructivista del aprendizaje, en la cual se concibe que la naturaleza del conocimiento depende del contexto sociocultural en que éste se lleva a cabo, además de que es un atributo de los grupos que realizan actividades y de los individuos que participan en los grupos. El aprendizaje es un proceso mediante el cual los individuos o el grupo entran en sintonía con las restricciones y acuerdos de los sistemas social y material con el que interactúan; la motivación y la participación se asocian con el interés de los individuos con las funciones y metas de la comunidad; los ambientes de aprendizaje implican la participación en prácticas sociales de indagación y reflexión que propician en los estudiantes el desarrollo de su confianza como indagadores y aprendedores (Greeno, Collins & Resnick, 1996).

Con la propuesta didáctica no se pretende dar solución definitiva a las diversas problemáticas identificadas en el aprendizaje del concepto de medición de áreas, dado que no se abarca toda la complejidad del tema, pues la secuencia se limita a abordar sólo una parte de los contenidos relacionados con la medición del currículo de secundaria.

El alcance de la tesis consiste en aportar a los docentes una propuesta didáctica que se puede implementar sin requerir mucho material, ni condiciones especiales, se puede trabajar con grupos pequeños o grandes de estudiantes. Sin embargo, está diseñada para aplicarse en un determinado número de horas, que además, es mayor que el destinado en el currículo para abordar este tema, pues el interés es el marcado en los objetivos de este capítulo.

La secuencia no fue diseñada para su implementación mediante el uso de herramientas tecnológicas tales como un software de geometría, lo cual de acuerdo con estudios como el NCTM (2000/2003) podría apoyar una mejor comprensión de los conocimientos aquí enmarcados. La razón es que, en general, las escuelas secundarias no poseen un aula *ex profeso* que cuente con estas herramientas para su uso en las clases de matemáticas. Por lo tanto, se pretende en esta tesis aportar una secuencia didáctica que pueda implementarse en lugares donde no se cuente con la herramienta computacional.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo se hace una revisión de la literatura de investigación alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva pragmática-sociohistórica, la perspectiva de Modelos y Modelación y la Resolución de problemas. Se revisa la teoría de los Van Hiele por su aportación para la comprensión del aprendizaje de geometría.

2.1 LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Greeno, Collins y Resnick (1996) mencionan que la concepción que se posea respecto a la naturaleza del conocimiento tiene implicaciones importantes para determinar las características que deben cuidarse en el proceso de enseñanza y el aprendizaje. Es decir, la naturaleza del aprendizaje y la transferencia[3], la motivación y la participación, la conformación de ambientes de aprendizaje, el currículo y la evaluación están estrechamente relacionadas con la naturaleza del conocimiento matemático. Estos elementos caracterizan las diferentes aproximaciones de aprendizaje que se han desarrollado.

Por ejemplo, la perspectiva pragmática-sociohistórica se centra en la forma en que el conocimiento se distribuye en el mundo entre los individuos, las herramientas, artefactos, los libros que utilizan y las comunidades y prácticas en las que estos participan. La forma de adquirir conocimiento es a través de la participación en prácticas de comunidades. Esta perspectiva retoma aspectos de

---

[3] Se llama transferencia al proceso por el cual un estudiante utiliza sus conocimientos, habilidades y experiencia adquirida en cierto contexto, para resolver un problema o situación nueva o bien de otro contexto: "Los educadores desean que el conocimiento que sea adquirido en la escuela se aplique en la vida de los estudiantes, más que reducirlo a las situaciones del aula donde se adquiere" (Greeno, Collins & Resnick,1996, p. 21).

la perspectiva cognitiva porque considera que aquello que el individuo sabe, se debe a la interacción que efectúa en su entorno.

Las actividades de aprendizaje se caracterizan por ser situaciones problemáticas significativas en términos de la experiencia de los estudiantes. El conocimiento es construido durante las actividades prácticas de grupos de personas que interactúan entre ellas y con su medio ambiente; está distribuido entre la gente y su ambiente, es un atributo de los grupos que realizan actividades y de los individuos que participan en ellos. Hay autoevaluación por parte del sujeto.

2.1.1 El aprendizaje de las matemáticas en la perspectiva de modelos y modelación

Una perspectiva, que coincide con algunos de los aspectos señalados en el párrafo anterior, es la de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003). En esta perspectiva se define a los modelos como:

> sistemas conceptuales (consistentes de elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados utilizando sistemas externos de notación, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal manera que el otro sistema puede ser manipulado o predicho de manera inteligente. (p.10)

El aprendizaje de la matemática es un proceso de construcción de modelos, los cuales se van refinando a medida que los individuos interactúan con situaciones, problemas o su medio ambiente. Estos modelos o sistemas conceptuales pueden ser internos o externos. Estos últimos son utilizados por los individuos cuando comunican lo que aprenden (Lesh & Doerr, 2003). Las experiencias y conocimientos de los individuos se reflejan en los modelos o sistemas conceptuales que el individuo utiliza mientras resuelve/analiza una situación o problema particular. Estas experiencias le proporcionan el marco o espacio de trabajo para realizar inferencias y operaciones mentales. Al interaccionar con su ambiente el sujeto construye modelos mentales internos, que residen al interior del sujeto. Al exteriorizar de alguna forma sus ideas o modelos internos, las personas construyen modelos externos, utilizando alguna forma de representación para comunicarlos. Los modelos internos y externos de un individuo son personales y posiblemente únicos, y reflejan las experiencias del individuo en situaciones relevantes (Lesh & Doerr, *ibid*).

El individuo en su proceso de desarrollo de conocimiento exhibe varios ciclos de entendimiento. En estos ciclos puede observarse cómo extiende, modifica y refina su conocimiento. El aprendizaje de las matemáticas es un proceso que implica una serie de ciclos de entendimiento. Los sistemas conceptuales o modelos van siendo modificados, hasta llegar a modelos más refinados (Lesh & Doerr, 2003).

Los procesos matemáticos que los estudiantes emprenden para llegar a un modelo, o a una solución de un problema son importantes (Aliprantis & Carmona, 2002), ya que generalmente incluyen el desarrollo de descripciones, explicaciones y construcciones (Lesh & Doerr, *ibid*) donde los estudiantes identifican patrones y construyen relaciones. La comunicación es importante para los estudiantes porque permite desarrollar ideas matemáticas al comunicarlas a otros. En la medida que los estudiantes se comuniquen con otros compañeros o el maestro, tendrán la oportunidad de cuestionar su propia comprensión, convencer a otros, revisar y refinar sus ideas y modelos.

La Resolución de problemas caracterizada primero por Polya y posteriormente por Schoenfeld (citado en Lesh, 2010) es vista como parte del proceso de modelación de situaciones reales; el estudiante, al construir modelos, debe identificar y definir las variables, y con ello acotar la situación que desea describir. Los problemas son vistos como parte de los ciclos de comprensión del sujeto al resolver una situación cercana de un entorno real.

2.1.2 La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas

Tanto los problemas de la vida cotidiana como los escolares no rutinarios juegan un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes (Santos, 1997). Es necesario discutir varios aspectos como el quehacer matemático, el tipo de problemas que deben resolverse en el aula y el ambiente en el cual el estudiante debe participar por su influencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Santos, 1997). La transferencia y la generalización son aspectos importantes en el aprendizaje de las matemáticas. El papel del maestro es preparar las tareas que ayuden a problematizar la disciplina por parte de los estudiantes, así como orquestar los ambientes de construcción de conocimiento. El maestro tiene un papel activo en la selección e implementación de las tareas.

Los estudiantes, motivados al resolver las situaciones no rutinarias, tienden a desarrollar sus propias estrategias y a inventar otras nuevas al enfrentarse a nuevos problemas (Santos, 1996, 1997). Se considera importante buscar actividades o tareas que propicien que los estudiantes las “hagan suyas”.

Las actividades matemáticas tienen lugar en un medio donde se valora la participación de los estudiantes en pequeños grupos, la participación individual y la participación grupal de todo el salón de clases, en un medio semejante a una comunidad matemática profesional (Santos, 1997). El ambiente de clases debe motivar y dar el soporte para que los estudiantes desarrollen una comunicación oral y escrita. Así, una actividad natural es que los estudiantes evalúen, cuestionen y critiquen las sugerencias o ideas que se presentan tanto por el instructor como por los mismos estudiantes ¿Una ruta de solución es apropiada? ¿Existe más de una solución o la solución es única? ¿Puedo encontrar otro camino para resolver el mismo problema? ¿Es posible extender el problema o formular nuevos problemas con base en un problema que ya se resolvió? ¿Cómo planear el desarrollo de conocimiento matemático en el aula? ¿Qué elementos considerar?

2.2 LA PLANEACIÓN DIDÁCTICA

Existen propuestas como la de Simon (2004) quien establece determinados criterios que deben seguirse para propiciar el aprendizaje de las matemáticas. En particular, él los agrupa en lo que llama Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (HLT por sus siglas en inglés). Simon (*ibid)* ofrece una descripción de aspectos que considera claves para la planificación de lecciones de matemáticas.

Una HLT consiste "de la meta para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se utilizarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes" (p. 93). Para elaborar una HLT se parte de los siguientes supuestos.

- La generación de una HLT se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los estudiantes involucrados.
- Una HLT es un vehículo para la planificación del aprendizaje de determinados conceptos matemáticos.
- Las tareas Matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos y por lo tanto, son una parte clave del proceso de instrucción.
- Debido a la naturaleza hipotética e inherencia incierta de este proceso, el profesor participa regularmente en modificar cada aspecto de la HLT. (p. 93)

Mediante la estructuración de una HLT se busca que los estudiantes construyan concepciones cada vez más sofisticadas.

El análisis didáctico de Gómez (2002) retoma varios aspectos de las HLT de Simon y a partir de ella propone cómo un profesor, inclusive investigador puede enfrentarse a la tarea del diseño e implementación de actividades para desarrollar conocimiento matemático.

El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción. A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido.

Esta relación simbiótica entre los diferentes análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis. La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje. El profesor pone en práctica estas actividades y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo. El conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Gómez (2002) propone un proceso cíclico para diseñar e implementar actividades para que los estudiantes desarrollen conocimiento matemático en el aula, al que denomina Análisis didáctico. Estos ciclos de diseño e implementación se retroalimentan en cada experiencia. El análisis didáctico se compone del análisis de contenido, del análisis cognitivo, del análisis de instrucción y del análisis de actuación. El análisis de contenido tiene como propósito identificar y organizar los diferentes conceptos y procesos matemáticos que deben ser aprendidos por los estudiantes, para ello es necesario considerar los objetivos educativos que se desean alcanzar, el contenido matemático que está involucrado, las experiencias didácticas del profesor con otros estudiantes, los contextos social, educativo e institucional. El resultado de este análisis sirve de base para realizar el análisis cognitivo, cuyo propósito es identificar los caminos posibles que podrían seguir los estudiantes para aprender los conocimientos y habilidades matemáticas. Esta información servirá de base para el análisis de instrucción, que permite identificar las características de las actividades que podrían ser utilizadas en el proceso de instrucción, y así diseñarlas, seleccionarlas y analizarlas. El análisis de actuación se basa en la información anterior y en aquella que se obtiene de la implementación de las actividades de instrucción. Este análisis proporciona información valiosa para mejorar la propuesta y volver a implementarla.

Si bien es cierto que el docente o investigador debe tener cuidado al diseñar una propuesta didáctica, teniendo conocimiento sobre la naturaleza de las matemáticas, su contenido y métodos, el currículo escolar, aspectos cognitivos del aprendizaje, elementos pedagógicos etc., el proceso de implementación y sobre todo de evaluación es fundamental. La evaluación no debe ser vista como parte final de un proceso, sino debe considerarse como parte del proceso mismo.

2.3 LA EVALUACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La evaluación en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es importante para determinar la profundidad en el desarrollo de conocimiento matemático por parte de los estudiantes. De acuerdo con la teoría de los Van Hiele (citados en Pegg & Davey, 1998) es relevante identificar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en el proceso de desarrollo de conocimiento y observar las fases de crecimiento conceptual, las cuales son atribuidas a características socioculturales que están unidas a planes de enseñanza y aprendizaje. En particular, los Van Hiele están interesados en explicar por un lado cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otro cómo puede un profesor/a ayudar a sus alumnos/as para que mejoren la calidad de su razonamiento. De esta forma, los componentes principales del modelo Van Hiele son los "niveles de razonamiento", que explican cómo se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes cuando estudian geometría, y las "fases de aprendizaje", que constituye su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, con el objeto de facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

Los niveles de razonamiento describen las diferentes etapas cognitivas que atraviesan los estudiantes a lo largo de su formación matemática. Van desde el razonamiento intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo de los Van Hiele (Pegg & Davey, *ibid*) si el aprendiz es guiado por experiencias instruccionales adecuadas (las cuales describimos como fases de aprendizaje en la página siguiente), entonces éste avanza a través de los cinco niveles de razonamiento, empezando con el reconocimiento de figuras (nivel 1), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5).

> Nivel 1. Los estudiantes juzgan una figura por su apariencia y reconocen su forma o figura. En este proceso de identificación, las propiedades de una figura no juegan un papel explícito. (reconocimiento y visualización)
>
> Nivel 2. Los estudiantes identifican una figura por sus propiedades matemáticas, las cuales se consideran independientes entre sí. Las propiedades son descubiertas y generalizadas a partir de la observación de pocos ejemplos. (análisis)
>
> Nivel 3. Las propiedades de las figuras ya no son vistas como si fueran independientes entre sí. Ellos reconocen que una propiedad precede o sigue de otras propiedades. Los estudiantes entienden también las relaciones entre figuras diferentes. (clasificación y abstracción)
>
> Nivel 4. Los estudiantes entienden el papel de la deducción y de los elementos de un sistema axiomático. Ellos usan el concepto de condiciones

> necesarias y suficientes y pueden desarrollar demostraciones más que aprenderlas en forma memorística. Ellos pueden idear definiciones. (deducción)
>
> Nivel 5. Los estudiantes pueden hacer comparaciones de varios sistemas deductivos y explorar diferentes geometrías basadas en varios sistemas de postulados. (rigor) (p. 111)

El modelo es recursivo, es decir, cada nivel se construye sobre el anterior, concediéndose el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas.

Se proponen fases de aprendizaje (Zambrano, 2006) para favorecer el desarrollo del razonamiento del alumno/a de un nivel al inmediatamente superior, mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Estas fases son las siguientes.

- Información

  Esta parte del proceso permite a los estudiantes discutir la naturaleza del contenido matemático o área de conocimiento a ser investigado. También permite a los profesores estar conscientes del conocimiento previo de los estudiantes y su nivel de pensamiento.

  > El propósito de la actividad a realizar es doble, que el profesor conozca los conocimientos que los alumnos poseen del tópico a tratar y que los alumnos sepan qué dirección se dará al estudio a realizar, los tipos de problemas que se vayan a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc. (Zambrano, *ibid*, p. 31).

- Orientación dirigida

  Los estudiantes empiezan a observar el área de conocimiento que será estudiada, mediante la elaboración de cierto número de tareas y materiales que el profesor secuencia cuidadosamente. El papel de los maestros es dirigir las clases para explorar el objeto de estudio. El material y las nociones a trabajar, se seleccionarán en función del nivel de razonamiento de los alumnos/as.

> esta fase como fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente y si las actividades se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento del nivel superior. El propósito es guiar a los estudiantes a través de la diferenciación de nuevas estructuras basadas en aquellas observadas en la primera fase. (Zambrano, *ibid*, p. 31).

- Explicitación

  La necesidad de hablar y discutir el contenido matemático se vuelve importante a partir del resultado de la manipulación de materiales y la resolución de tareas implementadas por el profesor. Al inicio del proceso de aprendizaje los estudiantes utilizan su propio lenguaje. Sin embargo, conforme transcurre el tiempo los maestros apoyan a los estudiantes a refinar su lenguaje y gradualmente a incorporar términos técnicos correctos y apropiados. Por ejemplo, se propicia que el alumno/a se apropie del lenguaje geométrico pertinente. El objetivo de esta fase es "que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel" (Zambrano, *ibid*, p. 32).

- Orientación libre

  Se espera que los estudiantes diseñen su propia manera de resolver o enfrentar las tareas y actividades, las cuales pueden tener múltiples trayectorias de solución. El papel de los maestros es propiciar que surjan diferentes soluciones a los problemas así como la inventiva y el surgimiento de diversos enfoques, "En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores, y generalmente, más complejos" (Zambrano, *ibid*, p. 32).

- Integración

  En esta fase, los estudiantes alcanzan una visión global del área de estudio o conocimiento. Ellos ahora tienen claro los propósitos de la instrucción. Se espera que los maestros los apoyen durante el proceso.

Como resultado de esta quinta fase el alumno/a accede a un nuevo nivel de razonamiento. El estudiante adopta una nueva red de relaciones que conectan sus conocimientos previos con el nuevo conocimiento. Este nuevo nivel de pensamiento que ha adquirido, ha fortalecido y en ocasiones sustituido al dominio de pensamiento anterior.

Con el siguiente diagrama (Figura 2.1) se ilustran los elementos o constructos teóricos que conforman el marco conceptual de este trabajo, las relaciones entre estos elementos y cómo fueron utilizados en el desarrollo de esta tesis.

Las metas de aprendizaje se establecieron al revisar textos de matemáticas. La experiencia del profesor en el ámbito didáctico fue importante. Durante el diseño del plan de actividades de aprendizaje se utilizaron aportaciones de Lesh y Doerr (2003) respecto a la importancia de apoyar el desarrollo de ciclos de entendimiento y refinamiento del conocimiento al resolver problemas o situaciones. Se revisó también la teoría de los Van Hiele y la perspectiva de Resolución de problemas para diseñar el ambiente de aprendizaje y elegir el tipo de problemas o tareas. Las hipótesis del profesor sobre los procesos de aprendizaje se vieron influenciadas por la revisión de literatura previa y la experiencia didáctica y matemática del docente. Las aportaciones de los Van Hiele fueron importantes para la evaluación del conocimiento de los estudiantes porque permitieron evaluar la comprensión de los estudiantes (ciclos de entendimiento) de manera más específica.

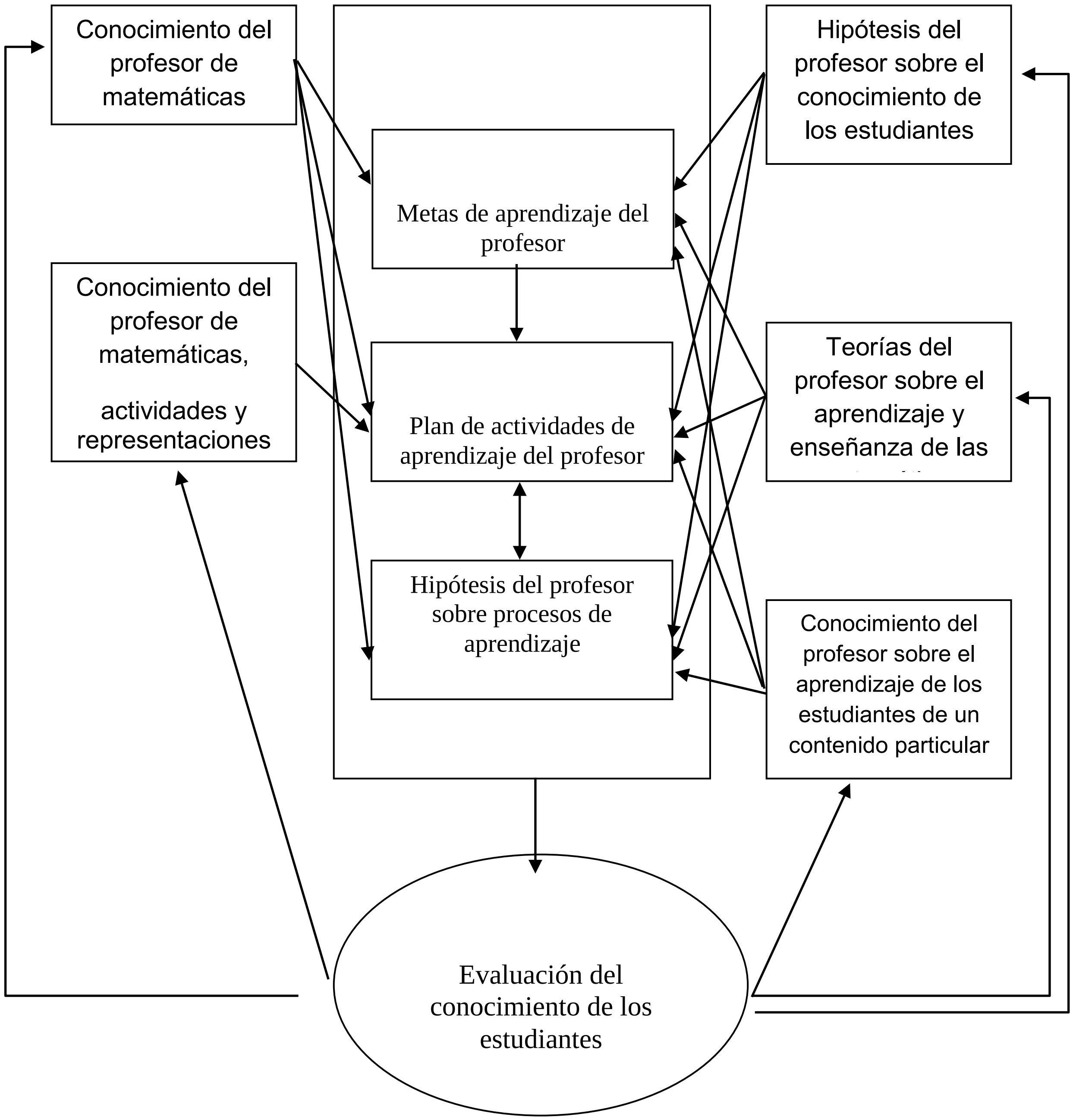


Figura 2.1. Ciclos de enseñanza de las matemáticas, establecidos por Simon (1995).

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describen las características de la propuesta didáctica, la cual permitió dar respuesta a la problemática planteada en el Capítulo 1 y buscar el logro del objetivo de la tesis. Se describe el contexto institucional donde se aplicó la propuesta, las fases del proceso del diseño y los criterios que se siguieron para implementarla, analizarla y evaluarla.

3.1 LA SECUENCIA DIDÁCTICA, EL CONTEXTO INSTITUCIONAL Y POBLACIÓN DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES

La población de estudiantes para quien se diseñó la secuencia didáctica es un grupo de 33 estudiantes de primer grado de una Escuela Secundaria pública. Las edades de los estudiantes se encontraban entre 12 y 13 años de edad.

Los conocimientos previos de los estudiantes incluían: problemas multiplicativos, patrones y ecuaciones, construcción de figuras y cuerpos, proporcionalidad y funciones y nociones de probabilidad.

3.2 FASES DEL PROCESO DE ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Las fases generales que se siguieron para el diseño de la secuencia fueron las siguientes.

1. Se eligió como tema el cálculo de áreas de figuras planas, se determinó el objetivo de la secuencia de aprendizaje, y con ello se desarrolló un instrumento de evaluación. Posteriormente, se diseñaron las actividades de enseñanza y aprendizaje, a las cuales se les dio una secuencia.
2. Se revisó en la literatura de investigación la forma de implementación de las actividades en el aula (papel de los problemas, del profesor y del alumno).
3. Se aplicaron algunas actividades en fase piloto.

4. Se rediseñó la propuesta y finalmente,
5. Se implementó en una segunda ocasión, considerando la revisión de bibliografía y los resultados obtenidos en la fase piloto.

Durante todo el proceso hubo reflexión continua que permitió revisar, extender y modificar esquemas conceptuales en la docente respecto a la propuesta didáctica, proceso educativo y contenido matemático.

3.2.1 El diseño y selección de actividades y problemas

Con base en el objetivo de la tesis, la revisión de literatura y tomando en cuenta los objetivos de la secuencia, se diseñaron las actividades, se propuso el orden de implementación, el ambiente a generar en el aula y la evaluación tomando en cuenta las fases de aprendizaje que se sustentan en la teoría de los Van Hiele. La secuencia didáctica consta de 9 actividades y un examen (Anexo 1). Las actividades fueron planeadas para desarrollarse en 10 sesiones de 50 minutos cada una.

Cada sesión se diseñó para que los estudiantes (en un ambiente de trabajo en equipos y grupal) midieran de manera directa el área de ciertas figuras regulares (primero con una plantilla, luego con la identificación de figuras conocidas dentro de la figura dada), generalizaran su procedimiento de medición (a partir de la plantilla por ejemplo para las sesiones 1 y 2) y abstrajeran, dando sentido o lugar al surgimiento de fórmulas, las cuales permitieran posteriormente calcular de manera indirecta el área de otras superficies no necesariamente regulares.

Se buscó propiciar un proceso de refinamiento de comprensión de las ideas, en particular sobre el procedimiento para calcular el área de las figuras. Primero con apoyo de una plantilla calcularon el área de figuras como rectángulos, posteriormente de triángulos. Usando descomposición en rectángulos y triángulos calcularon el área de los trapecios. Siempre se apoyó para que los estudiantes descompusieran, en figuras previamente conocidas, las nuevas figuras, las cuales podían ser regulares o irregulares. En dos ocasiones se les otorgó a los estudiantes una figura irregular (un jardín), pero la segunda fue un poco más compleja que la primera. La hipótesis era que los estudiantes podrían utilizar sus conocimientos desarrollados previamente para determinar el área de figuras irregulares que requerían la suma y diferencia de áreas de distintas figuras.

En seguida se describe cada una de las sesiones, las actividades que las conformaron y los objetivos de cada una de ellas. Posteriormente, en la sección 3.2.2 se describe la forma de implementación de las actividades en cada una de las sesiones. La secuencia completa puede revisarse en el Anexo 1.

3.2.1.1 Sesión 1

En esta sesión los estudiantes abordarán dos actividades. La actividad 1 consiste en una lluvia de ideas[4], cuya finalidad es determinar los conocimientos previos que los alumnos poseen respecto a las figuras planas regulares e irregulares, y sus nociones sobre el concepto de área. Se espera con una discusión reforzar estos conocimientos.

La actividad 2 consiste en el cálculo del área de rectángulos con el uso de una plantilla. Tiene como objetivo que los estudiantes, al trabajar en equipos de tres personas, interactúen con el proceso de medición del área. Los estudiante deben tomar como unidad de medida los cuadros de una plantilla[5]. Se pretende que los estudiantes identifiquen y relacionen el área de un rectángulo con su largo y ancho. Para ello, se les sugiere sistematizar sus mediciones en una tabla de datos, donde a partir de la identificación de patrones deben observar las operaciones que se requieren para calcular el área de un rectángulo cualquiera. La discusión grupal y la presentación de resultados tienen como objetivo que los estudiantes reflexionen sobre los conocimientos matemáticos involucrados en la

[4] Se entiende por lluvia de ideas que el profesor haga una pregunta a todo el grupo de estudiantes sin cuestionar en el momento las respuestas que estos puedan dar a la pregunta, ni la veracidad de las mismas.

[5] La plantilla es una hoja de acetato de dimensión 6 cm x8 cm, con cuadros de 1x1 cm^2 (Anexo 1).

tarea (cómo medir el área de un rectángulo y la fórmula para calcular el área de éste), así como la generalización de lo aprendido.

3.2.1.2 Sesión 2

La tarea para esta sesión consiste en que los estudiantes al trabajar en binas, midan y calculen el área de figuras planas irregulares (compuestas por rectángulos y triángulos) con el uso de una plantilla. Los objetivos son que los estudiantes interactúen con el proceso de medición de área, considerando como unidad de medida los cuadros de la plantilla para medir las áreas. Se pretende que identifiquen que una figura plana irregular puede descomponerse en otras figuras más simples (rectángulos y triángulos) para poder calcular su área. Los estudiantes deben identificar y justificar el uso de la fórmula del triángulo y rectángulo para calcular el área.

Una vez que las parejas de estudiantes hayan resuelto la actividad se lleva a cabo la presentación plenaria de los resultados y una discusión grupal con el objetivo de que los estudiantes mejoren su comprensión sobre los conceptos e ideas matemáticas involucradas (área del rectángulo y área del triángulo) en la tarea. En particular, se busca mediante la discusión grupal la generalización de sus procedimientos para escribir la fórmula del área de un triángulo.

3.2.1.3 Sesión 3

En esta sesión los estudiantes abordarán dos actividades, las cuales se trabajan en trinas. La actividad 1 es una lluvia de ideas, cuyo objetivo es que los estudiantes continúen con el proceso de descomposición de una figura dada plana irregular en figuras planas regulares, para la obtención del área de la misma. En este caso se muestra a los estudiantes una figura tridimensional: una casa hecha de cartulina. Los estudiantes deben calcular la cantidad de pintura necesaria para pintarla. Ello implica que determinen el área de la superficie de toda la casa. Los estudiantes deben identificar que las caras laterales de una casa son figuras planas regulares (rectángulos y triángulos) y descomponer la figura de la casa en otras figuras regulares conocidas para poder calcular su área. Con base en esta medición, los estudiantes deben determinar la cantidad de pintura que se necesita para pintar la casa.

Al final de la sesión se plantea la presentación y discusión de los resultados y del proceso de solución. La presentación de resultados y la discusión grupal tiene como objetivo que los estudiantes reflexionen sobre conocimientos matemáticos involucrados en la tarea, y refinen su conocimiento al interactuar con sus demás compañeros y comunicar sus ideas y resultados.

3.2.1.4 Sesión 4

El objetivo de la tarea que se propone en esta sesión es que los estudiantes sean capaces de identificar que las figuras geométricas se pueden descomponer en otras figuras planas para facilitar el cálculo del área. En particular, se hace uso del rectángulo y de la diferencia, así como de la suma de áreas. Los estudiantes en equipos de tres deben determinar el número de retratos que se pueden acomodar en una pared con determinadas dimensiones. La presentación de los resultados por al menos un equipo y después la discusión grupal se planea con el objetivo que los estudiantes identifiquen los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea, y refinen su conocimiento al interactuar con sus demás compañeros y comunicar sus rutas o caminos de solución.

3.2.1.5 Sesión 5

La tarea de esta sesión consiste en determinar el número de costales que se necesitan para fertilizar cierto jardín. Los estudiantes trabajarán en equipos de tres personas con la finalidad de identificar figuras planas regulares y figuras planas irregulares. En esta actividad el proceso de medición de área busca promover la descomposición de una figura plana irregular (un jardín) en figuras regulares conocidas. Los estudiantes deben calcular el área de cada una de las figuras regulares mediante el uso de fórmulas conocidas y posteriormente sumar para obtener el área de la figura plana irregular dada. Pero, además, los estudiantes deberán determinar el número de costales que se necesitan para fertilizar el jardín. Se plantea la presentación de resultados y la discusión grupal para apoyar la comprensión del conocimiento matemático involucrado y refinamiento de ideas.

3.2.1.6 Sesión 6

En esta sesión los estudiantes organizados en equipos de tres resuelven un problema que implica obtener el área de trapecios, mediante la descomposición en otras figuras planas regulares (triángulos y rectángulos), lo cual se espera que propicie la identificación y comprensión de la fórmula del trapecio. Se programó la presentación de los resultados y una discusión grupal para que los estudiantes comunicaran y analizaran sus procesos de medición del área.

3.2.1.7 Sesión 7

La sesión 7 está planeada para que en equipos de tres estudiantes se resuelva un problema que consiste en determinar el material que se necesita para construir las alas y el estabilizador de un avión. Para ello, los estudiantes deben obtener el área de trapecios, mediante la aplicación con comprensión de la fórmula para calcular el área de un trapecio, o bien mediante la descomposición de éste en otras figuras regulares (triángulos y rectángulos).

3.2.1.8 Sesión 8

Los estudiantes determinan el costo por realizar un trabajo en un terreno, el cual deben visualizar como la unión de varios trapecios. La actividad se diseñó para llevarse a cabo en equipos de tres. De nuevo, se programó una discusión con grupal con el objetivo de mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea.

3.2.1.9 Sesión 9

El objetivo de la tarea de esta sesión es que los estudiantes, al trabajar en trinas, recuerden cómo se obtiene el área del círculo, mediante la aplicación con comprensión de la fórmula para calcular su área, así mismo determinar el área del andador de pavimento que se encuentra incluida en el círculo. Posteriormente, está planeada la presentación plenaria de los resultados la discusión grupal cuya función es promover la comunicación y reflexión de resultados, además de que permite a los estudiantes refinar su conocimiento sobre el cálculo de áreas al conocer las diferentes formas de pensar de sus demás compañeros.

3.2.1.10 Sesión 10

En esta sesión se aplica el instrumento de evaluación, de manera individual, el cual consiste en determinar el número de costales que se necesitan para fertilizar el jardín. El objetivo es saber si los estudiantes al término de la implementación de la propuesta didáctica identifican que para calcular el área de figuras planas irregulares hay que seguir un procedimiento de medición basado en la descomposición de la figura dada en figuras conocidas; si observan que es posible calcular el área de la figura propuesta aplicando, con comprensión, las fórmulas conocidas.

3.2.2 La implementación

La secuencia se implementó en un ambiente de resolución de problemas. El papel de los estudiantes fue activo al darle solución a los problemas, el papel del maestro se orientó hacia la selección y presentación de las tareas en el aula, así como a la generación de un ambiente de trabajo.

Se trabajó en equipo, en forma grupal y luego individual, de acuerdo con sugerencias de Lesh (2010) y Santos (1999). El proceso de evaluación se desarrollo de acuerdo con la Teoria de los Van Hiele. En cada sesión se seguía el siguiente proceso

- Se entregaba a los estudiantes las actividades para que las resolvieran en equipos de tres.
- Un equipo presentaba los resultados frente al grupo.
- Se discutían los resultados y se cerraba el tema con ayuda del profesor.

- Se pedía a los estudiantes que entregaran al dia siguiente las actividades, pero ahora resueltas en forma individual. Esto con el objetivo de evaluar el desarrollo de conocimiento logrado por cada alumno en cada sesión, así como para evaluar la pertinencia de continuar con las actividades de la propuesta didáctica.

Durante la implementación el profesor propició que los estudiantes desarrollaran actividades centrales del pensamiento matemático entre las que destacan explorar, observar relaciones, formular conjeturas, justificar y comunicar resultados. Lo anterior con el objetivo de que desarrollaran y refinaran su conocimiento.

La tarea extraclase fue importante porque permitía observar el conocimiento adquirido por cada estudiante de forma individual, lo cual en clase no se podía observar con detalle en el trabajo en equipo y en la discusión grupal.

3.2.3 Criterios de análisis y evaluación

Se observó en cada sesión el desempeño de los estudiantes en términos de ciclos de entendimiento (Lesh, 2010). Estos ciclos de entendimiento se relacionaron con los niveles de razonamiento de los Van Hiele (véase Capítulo 2). El aprendizaje se evaluó de acuerdo con la evolución de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior de acuerdo con la teoría de los Van Hiele basado en los procesos de medición de área utilizados por los alumnos para calcular el área.

La docente procuraba conocer durante cada sesión el desarrollo de conocimiento de los estudiantes durante el trabajo en equipo y grupal. Sin embargo, la actividad individual de cada estudiante al final de cada sesión fue fundamental para evaluar la comprensión adquirida de manera individual a lo largo de la interacción en equipo y grupal, y para determinar la pertinencia de continuar con la implementación de la secuencia como estaba programada. De esta manera, la propuesta se evaluaba de manera continua, así como el desarrollo de conocimiento de los estudiantes. La propuesta didáctica incluyó también un instrumento de evaluación que se diseñó para determinar el conocimiento matemático adquirido al final de la propuesta por los estudiantes.

3.2.4 Tipos de evidencias que se analizan y que permiten documentar la solución al problema.

Las hojas de trabajo donde los estudiantes resolvieron los problemas fueron la información para sustentar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes. Éstas se obtuvieron a partir del trabajo por equipo, la tarea individual y el examen final.

La bitácora del profesor, donde se registraron las observaciones del trabajo en equipo y grupal también fue una fuente de información que permitió documentar el desarrollo del conocimiento por parte de los estudiantes, así como su desempeño en el aula, complementó el análisis de las actividades y propuesta didáctica.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se presentan los resultados y el análisis de los mismos derivado de la implementación de la secuencia didáctica en el aula. Se documenta el proceso de aprendizaje de los estudiantes en cuanto al concepto de área, mediante la descripción y el análisis de los procedimientos de los alumnos al resolver cada una de las actividades. Se presentan dificultades y logros de aprendizaje así como el papel del profesor para apoyar el desarrollo de conocimiento. Se inicia con una breve discusión respecto al análisis realizado a partir de la prueba piloto y posteriormente se presenta la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia didáctica (la cual se implementó después de haber sido modificada con base en los resultados de la prueba piloto).

4.1 BREVE ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA EN FASE PILOTO

La implementación de la secuencia didáctica en fase piloto se llevó a cabo con diez estudiantes. El objetivo fue detectar errores de redacción en los enunciados de las actividades propuestas y revisar el orden propuesto de las actividades de la secuencia didáctica. La implementación permitió detectar la necesidad de hacer algunas modificaciones, por ejemplo, se cambiaron las cantidades numéricas utilizadas en las actividades. La secuencia de actividades se reestructuró. Una de las sesiones se eliminó debido a que no era necesaria ya que estaba implícita en la actividad siguiente. Al observar el desempeño de los alumnos en la resolución de las actividades fue necesario también cambiar el orden de algunas actividades por la complejidad que representaban en su resolución para los estudiantes.

4.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA EN UNA SEGUNDA FASE

Los resultados de la implementación de la propuesta didáctica y el análisis de los mismos se detallan a continuación sesión por sesión. Se utilizan los criterios de análisis descritos en el Capítulo 3.

4.2.1 Sesión 1

Los objetivos de esta sesión fueron: Que los alumnos recordaran las figuras planas regulares e irregulares por medio de una lluvia de ideas. Que los estudiantes calcularan el área de rectángulos con el uso de una plantilla. Interesaba que los estudiantes interactuaran con el proceso de medición del área, además de que obtuvieran un resultado en donde los estudiantes debían tomar como unidad de medida los cuadros de la plantilla. La Sesión 1 consistió de dos actividades, las cuales fueron implementadas en el siguiente orden.

4.2.1.1 *Actividad 1*

Con esta actividad se pretendía saber los conocimientos previos de los alumnos respecto a la clasificación de figuras planas, concepto de regular e irregular y nociones del concepto de área. La actividad se diseñó para también reforzar estos conocimientos previos. Teniendo esto en mente, el profesor o docente (D) abordó el tema de área de figuras planas, con una lluvia de ideas.

Tomando como ejemplo un libro preguntó a los estudiantes: “¿qué parte de él es una figura plana?” Los estudiantes respondieron “El rectángulo de enfrente” (se referían al empastado).

El siguiente extracto muestra algunas de las respuestas que dieron los alumnos a las preguntas planteadas.

> D: ¿Hay alguna clasificación de las figuras planas de acuerdo con el número de lados? Si la hay, ¿cuál es?

R: Si, los de cuatro lados, son los cuadriláteros, los de tres lados que son los triángulos, pentágono, hexágono… [*los estudiantes continuaron mencionando más nombres de figuras planas*]

D: ¿Qué podemos medir en las figuras planas?

R: Su área, perímetro, las medidas de la base y la altura [*Respondieron varios estudiantes*]

4.2.1.2 *Observaciones a la actividad 1*

La lluvia de ideas (Sesión 1, actividad 1) permitió que los estudiantes mencionaran algunos nombres de las figuras planas regulares tales como: rectángulo, triangulo, círculo, trapecio. Recordaron que hay polígonos regulares y figuras planas irregulares; mencionaron que en las figuras planas regulares se puede calcular el área con una fórmula y que en las figuras planas irregulares no se puede calcular de esa forma el área.

En resumen, a partir de la participación de aproximadamente 25% de los alumnos en esta actividad, todo el grupo de alumnos recordó nombres de figuras planas: rectángulo, triangulo, círculo, trapecio; que hay polígonos regulares e irregulares, los cuales poseen ciertas propiedades.

Pero no necesariamente los estudiantes sabían cómo calcular el área de cierta figura dada, por lo que se observó que los estudiantes poseían características del Nivel 1 (Visualización o Reconocimiento) respecto a su conocimiento sobre las figuras mencionadas, de acuerdo con la teoría de los Van Hiele.

Después de esta actividad la docente introdujo el tema de cómo medir y calcular el área de rectángulos. Para ello, organizó al grupo en equipos de tres integrantes y les entregó una hoja con la Actividad 2 (Anexo 1).

4.2.1.3 *Actividad 2*

Para desarrollar la actividad 2 de la sesión 1, los integrantes de cada equipo empezaron a trabajar tal como se observa en la Figura 4.1.

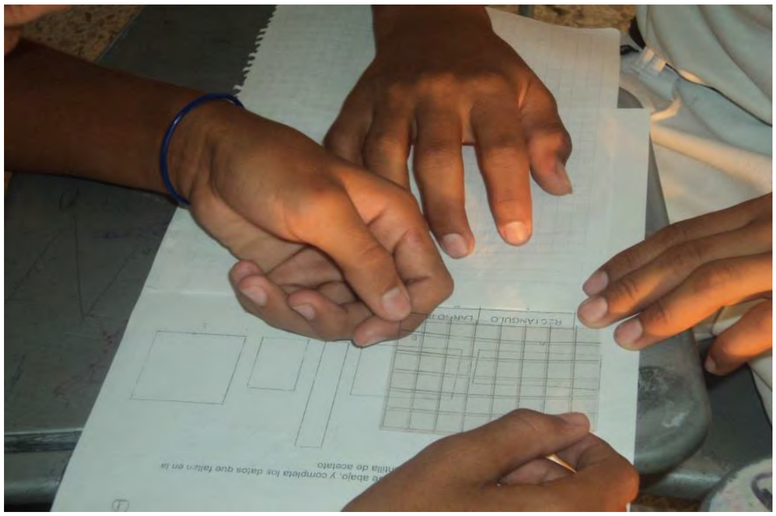
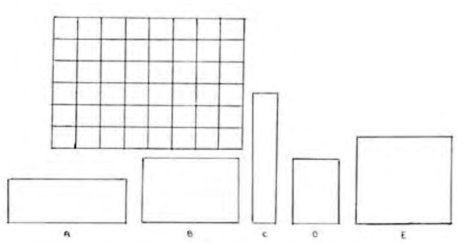


Figura 4.1. Forma de proceder de los estudiantes para medir y calcular el área de las figuras de la Actividad 2, sesión 1.

Colocaron la plantilla haciéndola coincidir con la figura, y empezaron a contar uno a uno los cuadros que formaban el largo y el ancho. Los datos obtenidos por los equipos para completar la tabla de la Actividad 2 se muestran a continuación.

De un total de 10 equipos, 7 de ellos presentaron los mismos resultados que son los siguientes:



RECTÁNGULO	LARGO (*CM*)	ANCHO (*CM*)	ÁREA (*CM*^{2})
A	5 cm	2 cm	10 cm^2
B	4 cm	3 cm	12 cm^2
C	1 cm	6 cm	6 cm^2
D	2 cm	3 cm	6 cm^2
E	4 cm	4 cm	16 cm^2

Figura 4.2. Resultados de siete de diez estudiantes al responder la tabla de la Actividad 2, sesión 1.

Estos equipos al empezar a trabajar agregaron la letra “*b*” (cuyo significado es base) arriba de la palabra “largo” (Figura 4.2) y también agregaron la letra h (cuyo significado es “altura”) a la palabra “ancho”.

Tres equipos presentaron resultados diferentes como se muestra a continuación (Figura 4.3).

RECTÁNGULO	LARGO (*CM*)	ANCHO (*CM*)	ÁREA (CM^2)
A	2 cm	5 cm	10 cm^2
B	4 cm	3 cm	12 cm^2
C	6 cm	1 cm	6 cm^2
D	3 cm	2 cm	6 cm^2
E	4 cm	4 cm	16 cm^2

(a)

RECTÁNGULO	LARGO (*CM*)	ANCHO (*CM*)	ÁREA (CM^2)
A	5	2	10 cm^2
B	4	3	12 cm^2
C	6	1	6 cm^2
D	3	2	6 cm^2
E	4	4	16 cm^2

(b)

RECTÁNGULO	LARGO (*CM*)	ANCHO (*CM*)	ÁREA (CM^2)
A	5 cm	2 cm	10 cm^2
B	6 cm	3 cm	12 cm^2
C	6 cm	1 cm	6 cm^2
D	3 cm	2 cm	6 cm^2
E	4 cm	4 cm	16 cm^2

(c)

Figura 4.3. Resultados de tres de diez estudiantes al responder la tabla de la Actividad 2, sesión 1.

Si se observa la columna de ÁREA de la Figura 4.3 (incisos a, b y c) los cálculos de los equipos de estudiantes son correctos, la diferencia con los trabajos de los otros equipos es que estos equipos tuvieron dificultades con las palabras largo y ancho, lo cual se nota en la ubicación de los resultados de las mediciones obtenidos en las columnas. Sin embargo, los equipos de estudiantes obtuvieron bien el valor del área de los rectángulos (ya fuera que la hayan obtenido contando todos los cuadritos contenidos en el rectángulo o multiplicando longitudes). Inclusive, se observa en la Figura 4.3 una escritura adecuada de las unidades de medición.

Después de completar las tablas, los equipos de estudiantes procedieron a responder las preguntas incluidas en la Actividad 2 (Anexo 1).

En cuanto a la pregunta 1. ¿Es necesario contar uno a uno los cuadros que forman la figura o hay alguna forma de hacerlo sin necesidad de contarlos? Todas las respuestas de los 10 equipos fueron las mismas, aclarando que cada uno de los equipos lo escribió a su manera (Figura 4.4). Los equipos de estudiantes manifestaron que debían multiplicar la base por la altura para obtener el área de un rectángulo. Es decir, tenían claro el procedimiento de medición y obtención del área.

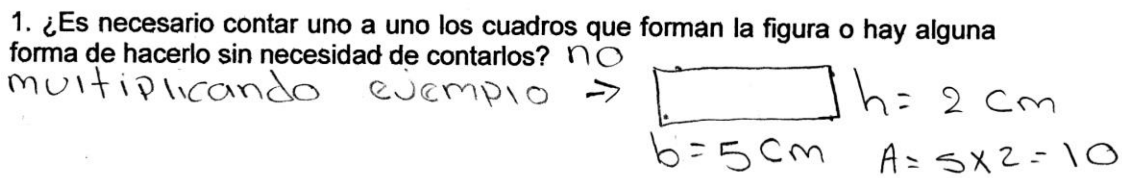

1. ¿Es necesario contar uno a uno los cuadros que forman la figura o hay alguna forma de hacerlo sin necesidad de contarlos? no
multiplicando ejemplo -> h= 2 cm
b=5cm A= 5x2=10

Figura 4.4. Tipo de respuesta de los diez estudiantes a la pregunta 1, sesión 1.

En cuanto a la pregunta 2. ¿Qué datos se necesitan para calcular el área de un rectángulo, usando una unidad de medida?

Cinco de los equipos contestaron lo siguiente (Figura 4.5).

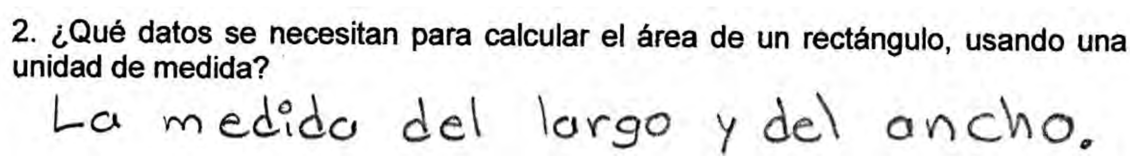

2. ¿Qué datos se necesitan para calcular el área de un rectángulo, usando una unidad de medida?
La medida del largo y del ancho.

Figura 4.5. Tipo de respuesta que presentaron cinco equipos de diez a la pregunta 2, sesión 1.

Tres de los equipos contestaron lo siguiente (Figura 4.6).

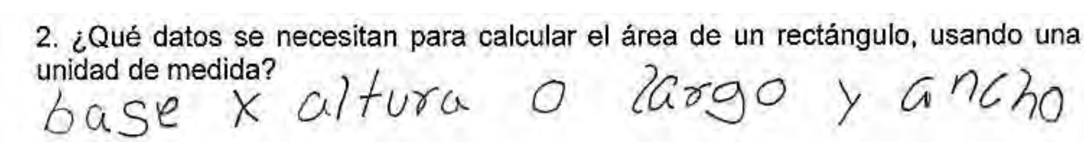
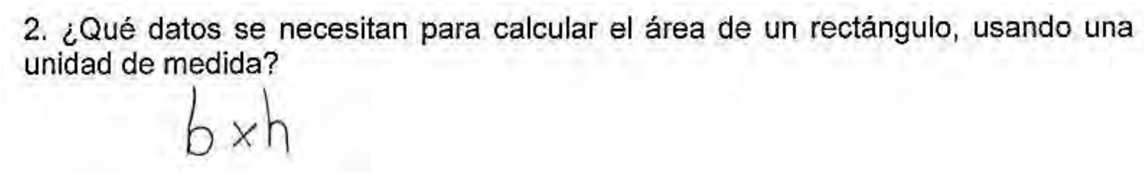

2. ¿Qué datos se necesitan para calcular el área de un rectángulo, usando una unidad de medida?
base x altura o largo y ancho

Figura 4.6. Tipo de respuesta que presentaron tres equipos de diez a la pregunta 2, sesión 1.

Dos de los equipos contestaron lo siguiente (Figura 4.7).

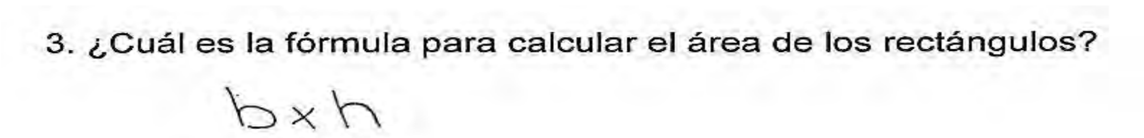

2. ¿Qué datos se necesitan para calcular el área de un rectángulo, usando una unidad de medida?

bxh

Figura 4.7. Tipo de respuesta que presentaron dos equipos de diez a la pregunta 2, sesión 1.

Con ello se confirma que efectivamente los equipos de estudiantes habían identificado y comprendido el procedimiento de medición y cálculo del área de un rectángulo, lo cual generalizaron al multiplicar el largo por el ancho o la base por altura.

La pregunta 3 fue respondida de la manera siguiente por 8 de los equipos (Figura 4.8).

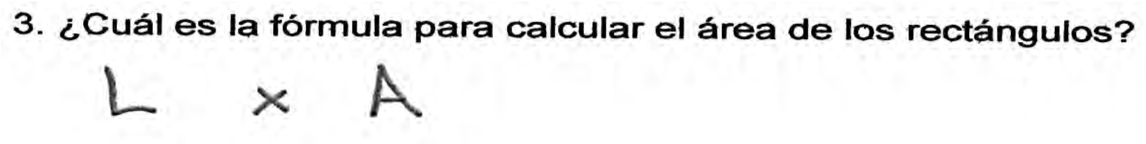

3. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de los rectángulos?

bxh

Figura 4.8. Tipo de respuesta que presentaron ocho equipos de diez a la pregunta 3, sesión 1.

Con esta respuesta se reafirma de nuevo que los estudiantes habían identificado el procedimiento para obtener el área de un rectángulo. Sin embargo, aunque el objetivo de esta sesión no es la representación simbólica, llama la atención notar que los estudiantes no escribieron la fórmula como $A = bxh$, sino que escribieron sólo bxh, lo cual remite al proceso de medición y cálculo del área, es decir, es la operación que se requiere llevar a cabo para obtener el área del rectángulo.

Otros dos equipos contestaron la misma pregunta 3 de la siguiente manera (4.9).

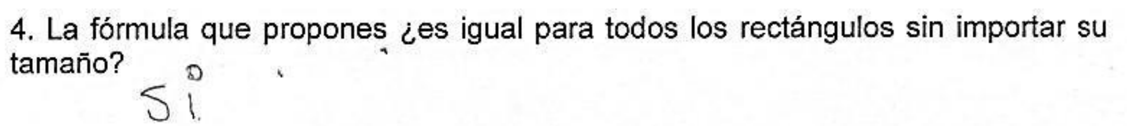

3. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de los rectángulos?

L x A

Figura 4.9. Tipo de respuesta que presentaron dos equipos de diez a la pregunta 3, sesión 1.

Aunque se observa la identificación del tipo de operación que debían realizar, de nuevo no escribieron la fórmula $A = bxh$ sino que representaron el procedimiento como LxA.

De las respuestas de los 10 equipos a la pregunta 4. “La fórmula que propones ¿es igual para todos los rectángulos sin importar su tamaño?” los 10 equipos contestaron de la siguiente manera (Figura 4.10).


4. La fórmula que propones ¿es igual para todos los rectángulos sin importar su tamaño?

Si

Figura 4.10. Tipo de respuesta que presentaron los diez equipos a la pregunta 4, sesión 1.

Hasta el trabajo en equipo, se observó que 70% de los alumnos no tuvieron dificultades con las palabras largo y ancho, ya que las sustituyeron por base y altura y 30% tuvieron dificultades en este sentido, pero no para identificar cómo se obtenía el área de un rectángulo.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma de cómo resolvieron la Actividad 2.

A: Para poder completar la tabla usando la plantilla contamos todos los cuadros que estaban dentro de la figura.

A: Con esos datos llenamos la columna de área, posteriormente sustituimos las palabras de largo y ancho por las palabras de base y altura.

D: ¿Por qué las sustituyeron?

A: Porque son lo mismo y para no confundirnos porque la fórmula es $A = bxh$, posteriormente contamos los cuadros de la base y los pusimos en la columna de largo y contamos los cuadros de la altura y los pusimos en la columna de ancho, por lo que cuando multiplicamos base por la altura nos dio el resultado que ya teníamos escrito de cuando contamos los cuadritos de la figura con la plantilla.

A: La respuesta a la primera pregunta es no.

D: ¿Por qué su respuesta es no?

A: Porque cuando el rectángulo sea muy grande cuando acabamos de contar cuadros con la plantilla mejor utilizamos la fórmula y los datos que se ocupan son b x h o largo y ancho y la podemos aplicar para cualquier rectángulo sin importar su tamaño.

D: ¿Alguien obtuvo resultados diferentes o tienen algún comentario? [*La docente hizo una pausa y luego continuó*]. Si no hay ningún comentario, entonces podemos concluir la clase diciendo que la fórmula para calcular el área de rectángulos es base por altura y que por estar trabajando con figuras rectangulares no es necesario contar uno a uno los cuadritos, pero cuando tengamos figuras como la de un charco ahí si es necesario y entre más pequeños sean los cuadritos más exacta es la medida.

Al término de la discusión grupal, se observó cómo los estudiantes generalizaron su proceso de medición directa, de contar los cuadritos en la malla contenidos en el interior de los rectángulos, a un proceso de medición indirecta y formalizarlo con una fórmula para obtener el área de los rectángulos. Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual. Las soluciones individuales muestran que los estudiantes en general mejoraron su comprensión, dado que entre otros aspectos ya no mostraron dificultades con el largo y el ancho de las figuras presentadas. En este trabajo individual todos los estudiantes midieron de manera directa e indirecta el área de los rectángulos (de manera directa fue con el uso de una plantilla, tomando como unidad de medida los cuadros).

4.2.1.4 *Observaciones sesión 1*

En resumen, a partir del análisis de los trabajos de los equipos en el aula derivados de la actividad 2 se detectó que 70% de los estudiantes identificaron el patrón para calcular el área del rectángulo y, por lo tanto, observaron que el producto de *BxH* les permitía encontrar el área, aunque en lugar de escribir $A = bxh$, sólo anotaron *BxH*.

Después de la discusión grupal se detectó que el resto de los estudiantes escribieron la fórmula $A = bxh$, en sus trabajos individuales. Se podría concluir que los estudiantes, muestran rasgos de pensamiento del nivel 2 (Análisis) de los niveles Van Hiele en cuanto a su conocimiento sobre el rectángulo, pues ampliaron su conocimiento sobre la figura al trabajar con el área de ésta como una propiedad del rectángulo, al medirla de manera directa e indirecta.

4.2.2 Sesión 2

Para desarrollar la sesión 2, los estudiantes trabajaron en equipo y posteriormente discutieron en sesión grupal sus avances. Al observar la plantilla los equipos preguntaron para qué la iban a utilizar. La docente les indicó que era para calcular el área de las figuras dadas y los integrantes de cada equipo empezaron a trabajar tal como se observa en la Figura 4.11.

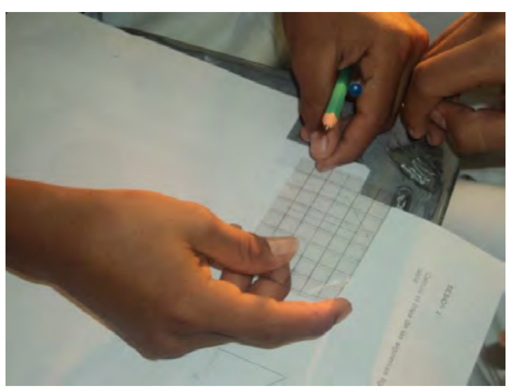


Figura 4.11. Se muestra la forma de proceder de los estudiantes ante la actividad propuesta en la sesión 2.

Colocaron la plantilla haciéndola coincidir con la figura, y empezaron a contar uno a uno los cuadros comprendidos en el interior de la figura dada. Calcularon el área de las figuras, al colocar la plantilla y tomaron como como unidad de medida los cuadros de ésta; contaron los cuadros de la plantilla comprendidos en el interior de la figura dada y triangularon cuando fue necesario. Este procedimiento para calcular el área no era conocido por los estudiantes, quienes al principio manifestaron inconformidad para utilizarlo, ya que querían que se les proporcionaran fórmulas. Quienes las sabían de memoria no podían utilizarlas porque no había datos numéricos y no reconocían como válido otro procedimiento para calcular el área. Los datos obtenidos por los equipos para completar la tabla de la Sesión 2 se muestran a continuación. Los 10 equipos, presentaron los mismos resultados (Figura 4.12).

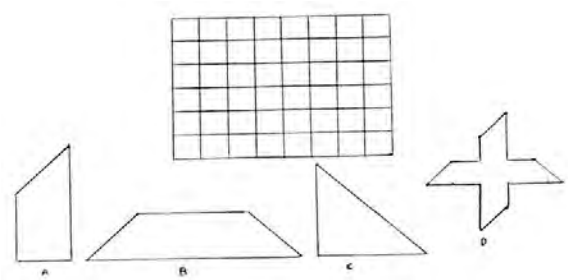


FIGURA	ÁREA (CM^2)
A	8 cm^2
B	12 cm^2
C	8 cm^2
D	7 cm^2

Figura 4.12. Respuesta que presentaron los diez equipos.

En la columna de ÁREA de la tabla de la Figura 4.12 se observa que los resultados de los equipos de estudiantes son correctos, así como las unidades de medición utilizadas.

Los procedimientos y las respuestas a las siguientes preguntas contenidas en la actividad (Anexo 1) se muestran a continuación:

Pregunta 1. La figura A ¿en qué otras figuras planas puedes descomponerla? Seis equipos respondieron igual (Figura 4.13). Los equipos de estudiantes dividieron la figura en un rectángulo y un triángulo.

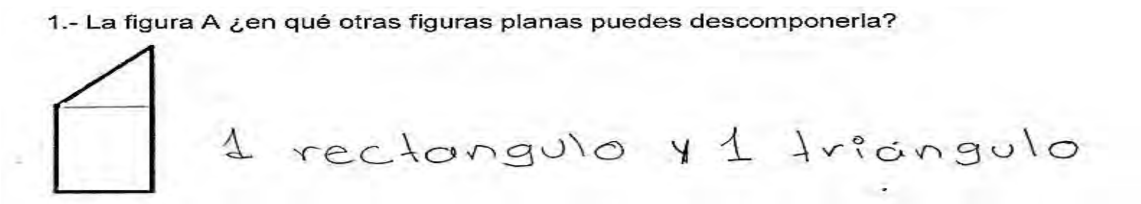


Figura 4.13. Tipo de respuesta que presentaron seis equipos de diez a la pregunta 1, sesión 2.

Dos de los equipos contestaron lo siguiente (Figura 4.14).

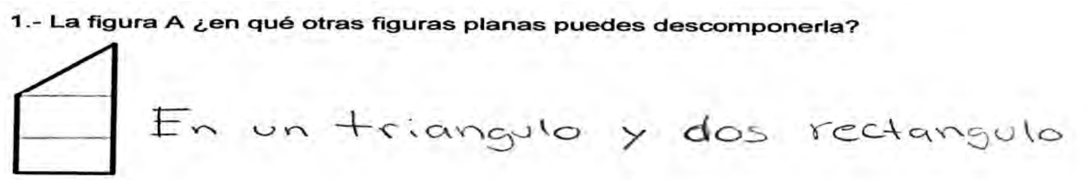


Figura 4.14. Tipo de respuesta que presentaron dos equipos de diez a la pregunta 1, sesión 2.

Uno de los equipos contestó lo siguiente (Figura 4.15):

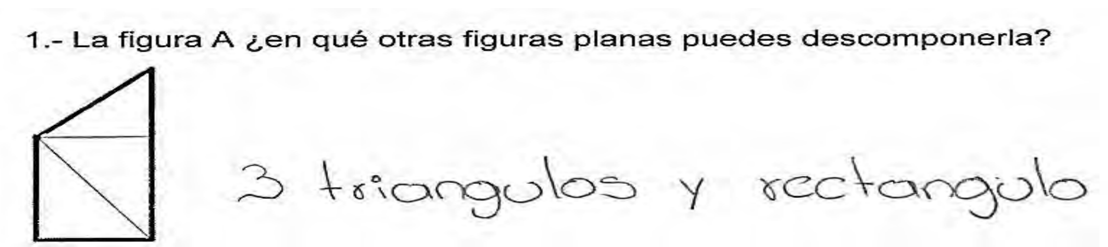


Figura 4.15. Respuesta de uno de los diez equipos de estudiantes a la pregunta 1, sesión 2.

Otro de los equipos contestó lo siguiente (Figura 4.16):

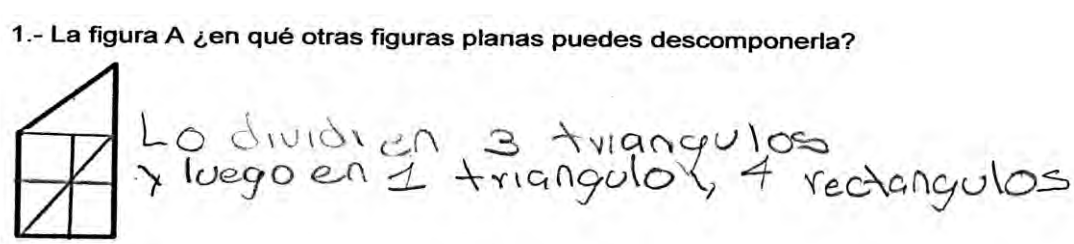


Figura 4.16. Respuesta de otro de los equipos de estudiantes a la pregunta 1, sesión 2.

Se puede observar que las respuestas de los estudiantes y sus procedimientos fueron diferentes en cuanto a la descomposición en figuras planas que hicieron en la figura irregular dada, así como en el número de figuras que dibujaron (figuras 4.13-4.16). Algunos estudiantes utilizaron más figuras, otros menos. Pero todos dibujaron rectángulos y triángulos. Los procedimientos indican que los estudiantes observaron que las figuras planas irregulares dadas en la actividad podían descomponerse en las figuras planas regulares: triángulos y rectángulo.

De las respuestas de los 10 equipos a la pregunta 2. Seis equipos respondieron de la siguiente manera. (Figura 4.17)

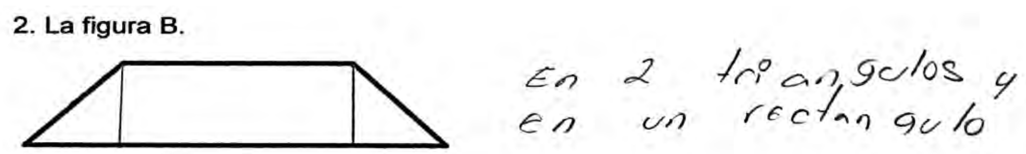
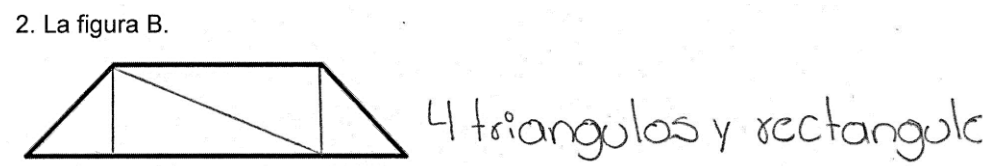


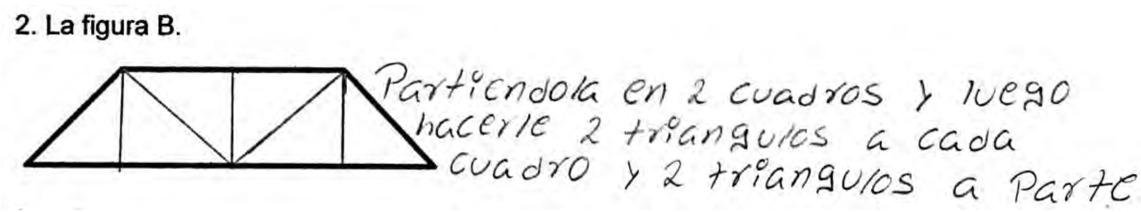
Figura 4.17. Tipo de respuesta de seis de los diez equipos de estudiantes a la pregunta 2, sesión 2.

Cuatro equipos respondieron de la siguiente manera (Figura 4.18):

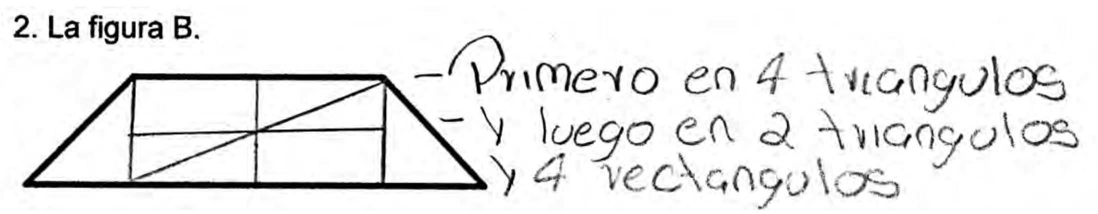
(a)



(b)



(c)



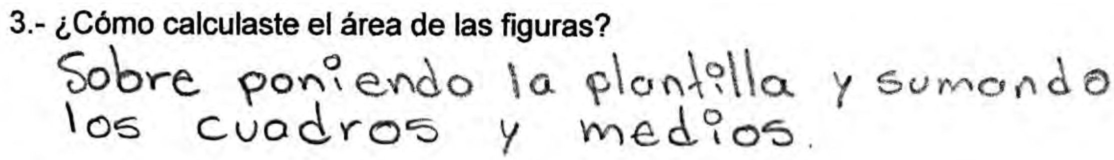
(d)

Figura 4.18. Respuesta de cuatro de los diez equipos de estudiantes a la pregunta 2, sesión 2.

Se puede observar en las respuestas a la pregunta 2 (Figura 4.17 y Figura 4.18, incisos a, b, c, y d), que los estudiantes descompusieron la figura irregular dada y de nuevo reconocieron que cada figura podía descomponerse en rectángulos y triángulos.

Las respuestas a la pregunta 3 fueron las siguientes.

Pregunta 3. ¿Cómo calculaste el área de las figuras? Los 10 equipos contestaron lo mismo (Figura 4.19).



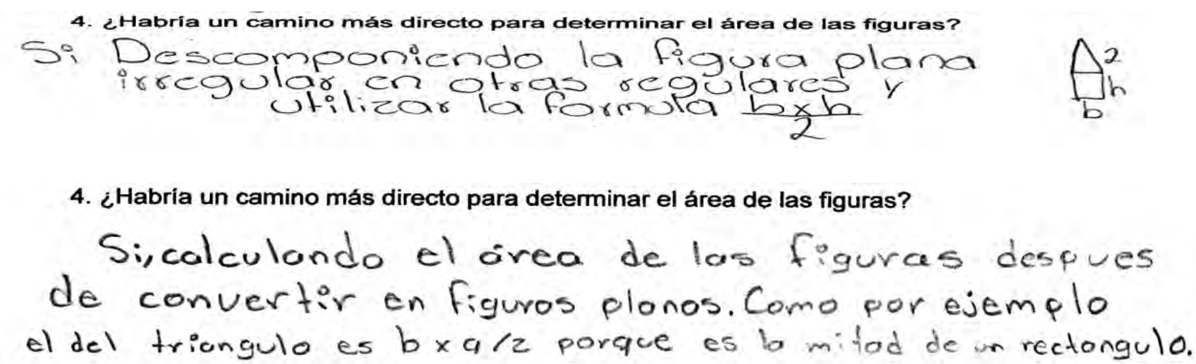
3.- ¿Cómo calculaste el área de las figuras?

Sobre poniendo la plantilla y sumando los cuadros y medios.

Figura 4.19. Tipo de respuesta de los diez equipos de estudiantes a la pregunta 3, sesión 2.

Esta respuesta reafirma lo anteriormente argumentado: Los equipos de estudiantes utilizaron la plantilla para calcular el área de las figuras (Figura 4.19).

De las respuestas a la pregunta 4. ¿Habría un camino más directo para determinar el área de las figuras? Los 10 equipos contestaron lo siguiente (Figura 4.20).



4. ¿Habría un camino más directo para determinar el área de las figuras?

Si Descomponiendo la figura plana irregular en otras regulares y utilizar la formula $\frac{b \times h}{2}$

4. ¿Habría un camino más directo para determinar el área de las figuras?

Si, calculando el área de las figuras despues de convertir en figuros planos. Como por ejemplo el del triangulo es b x a/2 porque es la mitad de un rectangulo.

Figura 4.20. Tipo de respuesta de los diez equipos de estudiantes a la pregunta 4, sesión 2.

Como ya se mencionó, los estudiantes identificaron que una figura plana irregular o regular podía descomponerse en figuras planas regulares (Figura 4.20) como rectángulos y triángulos, aunque su lenguaje aún no era el adecuado para argumentarlo. Los estudiantes todavía tenían dificultades para utilizar las palabras plana, regular e irregular.

Los estudiantes calcularon el área de las figuras y además, observaron que el área del triángulo era el semi producto de la base por la altura. La interacción entre los estudiantes en el trabajo en equipo fue fundamental para que todo el grupo realizara la actividad. La discusión grupal permitió identificar la comprensión en los estudiantes, como se muestra a continuación.

Uno de los equipos pasó a explicar la forma de cómo resolvieron la actividad y preguntas de la Sesión 2 y argumentó lo siguiente.

A1: Para llenar la columna de área, contamos los cuadros completos y los que estaban a la mitad por ejemplo en la figura A, hay dos cuadros incompletos que son triángulos, si los juntamos hacemos un cuadro, al igual que en la figura C.

A2: La figura A nosotros la descompusimos en un triángulo y un rectángulo.

A3: Dividió en 4 triángulos y 2 rectángulos.

D: ¿Algún equipo tiene divisiones o descomposiciones diferentes? [*Todos los equipos dieron más descomposiciones*].

A4: las figuras en esta actividad son planas irregulares y no podemos calcular su área de forma directa [*se referían a utilizar sólo una fórmula*] , entonces si yo quiero calcular el área de la figura de… tengo que calcular el área de 4 triángulos y 2 rectángulos y con mi descomposición sólo voy a calcular la del triángulo y el rectángulo y me va a dar lo mismo.

D: ¿Cómo vas a calcular el área del triángulo?

A2: Con la fórmula $\frac{bxh}{2}$.

D: ¿Seguro?

A2: Si.

D: Demuéstralo.

A2: Porque un triángulo es la mitad de un rectángulo, si trazo en él cualquiera de sus diagonales.

D: [*La docente concluyó resumiendo la actividad llevada a cabo en clase, al decirles que la forma de calcular el área de figuras planas irregulares es descomponiéndolas en figuras planas regulares conocidas*].

La docente concluyó la clase resumiendo la actividad llevada a cabo mediante una discusión grupal. Hizo énfasis en la forma de calcular el área de figuras planas irregulares a partir de descomponerlas en figuras planas regulares conocidas, tomando en cuenta la unidad de medida, y que es importante que ellos sepan de dónde proviene o se genera la fórmula para calcular el área del triángulo, pero sobre todo que la comprendan. Se les dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual. Las soluciones individuales fueron similares a las soluciones que se muestran en las figuras de esta sección 4.2.2. Con ello, se observó que todos los estudiantes relacionaron el uso de fórmulas para calcular el área de forma indirecta con el uso de la plantilla para calcular el área de manera directa.

4.2.2.1 *Observaciones sesión 2*

A partir del análisis de los trabajos individuales de los equipos derivados de la Sesión 2 se detectó que los estudiantes lograron identificar que las figuras planas irregulares (ejemplo, Figura 4.12 d) pueden descomponerse en figuras planas regulares como triángulos y rectángulos. Los estudiantes identificaron la fórmula para calcular el área del triángulo y la justificaron a partir del uso de la plantilla. Además, independientemente de la descomposición de las figuras A y B los alumnos calcularon el área de cada una de ellas, identificando que el área no cambiaba a pesar del número de divisiones que hicieran.

Se puede observar que los estudiantes al involucrarse en el proceso de medición, e identificar los rectángulos y triángulos, pudieron calcular el área de las figuras dadas ya fuera por medio de la plantilla o de sus fórmulas. Por lo que hasta el momento los estudiantes mostraron rasgos de pensamiento del nivel 2 (análisis) de los Van Hiele en cuanto a figuras como el rectángulo y triángulo, pues no sólo visualizaron y reconocieron las figuras, sino que las utilizaron para medir. Es decir, trabajaron la propiedad de área de figuras como el rectángulo y triángulo, así como las relaciones entre estas dos figuras, y observaron las partes que integran la fórmula del triángulo. Esto les permitió determinar que para calcular el área de figuras planas irregulares se puede usar la descomposición en figuras planas regulares.

4.2.3 Sesión 3

La Sesión 3 consistió de dos actividades (Anexo 1), las cuales fueron implementadas en el siguiente orden.

4.2.3.1 *Actividad 1*

El profesor abordó el tema de caras laterales que forman a un cuerpo geométrico, mediante una lluvia de ideas. Para ello, tomó como ejemplo una casa armada y preguntó a los estudiantes: “¿qué figura es?” En seguida les mostró una casa desarmada y volvió a preguntar “¿qué figura es?” Con la casa armada les pidió que contestaran cuáles y cómo eran las caras laterales.

El siguiente extracto muestra algunas de las respuestas que dieron los alumnos a las preguntas planteadas.

> D: ¿Qué figura es? [*Preguntó a los alumnos al mostrarles una casa armada*]
>
> A: Es un cuerpo geométrico ya que está formado por caras, vértices y aristas.
>
> D: ¿Qué figura es? [*Presentó la casa, pero ahora desarmada*]
>
> A: Es una figura plana irregular.
>
> D: ¿Cuáles son las caras laterales? [*Con la casa armada preguntó y los estudiantes mencionaron las caras indicando el nombre de cada una (cuadrado, triángulo y rectángulo)*].

La participación de aproximadamente 25% de los alumnos en esta lluvia de ideas posibilitó a todo el grupo discutir la actividad. Esta discusión permitió que los estudiantes mencionaran que la figura presentada era un cuerpo geométrico formado por caras, vértices y aristas, de igual manera mencionaron los nombres de las figuras que formaban las caras laterales del cuerpo geométrico y que la forma de calcular el área de ese cuerpo geométrico era descomponiéndolo en figuras planas regulares. Mencionaron que hay polígonos regulares y figuras planas irregulares; que en las figuras planas regulares se puede calcular el área de forma directa (se referían a que podían usar una fórmula) y que en las figuras planas irregulares no se puede calcular de forma directa su área (se referían a que no podían utilizar sólo una fórmula).

Los estudiantes observaron que cuando la casa estaba armada era un cuerpo geométrico y cuando estaba desarmada era una figura plana irregular e identificaron las caras laterales de la figura armada.

Después de esta actividad la docente introdujo el tema de cómo calcular el área de rectángulos. Para ello, organizó al grupo en equipos de tres integrantes y les entregó una hoja con la Actividad 2 (Anexo 1).

4.2.3.2 *Actividad 2*

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes mediante un proceso de medición identificaran que las caras laterales de la casa (Figura 4.21) eran figuras planas regulares (rectángulos y triángulos), con las cuales ya habían trabajado anteriormente. La descomposición de la casa les permitió calcular el área total de las caras laterales, así como determinar la cantidad de pintura que se necesita para pintar la casa.

Se planteó la siguiente pregunta ¿cuántos litros de pintura azul se necesitan para pintarla (Figura 4.21)? Los 8 equipos contestaron la pregunta como se muestra en la figura Figura 4.22.

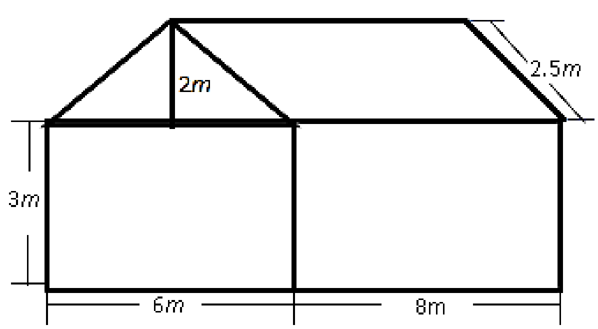
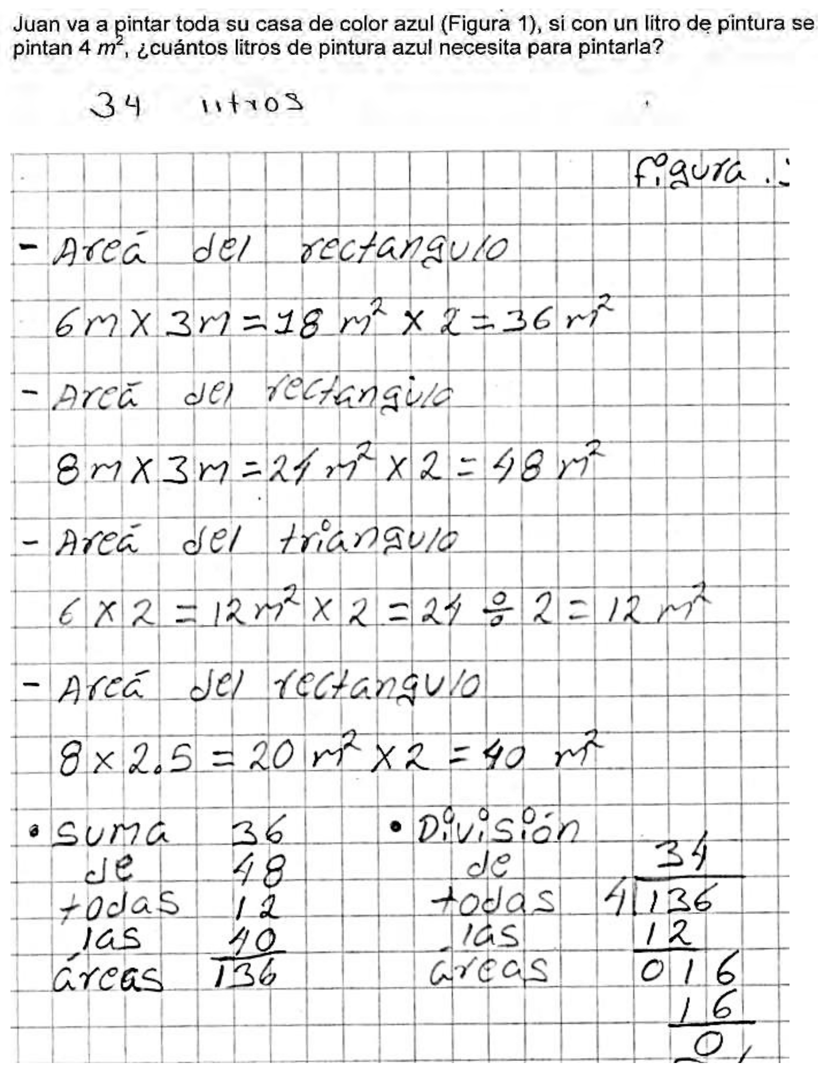


Figura 4.21. Figura entregada a los estudiantes para la Actividad 2, sesión 3.

Los equipos de estudiantes descompusieron la casa, e identificaron cada una de las caras que la formaban, las cuales eran figuras planas regulares. Posteriormente, determinaron el área de cada una y las sumaron para obtener el área total a pintar. Después dividieron el resultado obtenido entre 4, es decir, entre la cantidad de metros cuadrados que se pueden pintar con un litro de pintura (Figura 4.22).



Juan va a pintar toda su casa de color azul (Figura 1), si con un litro de pintura se pintan 4 m^2, ¿cuántos litros de pintura azul necesita para pintarla?

34 litros

figura 1

- Areá del rectangulo

$6m \times 3m = 18\ m^2 \times 2 = 36\ m^2$

- Areá del rectangulo

$8m \times 3m = 24\ m^2 \times 2 = 48\ m^2$

- Areá del triangulo

$6 \times 2 = 12\ m^2 \times 2 = 24 \div 2 = 12\ m^2$

- Areá del rectangulo

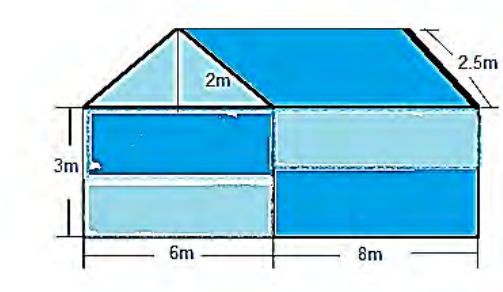
$8 \times 2.5 = 20\ m^2 \times 2 = 40\ m^2$

- Suma de todas las áreas: 36 + 48 + 12 + 40 = 136
- División de todas las áreas: $136 \div 4 = 34$

Figura 4.22. Tipo de respuesta de ocho equipos de ocho a la pregunta 1, actividad 2, sesión 3.

Ante las preguntas siguientes, los estudiantes contestaron como se observa en la Figura 4.23.

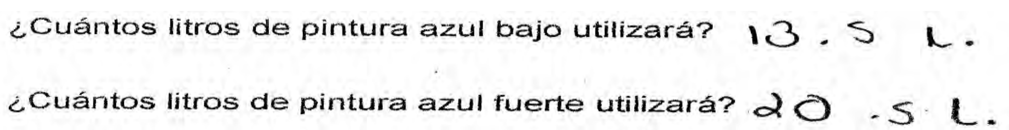
A) Pero después de un paseo y observar una casa pintada con dos colores de pintura, decide pintarla así:



¿Cuántos litros de pintura azul bajo utilizará?

¿Cuántos litros de pintura azul fuerte utilizará?

Los 8 equipos contestaron de manera similar:


¿Cuántos litros de pintura azul bajo utilizará? 13.5 L.

¿Cuántos litros de pintura azul fuerte utilizará? 20.5 L.

Figura 4.23. Tipo de respuestas de 8 equipos de ocho a las preguntas 2 y 3 de la actividad 2, sesión 3.

Al identificar las figuras planas que componen la casa, por medio de la descomposición de figuras, los equipos, para resolver el inciso A) de esta actividad, procedieron a identificar las áreas a pintar con color azul bajo y con color azul fuerte, tal como lo muestra la Figura 4.24.

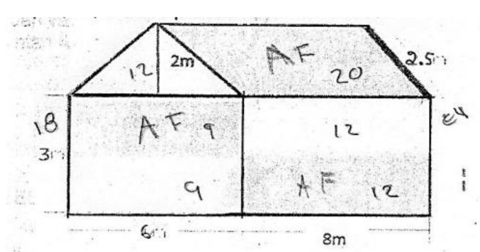
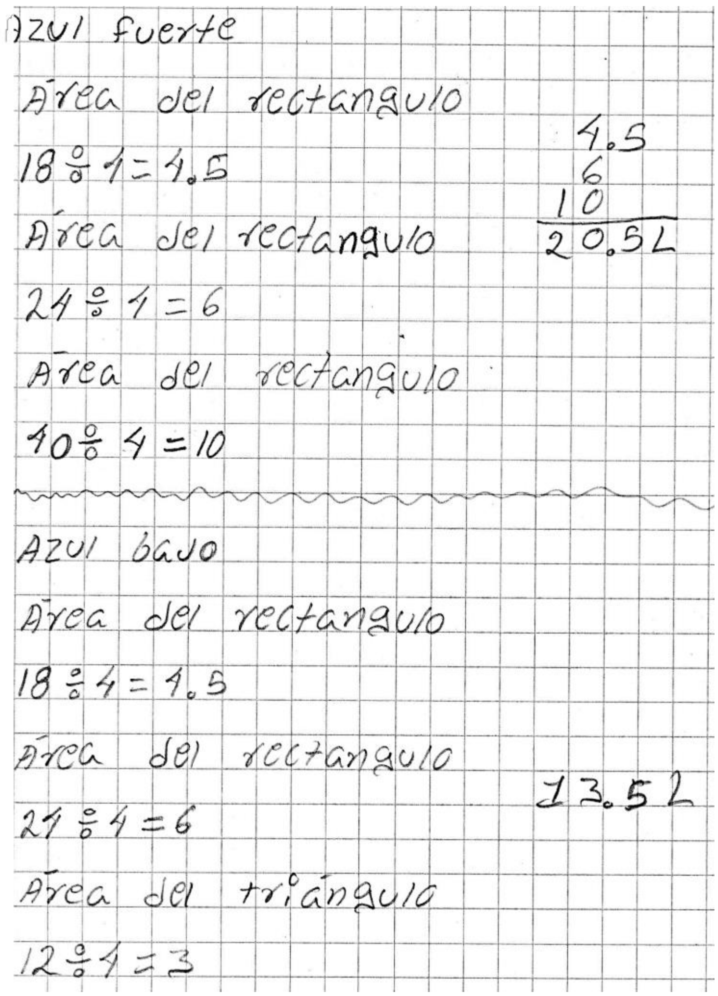


Figura 4.24. Forma de identificar el color de las diferentes partes de la casa.

Los estudiantes indicaron con AF (Figura 4.24) las regiones que debían pintarse de color azul fuerte, y por consiguiente las regiones no marcadas eran las que se pintarían de color azul bajo. En seguida, escribieron el valor de cada área en las regiones de la figura, correspondientes a cada uno de los colores que debían usar. Escribieron 12 m^2 en el triángulo, porque esta región se cubriría en su totalidad de azul bajo. Escribieron 20 m^2 en el techo, porque esa región se cubrirá en su totalidad de azul fuerte, 9 m^2 y 9 m^2 en una de las paredes, porque una franja se pintaría de azul fuerte y otro de azul bajo, 12 m^2 y 12 m^2 en el frente de la casa, porque una franja sería azul fuerte y la otra sería azul bajo. El procedimiento para obtener los litros de pintura se muestra a continuación (Figura 4.25).


Azul fuerte
Área del rectangulo
18 ÷ 4 = 4.5
Área del rectangulo
24 ÷ 4 = 6
Área del rectangulo
40 ÷ 4 = 10

4.5
6
10
20.5 L

Azul bajo
Área del rectangulo
18 ÷ 4 = 4.5
Área del rectangulo
24 ÷ 4 = 6
Área del triángulo
12 ÷ 4 = 3

13.5 L

Figura 4.25. Tipo de procedimiento de los equipos de estudiantes para responder las preguntas 2 y 3 de la actividad de la sesión 3.

Algunos equipos tuvieron dificultades en la comprensión. Por ejemplo, se confundían en la suma para calcular la cantidad necesaria de pintura de color azul bajo y azul fuerte (extracto siguiente, correspondiente a las figuras 4.26 y 4.27).

D:¿Qué partes van de azul bajo? [*Utilizó la casa armada, se las mostró a los estudiantes y les planteó la pregunta*]

A: La mitad de este rectángulo

D: ¿Cuánto mide ese rectángulo?

A: 18m^2

D: ¿Cuánto vas a pintar de azul bajo?

A: 9m^2

D: ¿Cuánta pintura vas a utilizar?

A: Hay que dividir entre 4m^2 y da 2.25 litros pero hay que multiplicar por dos = 4.5 litros

Figura 4.26. Un equipo de estudiantes trabajando la actividad 2 de la sesión 3.

El procedimiento de este equipo fue el siguiente (Figura 4.27).

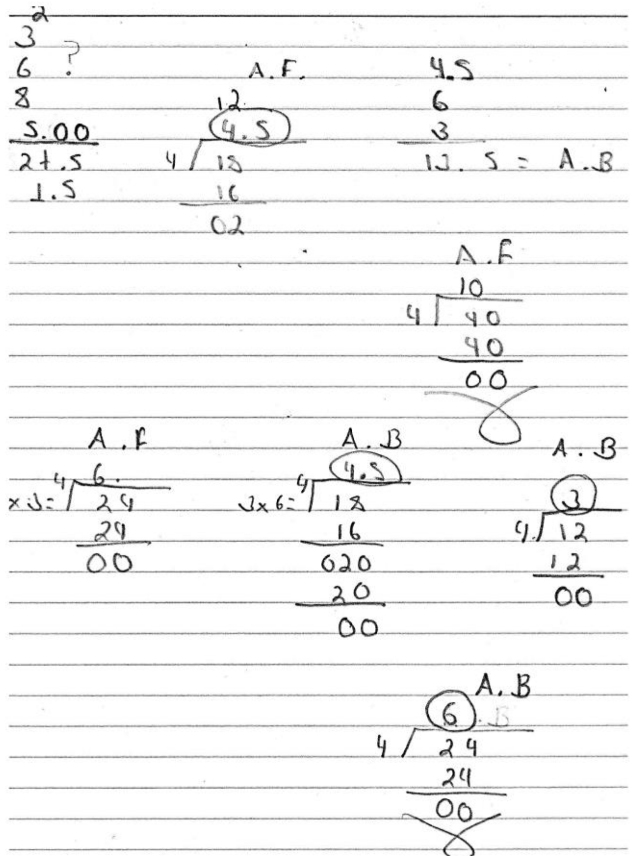


Figura 4.27. Un procedimiento de ocho al resolver la pregunta 2 de la sesión 3.

Quizá su falta de comprensión se relaciona con la forma desordenada de la escritura de su procedimiento (Figura 4.27).

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron la Actividad 2. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes.

A1: Identificamos las caras de la casa por su nombre, calculamos el área de cada una y las multiplicamos por dos porque en el dibujo nada más se ve la mitad de la casa. El resultado lo dividimos entre 4, que son los metros que se cubren con un litro de pintura, y nos dio 34 litros de pintura.

A2: Identificamos las partes que se van a pintar de azul fuerte. Como ya teníamos calculada el área de cada figura, por ejemplo, rectángulo, su área es $8m$ x $3m$ = $24m^2$, pero como solo se va pintar la mitad de azul fuerte se divide entre 2, dando $12m^2$ que se multiplica por 2, porque son dos rectángulos de esa misma medida y se divide entre $4m^2$ y obtenemos los litros de pintura azul fuerte a utilizar en ese rectángulo. Lo mismo se hizo con las demás figuras que llevaban de los dos colores y con las que se pintaban de un solo color solo se divide entre $4m^2$, en donde la suma de las dos pinturas es 34 litros.

D: Entonces todo el proceso de medición desarrollado por sus compañeros nos indica que cuando tenemos una figura plana irregular para calcular su área hay que descomponerla en figuras planas regulares a las cuales hay que calcular su área por medio de fórmulas conocidas y después sumarlas en donde a través del cálculo del área podemos determinar la cantidad de pintura de cada color que se necesita para pintarla.

La docente utilizó la intervención de los alumnos para cerrar la discusión grupal y concluyó la clase propiciando la generalización. Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual. En las soluciones individuales se encontró que los estudiantes identificaron que la casa está formada por rectángulos y triángulos. En sus procedimientos se observó la utilización de las fórmulas para el cálculo del área y sobre todo los estudiantes transferieron lo aprendido al momento de calcular la pintura que se necesitaba para pintar la casa. Los procedimientos individuales fueron similares a los que se muestran en las figuras 4.22 y 4.25.

4.2.3.3 *Observaciones sesión 3*

A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 3 se detectó que los estudiantes lograron diferenciar un cuerpo geométrico de las figuras planas regulares e irregulares que lo formaban, además, los estudiantes calcularon el área de cada figura plana regular que era parte de la casa a través de fórmulas. Los cálculos realizados les permitió dar respuesta a la pregunta número 1 ¿Cuántos litros de pintura se necesitan? En sus procedimientos se observa que efectuaron una suma de áreas de las figuras planas regulares que detectaron.

Independientemente de los procesos de medición seguidos por los alumnos, calcularon el área total de la casa. Aunque inicialmente algunos equipos mostraron confusión, al final los estudiantes relacionaron el área total de la casa con la cantidad de m^2 que se alcanzan a cubrir con un litro de pintura.

En general, con esta actividad, los estudiantes tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer figuras geométricas regulares dentro de figuras irregulares, ampliaron su conocimiento sobre las figuras como el triángulo y rectángulo al identificar que formaban parte de la casa (cuerpo geométrico). También tuvieron la oportunidad de utilizar lenguaje matemático para denotar algunas de las características o propiedades de las figuras geométricas regulares, tal es el caso del área. Los estudiantes además, profundizaron en este concepto al tener que hacer uso de éste para resolver otro problema ¿cuánta cantidad de pintura utilizar para poder pintarla como se solicitaba? Es decir, transferieron lo aprendido a otro contexto.

Lo anterior es importante en el desarrollo del pensamiento geométrico. Algunos logros de los estudiantes de acuerdo con la Teoría de los Van Hiele corresponden al nivel 2. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer las figuras de rectángulos y triángulos; así como utilizar lenguaje matemático para denotar las características específicas de los rectángulos y el triángulo, tal es el caso del área, cuando los estudiantes manifestaron que el cuerpo geométrico (casa) está formado por figuras planas regulares (rectángulos y triángulos), y que conocer el área de estas figuras regulares les permitía obtener el área de la casa. Fue importante la experiencia de aplicar a otro contexto el conocimiento hasta el momento aprendido, se observó la transferencia del conocimiento aprendido a otro contexto cuando determinaron la cantidad de litros pintura que se requerían para pintar la casa. Experiencias de este tipo permiten a los estudiantes la integración de conceptos y la profundización en los mismos, es decir, nuevos ciclos de comprensión.

4.2.4 Sesión 4

Los equipos de estudiantes procedieron a trabajar en la resolución del problema planteado en la sesión 4 (véase Anexo 1). Los 10 equipos contestaron la primera pregunta ¿cuánto mide el área del marco? de la siguiente manera. El procedimiento que utilizaron para llegar a la respuesta se muestra en la Figura 4.29.

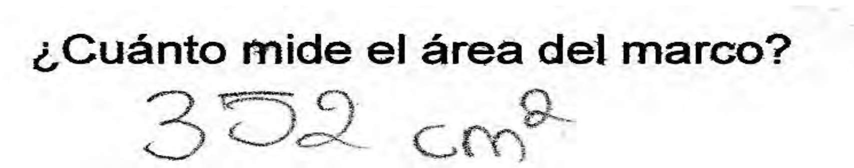


Figura 4.28. Respuesta que diez equipos dieron a la primera pregunta de la actividad de la sesión 4.

PROCEDIMIENTO 1

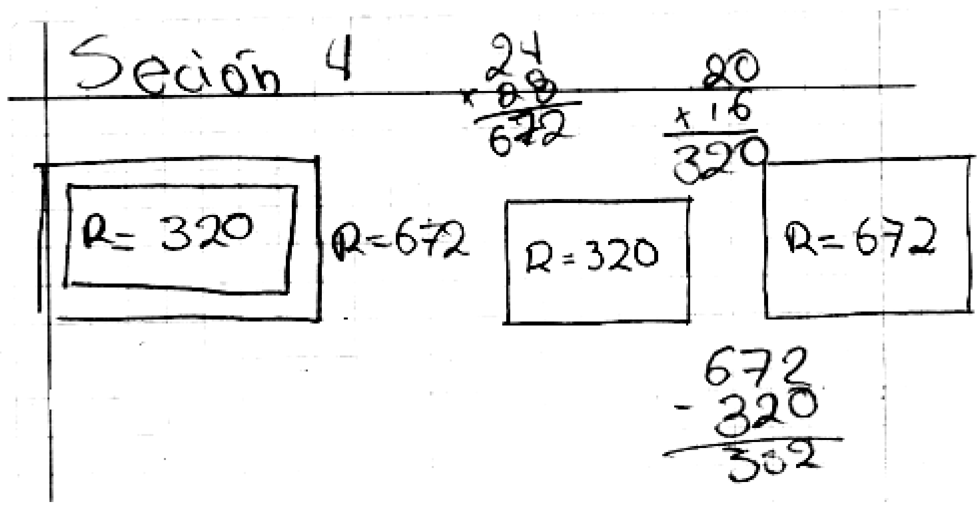


Figura 4.29. Tipo de procedimiento que utilizaron los diez equipos para responder la primera pregunta de la actividad de la sesión 4.

Los equipos de estudiantes descompusieron el marco en dos rectángulos para calcular su área, tal como lo demuestra la Figura 4.29. Para ello, calcularon el área del rectángulo 20 *cm* x 16 *cm* = 320 cm^2, la del rectángulo 28 *cm* x 24 *cm* = 672 cm^2 y restaron ambas áreas: 672 cm^2 – 320 cm^2 = 352 cm^2

Los 10 equipos contestaron de la siguiente manera a la segunda pregunta ¿Cuál es el área de la foto? (Figura 4.30).

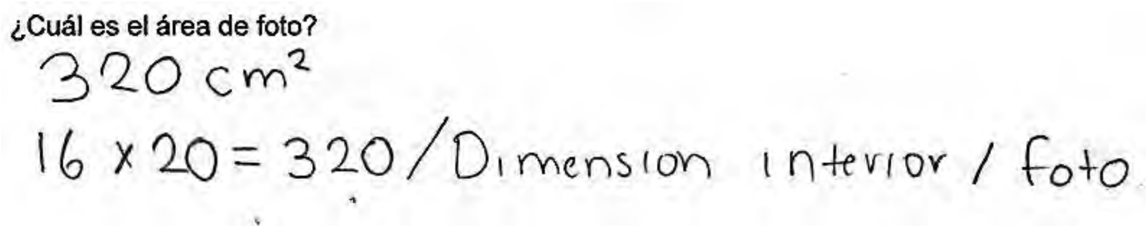


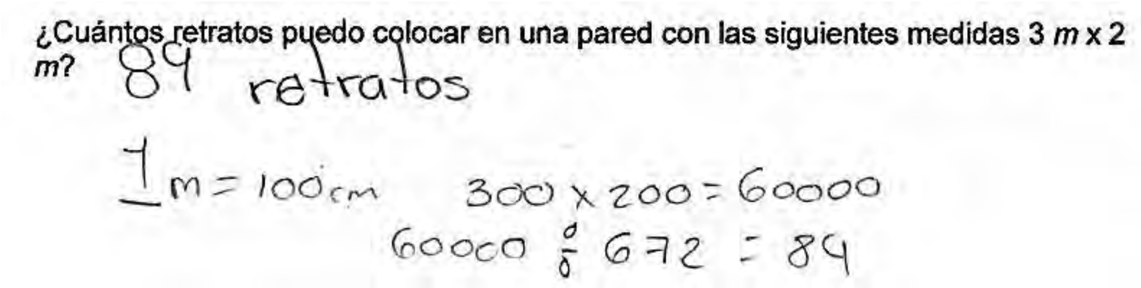
Figura 4.30. Tipo de procedimiento y respuesta de los diez equipos a la segunda pregunta de la actividad de la sesión 4.

Los equipos de estudiantes llevaron a cabo operaciones como las descritas en los párrafos anteriores, similares a la descripción de la Figura 4.27. Identificaron que el marco está formado por dos rectángulos y que el rectángulo interior corresponde al área que ocupa la foto en todo el portarretrato. Ese rectángulo es de dimensiones 20 *cm* x 16 *cm* = 320 cm^2 (Figura 4.30). Al operar no utilizaron las dimensiones (*cm*), sin embargo, si las escribieron en la respuesta.

Algunos equipos presentaron dificultades. Por ejemplo, no sabían qué realizar y la docente procedió a orientarlos de la siguiente manera:

> D: ¿Qué figuras son? [*La docente les pidió que dibujaran el marco tal como está en la hoja de trabajo y que después lo recortaran*]
>
> A: Dos rectángulos.
>
> D: ¿Alguno de ellos representa alguna de las figuras que les están pidiendo su área?
>
> A: Si la foto.
>
> D: Calculen el área y continúen trabajando.

El procedimiento que efectuaron los 10 equipos, para dar respuesta a la tercera pregunta ¿Cuántos retratos puedo colocar en una pared con las siguientes medidas 3 *m x* 2 *m*? (Anexo 1), se muestra en la Figura 4.31.



¿Cuántos retratos puedo colocar en una pared con las siguientes medidas 3 *m* x 2 *m*?

89 retratos

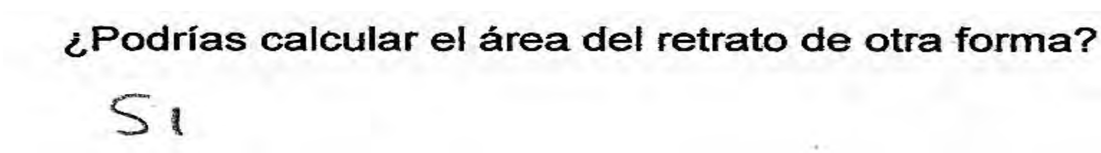
1 m = 100 cm   300 x 200 = 60000

60000 ÷ 672 = 89

Figura 4.31. Tipo de procedimiento y respuesta de los diez equipos a la tercera pregunta de la actividad de la sesión 4.

Los equipos de estudiantes calcularon el área de la pared de 3 *m x* 2 *m*. Pero observaron que el área que obtuvieron era en metros cuadrados, y decidieron trabajar con centímetros cuadrados, tal como lo muestra la Figura 4.31. Convirtieron los metros en centímetros y después dividieron el área obtenida en centímetros entre el área del rectángulo grande o exterior ya calculado (Figura 4.31). Con esta división obtuvieron la cantidad de retratos que se pueden colocar en la pared: 89 retratos.

Los 10 equipos contestaron (Figura 4.32) a la cuarta pregunta ¿Podrías calcular el área del retrato de otra forma?



¿Podrías calcular el área del retrato de otra forma?

Si

Figura 4.32. Tipo de procedimiento y respuesta de los diez equipos a la cuarta pregunta de la actividad de la sesión 4.

Los equipos de estudiantes respondieron que sí. Se podría pensar que esta respuesta significa que sí pueden descomponer de otra manera la figura para calcular su área, pero no se tiene evidencia de cómo lo harían.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó al frente del aula y explicó su procedimiento para resolver el problema de la Sesión 4. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes:

A1: Para poder calcular el área del marco identificamos que es una figura compuesta y la descompusimos en dos rectángulos, calculamos sus áreas en donde el área del rectángulo grande es igual a 28cm x 24cm = $672cm^2$, siendo ésta el área del retrato, después sacamos el área del rectángulo chico 20cm x 16cm = $320cm^2$, siendo ésta el área de la foto.

A2: Posteriormente restamos las áreas de los rectángulos ($672cm^2 – 320cm^2 = 352cm^2$) y obtuvimos el área del marco.

A3: Calculamos el área de la pared en su totalidad 3m x 2m = $6m^2$, pero como el área total del retrato la obtuvimos en centímetros, convertimos los metros a centímetros $6m^2 = 60{,}000cm^2$ y los dividimos entre $672cm^2$, obteniendo 89 retratos que es el número de retratos que cubren a la pared.

D: Entonces, si tenemos una figura compuesta, para calcular su área hay que descomponerla en figuras planas regulares. En este caso pueden ser dos rectángulos con dimensiones diferentes. El área de la figura pedida se puede calcular por medio de fórmulas conocidas y después una resta.

Como se puede observar en la anterior transcripción, la intervención de los alumnos fue utilizada por la docente para cerrar la discusión grupal. Se generalizó a partir de la forma como se dio solución al problema planteado. Se concluyó la sesión y se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema, pero ahora de manera individual. En las soluciones individuales se observó que los estudiantes identificaron los rectángulos que formaban al retrato, calcularon las áreas de manera individual y después las restaron (Figura 4.29).

4.2.4.1 *Observaciones sesión 4*

A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 4 se detectó que los estudiantes, aún cuando inicialmente tuvieron dificultades de comprensión en cuanto a la actividad y cómo resolverla, al final lograron identificar de nuevo que las figuras compuestas se pueden descomponer en otras figuras planas. Los estudiantes calcularon el área de cada figura plana regular que formaba a la figura compuesta, pero en este caso observaron que debían realizar una resta. En sus cálculos utilizaron fórmulas. Los alumnos obtuvieron el área total del marco y relacionaron el área total del marco con el área de la pared a cubrir con retratos. Esto les permitió dar respuesta a la pregunta ¿Cuántos retratos puedo colocar en una pared con las siguientes medidas 3 *m x* 2 *m*?

En general, con esta actividad, los estudiantes tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer figuras geométricas regulares dentro de figuras planas regulares. Utilizaron lenguaje matemático para denotar las características específicas de los rectángulos, tal es el caso del área. Los estudiantes, además, profundizaron en el concepto de área al tener que hacer uso de éste para resolver otro problema ¿Cuántos retratos caben en una pared con determinadas dimensiones? Es decir, se propició que transfirieran lo aprendido a otro contexto.

Algunos logros de los estudiantes corresponden al nivel 2, ya que tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer las figuras de rectángulos en la figura dada, e identificar una de las características específicas de los rectángulos: el área. El área del marco fue vista como la diferencia de dos rectángulos. Los estudiantes observaron en el marco (Figura 4.28) dos rectángulos, los cuales había que relacionar para calcular el área pedida. Es decir, los estudiantes observaron que el hecho de conocer cómo se calculaba el área de un rectángulo les permitía calcular el área del marco.

Este problema permitió a los alumnos transferir, de forma distinta a como se hizo en la sesión 3, su conocimiento y habilidades (adquiridas en las sesiones 1 y 2) a otro contexto. En lugar de sumar áreas de rectángulos realizaron una diferencia para determinar el área del marco de la foto, y la cantidad de retratos que se pueden colocar en la pared.

4.2.5 Sesión 5

Para trabajar esta sesión la docente organizó al grupo en equipos de tres integrantes y les entregó una hoja con la actividad (véase Anexo 1). Los equipos de estudiantes procedieron a trabajar en la resolución de la actividad.

Los 10 equipos contestaron bien (Figura 4.33) a la pregunta ¿Cuántos costales se necesitan para fertilizar este jardín? Pero antes de contestar bien hubo dificultades de comprensión, las cuales posteriormente se mencionan en este apartado.

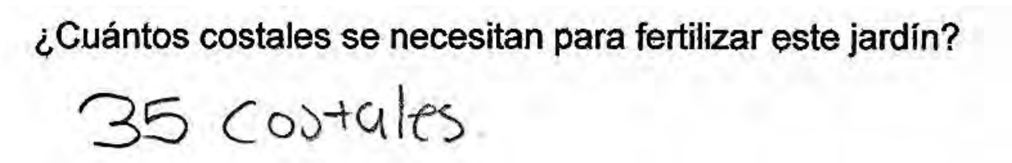
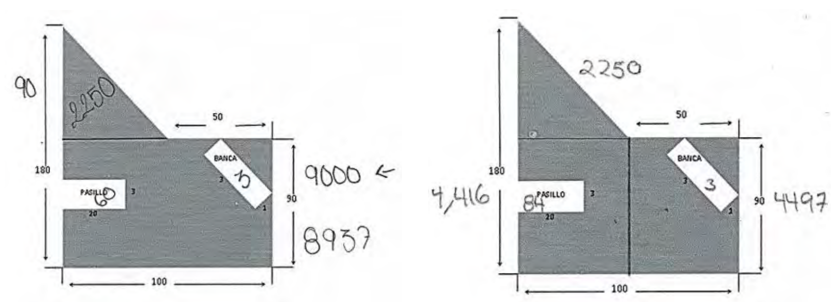


Figura 4.33. Respuesta de los diez equipos a la primera pregunta de la actividad de la sesión 5.

Los procedimientos que siguieron los equipos de estudiantes para responder la pregunta inicial (Figura 4.33) consistieron en la descomposición del jardín como se muestra en la Figura 4.34.

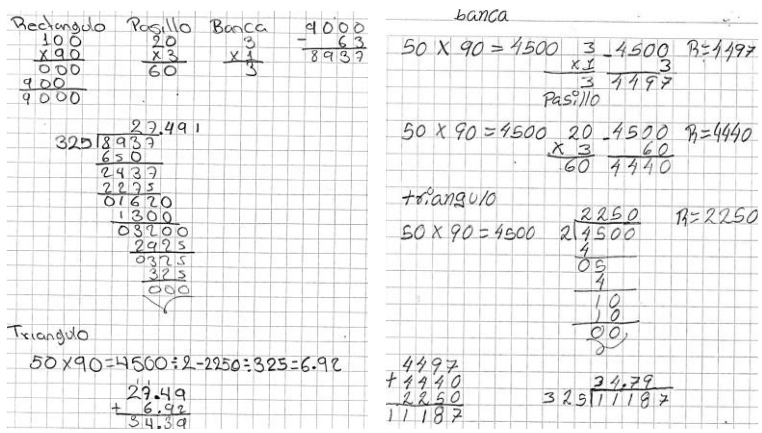


(a) (b)

Figura 4.34. Tipo de descomposición que hicieron los equipos para responder la pregunta inicial de la actividad de la sesión 5.

Siete equipos descompusieron la figura del jardín como se muestra en la Figura 4.34, inciso a, mientras que tres equipos lo hicieron como se observa en la Figura 4.34, inciso b.

Todos los equipos utilizaron la descomposición tal como lo muestra la Figura 4.34 (inciso a y b) para calcular el área del jardín. Se observa que 7 equipos de estudiantes dividieron el jardín en un triángulo y un rectángulo y los tres equipos restantes lo dividieron en un triángulo y dos rectángulos. A pesar de descomponer de manera diferente la figura obtuvieron el mismo resultado: 35 costales. Uno de los procedimientos que utilizaron se muestra en la Figura 4.35 (inciso a y b).



(a) (b)

Figura 4.35. Tipo de procedimiento que utilizaron los estudiantes para responder la pregunta inicial de la actividad de la sesión 45.

Los equipos de estudiantes calcularon el área del rectángulo y del triángulo que son las dos figuras planas en las cuales descompusieron el jardín, posteriormente calcularon el área del pasillo y de la banca; sumaron las áreas del rectángulo y el triángulo y le restaron las áreas del pasillo y la banca. Esa área correspondiente al jardín la dividieron entre el número de metros cuadrados que se alcanzan a cubrir con un costal de fertilizante y obtuvieron el número de costales que se necesitaban para fertilizar el jardín.

Algunos equipos tuvieron dificultades durante el desarrollo de la sesión en cuanto a la comprensión de la actividad. Por ejemplo, no consideraban que el pasillo y la banca no se fertilizarían. Por lo que la docente intervino mediante una pregunta para apoyar la comprensión.

D:¿En este jardín habrá alguna área que no se fertilizará?

A: Si, en donde está el pasillo y la banca.

D: Ya tienen el área total del jardín, entonces ¿Qué tienen que hacer con las áreas del pasillo y la banca?

A: Sumarlas y restárselas a el área del jardín. [*Continuaron trabajando*]

Después de haber calculado el área que se iba a fertilizar los estudiantes no sabían cómo iban calcular el número de costales para fertilizantes, por lo que se procedió a orientarlos

D: Lean nuevamente el problema y díganme que datos son los que les están proporcionando.

A: La forma y las medidas del jardín.

D: Lean nuevamente el problema y díganme que datos son los que les están proporcionando.

A: Y los metros cuadrados que se alcanza a fertilizar con un costal.

D: Díganme lo que les dió el área del jardín que se va a fertilizar.

A: once mil ciento ochenta y siete

[*La docente preguntó por las unidades correspondientes a esta cantidad numérica a lo que respondieron los estudiantes que eran metros cuadrados. La docente siguió preguntando por las unidades de medición correspondientes a lo que alcanzaba a fertilizar con un costal*]

D: ¿y lo que se alcanza a fertilizar con el costal es en?

A: Metros cuadrados entonces debemos dividir. [*Se les dejó para que ellos concluyeran con la resolución del problema*]

En seguida, los 10 equipos contestaron lo mismo a la pregunta 1 ¿Cómo determinaste cuántos costales se necesitan para fertilizar el jardín? (Figura 4.36)

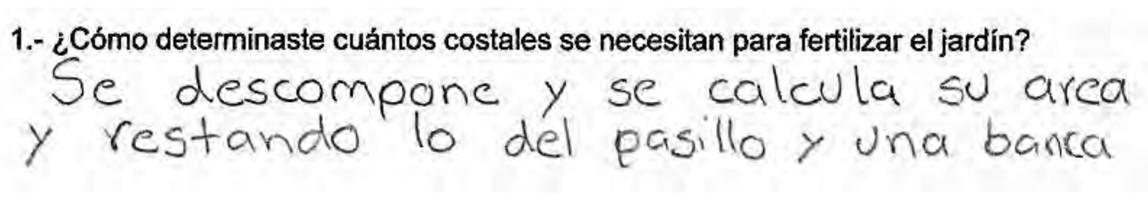

1.- ¿Cómo determinaste cuántos costales se necesitan para fertilizar el jardín?
Se descompone y se calcula su arca y restando lo del pasillo y una banca

Figura 4.36. Respuesta de los diez equipos a la pregunta 1, sesión 5.

Tal como lo muestran las figuras 4.34 (inciso a y b) y 4.35 (incisos a y b), los equipos de estudiantes descompusieron el jardín e identificaron al triángulo, y al rectángulo como figuras planas regulares que formaban al jardín para poder calcular el área de esta figura plana irregular.

Los 10 equipos contestaron de manera similar a la pregunta 2. ¿Cómo los calculaste (el número de costales)? (Figura 4.37)

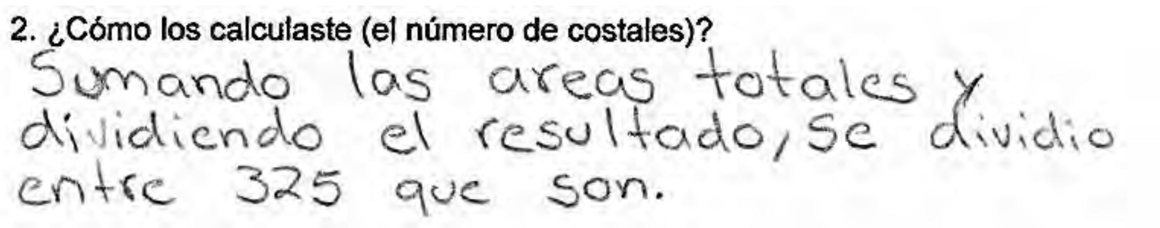

2. ¿Cómo los calculaste (el número de costales)?
Sumando las areas totales y dividiendo el resultado, se dividio entre 325 que son.

Figura 4.37. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 2, sesión 5.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron la actividad. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes:

> A1: Identificamos que el jardín es una figura plana irregular y que para calcular su área hay que descomponerla en otras figuras planas regulares, nosotros la dividimos en un triángulo y un rectángulo.
>
> A2: Calculamos sus áreas, las sumamos y posteriormente la dividimos entre 325 m^2, porque es la cantidad que se puede fertilizar con un costal y obtuvimos los costales que se ocupaban para fertilizar todo el jardín.
>
> D: Entonces para dar solución a este problema podemos darnos cuenta de que se sigue un proceso de medición el cual implica determinar el área contemplando que hay algunas superficies que no se van a fertilizar, y saber que para poder encontrar el número de costales de fertilizantes hay que dividir entre el número de metros cuadrados que se alcanzan a fertilizar con un costal. En donde tenemos que considerar la forma de cómo se calculara el área ya que es una figura plana irregular y que una de las formas es por medio de la descomposición en figuras.

De esta manera se concluyó la sesión generalizando lo trabajado en clases y se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema, pero ahora de manera individual. El objetivo de resolver de manera individual la actividad de esta sesión fue el mismo que en las sesiones anteriores y en las restantes de la secuencia didáctica. Se pretendía revisar que lo discutido a nivel equipo y grupal hubiese sido comprendido en lo individual. En las soluciones individuales, los estudiantes en general dieron respuestas y procedimientos similares a los de la figura 4.35 (b) y 4.36. Lo cual reflejó que los estudiantes pudieron utilizar sus conocimientos adquiridos previamente a esta sesión en un nuevo contexto.

4.2.5.1 *Observaciones sesión 5*

A partir del análisis de los trabajos los estudiantes derivados de la Sesión 5 se detectó que los estudiantes, aún cuando inicialmente tuvieron dificultades de comprensión en cuanto a la actividad y cómo resolverla, lograron calcular el número de costales que se necesitaban para fertilizar el jardín e identificar de nuevo que las figuras compuestas, como la planteada en esta situación, se pueden descomponer en otras figuras planas y esta descomposición permite calcular su área. Además, los estudiantes obtuvieron el área de cada figura plana regular que formaba a la figura compuesta (jardín) a través de fórmulas. Independientemente de la descomposición realizada, los estudiantes desarrollaron un procedimiento para calcular el área total del jardín y relacionarla con la cantidad de metros cuadrados que se alcanzan a cubrir con un costal de fertilizante.

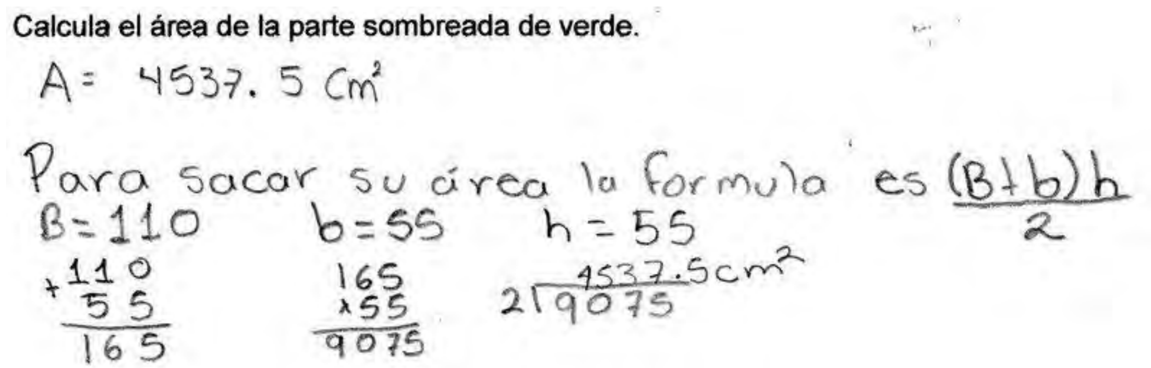
En general, con esta actividad, los estudiantes integraron los conocimientos y habilidades adquiridas en las sesiones anteriores al resolver el problema planteado, ya que visualizaron a las figuras planas regulares como el rectángulo y triangulo dentro de la figura plana irregular, además de utilizar un lenguaje matemático para denotar una de las características específicas de los rectángulos y triángulos: el área. De acuerdo con sus procedimientos los alumnos muestran que una forma de calcular el área de las figuras planas irregulares es por medio de la descomposición y posteriormente la suma o resta de áreas para determinar el área total a fertilizar. Los estudiantes transfirieron lo aprendido para encontrar la cantidad de fertilizante necesaria para fertilizar el jardín. Para ello, dividieron el área obtenida entre los metros cuadrados que se alcanzan a fertilizar con un costal de fertilizante.

Algunos logros de los estudiantes corresponden al nivel 2 de la teoría de los Van Hiele, ya que visualizaron y reconocieron las figuras de rectángulos y triángulos en el jardín e identificaron una de las características específicas de los rectángulos y triángulos como es el área. Los estudiantes utilizaron lenguaje matemático para denotar el área. Debido a que los estudiantes trabajaron con las figuras de rectángulos y triángulos, las diferenciaron y utilizaron como un medio para encontrar la solución al problema, se puede decir que se les brindó a los estudiantes la oportunidad de transferir su conocimiento y habilidades adquiridas. Lo anterior es importante, pues como Lesh (2010) lo señala, la comprensión de los conocimientos de los estudiantes puede mejorar al propiciar que retomen conocimientos y habilidades adquiridas y los apliquen para resolver un problema, el cual en esta sesión fue de más complejidad que los problemas resueltos en las sesiones anteriores, porque iba más allá de calcular un área.

4.2.6 Sesión 6

Para trabajar esta sesión la docente organizó al grupo en equipos de tres integrantes y les entregó una hoja con la actividad (véase Anexo 1); posteriormente, los estudiantes discutieron en sesión grupal sus avances.

La respuesta y el procedimiento que dieron los equipos a la indicación (Anexo 1): Calcula el área de la parte sombreada, se muestra a continuación. Los 10 equipos, obtuvieron los mismos resultados (Figura 4.38)


Calcula el área de la parte sombreada de verde.

A= 4537. 5 Cm²

Para sacar su área la formula es $\frac{(B+b)h}{2}$

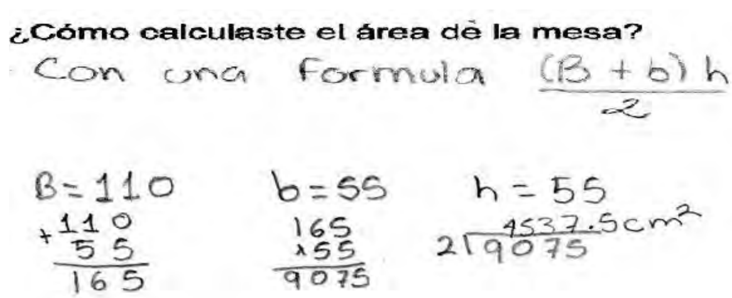
B=110 b=55 h=55

$$\begin{array}{r} 110 \\ +\ 55 \\ \hline 165 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 165 \\ \times 55 \\ \hline 9075 \end{array} \qquad 2\overline{)9075}\ \ 4537.5cm^2$$

Figura 4.38. Respuesta y tipo de procedimiento que llevaron a cabo los estudiantes para responder la primera indicación de la actividad de la sesión 6.

La respuesta obtenida por los equipos de estudiantes (Figura 4.38) es correcta. En su proceso de medición identificaron el significado y el valor de cada una de las literales de la fórmula propuesta para calcular el área, así como las unidades de medición, aunque éstas sólo aparecen en el resultado final.

La respuesta que dieron los equipos a la pregunta ¿Cómo calculaste el área de la mesa? (véase Anexo 1) se muestran a continuación (Figura 4.39). Los 10 equipos, obtuvieron los mismos resultados usando la fórmula para calcular el área de un trapecio.


¿Cómo calculaste el área de la mesa?

Con una Formula $\frac{(B+b)h}{2}$

B=110 b=55 h=55

$$\begin{array}{r} 110 \\ +\ 55 \\ \hline 165 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 165 \\ \times 55 \\ \hline 9075 \end{array} \qquad 2\overline{)9075}\ \ 4537.5cm^2$$

Figura 4.39. Procedimiento para calcular el área de la mesa.

Los procedimientos y las respuestas a la pregunta ¿pudieras calcular el área de la mesa de otra forma? (véase Anexo 1) fueron los siguientes. Seis equipos respondieron de manera similar (Figura 4.40). Seis equipos de estudiantes dividieron la figura en un rectángulo y dos triángulos.

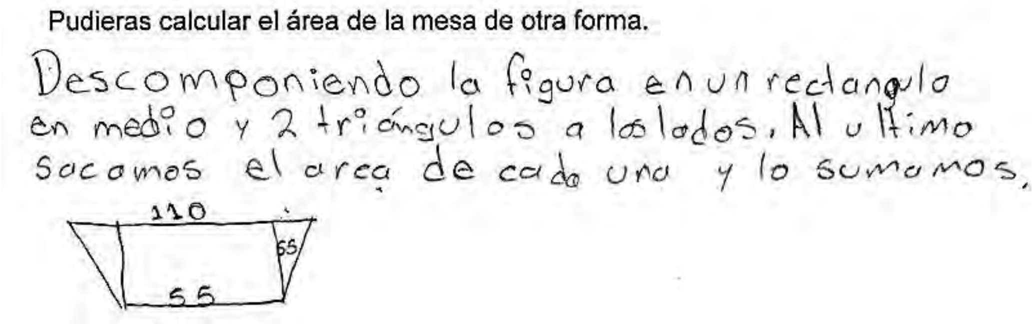


Figura 4.40. Respuesta y tipo de procedimiento que propusieron seis estudiantes para calcular de otra manera el área de la mesa.

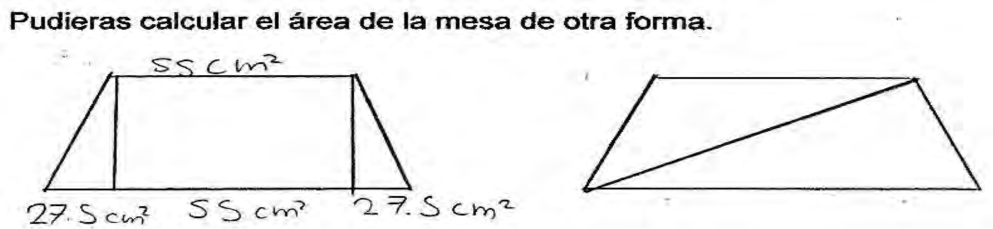


Figura 4.41. Respuesta y tipo de procedimiento que propuso un estudiante para calcular de otra manera el área de la mesa.

Un equipo de diez respondió como se muestra en la Figura 4.41. Este equipo de estudiantes dividió la figura en un rectángulo y dos triángulos, además, también la dividió en dos triángulos.

Tres equipos de diez respondieron de manera similar (Figura 4.42). Los equipos de estudiantes dividieron la figura en un rectángulo y un triángulo.

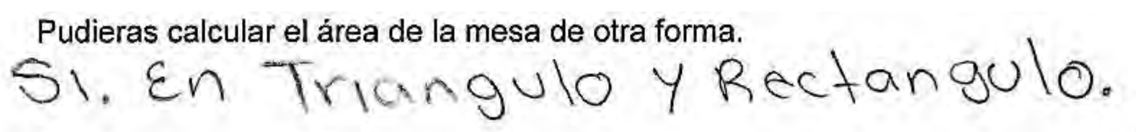


Figura 4.42. Respuesta y tipo de procedimiento que propusieron tres estudiantes para calcular de otra manera el área de la mesa.

Se observa que las respuestas de los estudiantes y los procedimientos planteados fueron diferentes en cuanto a la descomposición en figuras planas que hicieron en la figura plana regular (mesa), así como en el número de figuras que dibujaron (figuras 4.41 y 4.42). Algunos estudiantes utilizaron más figuras, otros menos. Pero todos dibujaron rectángulos y triángulos. Los procedimientos indican que los estudiantes observaron que la figura plana regular, dada en la actividad, podía descomponerse en triángulos y rectángulos.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron el problema. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes:

> A1: Para poder calcular el área de la mesa identificamos que es una figura plana regular (trapecio), recordamos la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$ para calcular su área y sustituimos los valores dados en la fórmula. Para calcular su área y sustituimos los valores dados en la fórmula.
>
> A2: Entonces nosotros calculamos el área de la mesa a través de la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$.
>
> A3: Nosotros observamos la figura (mesa) e identificamos que esta se podía descomponer de dos maneras: dos triángulos y un rectángulo y la otra manera es dos triángulos.
>
> D: En la solución del problema podemos observar que para poder dar la respuesta hay que calcular el área de la mesa, que en este caso es un trapecio, y por lo desarrollado por ustedes, el medio utilizado para calcularla es la utilización de la fórmula del trapecio y la otra forma es por medio de la descomposición de la mesa en dos triángulos y un rectángulo o dos triángulos, calculando el área de cada una de ellas y después sumarlas para obtener el área.

Como se puede observar en la anterior transcripción, la intervención de los alumnos fue utilizada por la docente para cerrar la discusión grupal. Los estudiantes y la docente, relacionaron la fórmula para obtener el área de los trapecios con la descomposición de figuras. Se concluyó la sesión y se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual. En las soluciones individuales se encontró que los estudiantes en general mejoraron su comprensión, dado que ahora no sólo pensaban en la aplicación de la fórmula para calcular el área de una figura plana con forma de trapecio, sino que también observaron que podía ser calculada por medio de la descomposición del trapecio. Los estudiantes aplicaron las fórmulas del rectángulo y el triángulo, además la del trapecio. Para poderlas aplicar descompusieron la figura como se observa en las figuras 4.40 y 4.41.

4.2.6.1 O*bservaciones sesión 6*

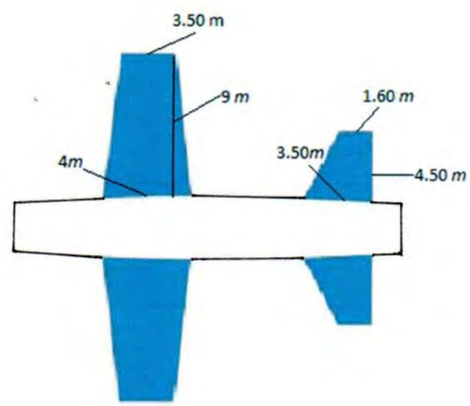
A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 6 se detectó, de nuevo que los estudiantes en su proceso de medición lograron identificar por su nombre al trapecio y calcular su área por medio de la descomposición en otras figuras planas y la aplicación de la fórmula. Los estudiantes escribieron la fórmula e identificaron cada una de las literales que la conformaban, señalaron por ejemplo B= 110, b= 55 (como en la Figura 4.39) y operaron.

En sus trabajos individuales se observaron divisiones del trapecio similares a la mostrada en la Figura 4.40. No escribieron las fórmulas del triángulo ni del rectángulo, sin embargo, calcularon el área del trapecio utilizando estas fórmulas. Independientemente de los procesos de descomposición de la figura utilizados por los estudiantes, identificaron que el área del trapecio no cambiaba a pesar del número de divisiones que hicieran.

Algunos procedimientos de los estudiantes corresponden al nivel 2, en cuanto al conocimiento de la figura regular llamada trapecio, ya que tuvieron la oportunidad de visualizarlo y reconocerlo. Los estudiantes identificaron algunas características específicas del trapecio, como el área, longitudes de sus lados; en particular, las bases y la longitud de su altura. Además, utilizaron lenguaje matemático para denotarlas. Los estudiantes relacionaron las figuras triángulos, rectángulos y trapecios entre sí, diferenciándolas y comparándolas al identificarlas en el interior del trapecio. Lo anterior hizo que fueran vistas como figuras que pueden relacionarse entre sí.

4.2.7 Sesión 7

Para desarrollar la sesión 7 (Anexo 1), los estudiantes trabajaron en equipo y posteriormente discutieron en grupo sus avances. De los siete equipos que se formaron para trabajar, seis obtuvieron el mismo resultado, tal como se muestra en la Figura 4.43. El resultado obtenido por los equipos de estudiantes fue el mismo, aunque sus procedimientos fueron diferentes.



¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y el estabilizador horizontal? (lo que esta sombreado de azul).

90.44 m^2

Figura 4.43. Respuesta que propusieron seis de siete equipos de estudiantes para determinar el material necesario.

Algunos equipos tuvieron dificultades para resolver el problema, porque no identificaron de inmediato que las alas del avión tenían la forma de trapecio. Se les orientó de la siguiente manera:

D: Lee lo que se te pide [*posteriormente se le indicó que observara los datos proporcionados*].

A: Me pide ¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y el estabilizador del avión? Y los datos que me proporcionan son base y la altura.

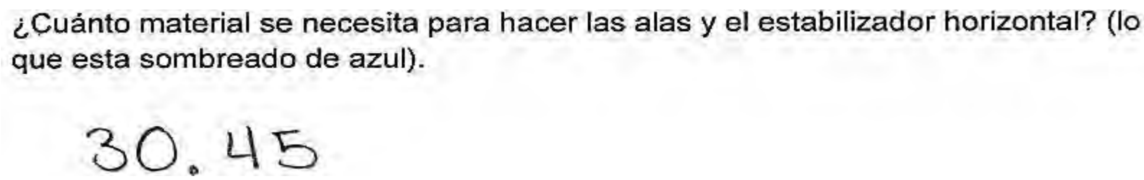
D: Observa bien la figura.

A1: Hay otro dato pero no sé si es lo largo.

A2: Los datos son base mayor, base menor y la altura.

A3: Podemos utilizar la fórmula del trapecio que es $A = \frac{(B+b)h}{2}$. [*Continuaron trabajando*].

El otro equipo, de los siete, obtuvo el siguiente resultado tal como se muestra en la Figura 4.44.

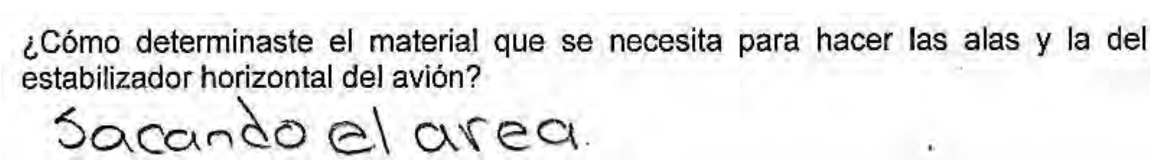

¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y el estabilizador horizontal? (lo que esta sombreado de azul).

30.45

Figura 4.44. Respuesta que propuso uno de siete equipos de estudiantes para determinar el material necesario.

Este equipo de estudiantes obtuvo 30.45 como resultado (Figura 4.44), ya que el tiempo no le alcanzó, no porque hayan tenido dificultades en la resolución del problema, sino porque estaban realizando otra actividad fuera del salón (los habían llamado para contestar una encuesta para alumnos del Colegio de Bachilleres). Como se observa, los integrantes de este equipo dieron como respuesta 30.45, el área de una de las alas del avión. Aunque no se observa qué procedimiento siguieron.

La respuesta de los 7 equipos a la pregunta 2 (véase Anexo 1): ¿Cómo determinaste el material que se necesita para hacer las alas y el estabilizador horizontal del avión? fue la siguiente, tal como muestra la Figura 4.45.

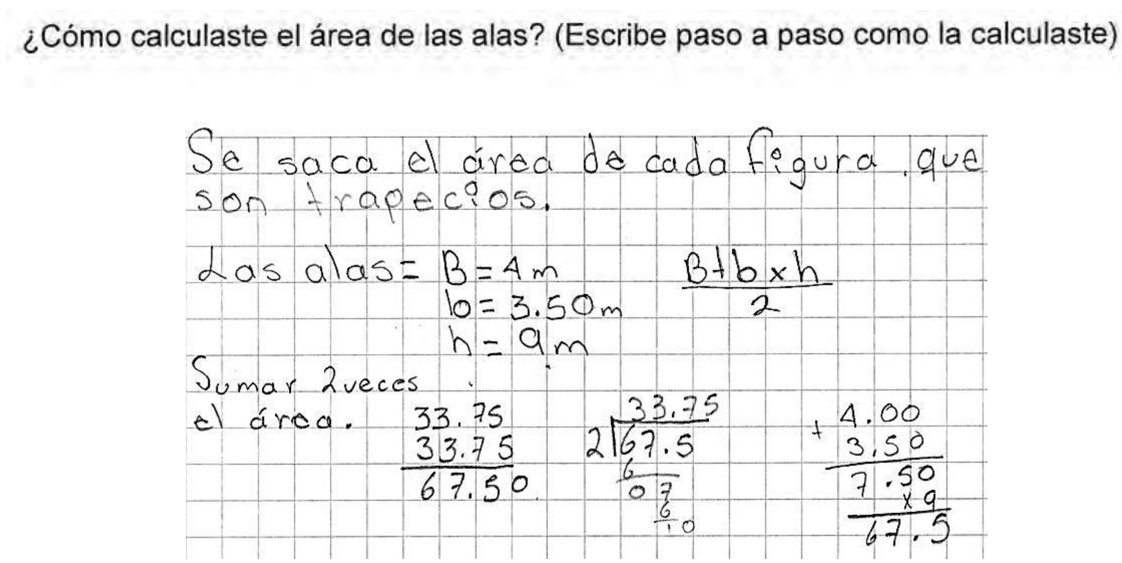

¿Cómo determinaste el material que se necesita para hacer las alas y la del estabilizador horizontal del avión?

Sacando el area.

Figura 4.45. Respuesta de los siete equipos de estudiantes a la pregunta 2.

Se observa en la Figura 4.45 que los alumnos se limitaron a responder calculando el área ("sacando el área") sin especificar el área de las alas y el área del estabilizador, sin embargo, la respuesta no es incorrecta, ya que únicamente se les preguntó cómo.

La pregunta 3 (véase Anexo 1) ¿Cómo calculaste el área de las alas? fue respondida por seis equipos de la siguiente manera (Figura 4.46).


¿Cómo calculaste el área de las alas? (Escribe paso a paso como la calculaste)

Se saca el área de cada figura que son trapecios.

Las alas = B = 4 m
b = 3.50 m
h = 9 m

$\frac{B+b \times h}{2}$

Sumar 2 veces el área.

$33.75 + 33.75 = 67.50$

$67.5 \div 2 = 33.75$

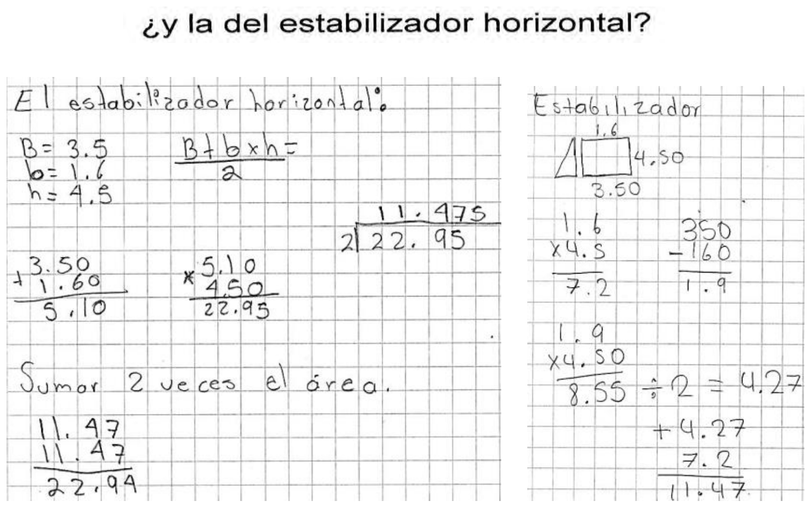
$4.00 + 3.50 = 7.50$

$7.50 \times 9 = 67.5$

Figura 4.46. Respuesta y tipo de procedimiento que propusieron los seis de los siete equipos de estudiantes para determinar el área de las alas.

En la Figura 4.46 se observa que los equipos de estudiantes relacionaron las figuras de las alas con trapecios, esta relación les permitió calcular el área de las alas por medio de $A=\frac{(B+b)h}{2}$, que es la fórmula para calcular el área del trapecio. Se observa que los alumnos identificaron los valores de cada una de las literales que la conforman. Sin embargo, no escribieron la fórmula de manera completa. La expresión que escribieron fue $\frac{B+bxh}{2}$, la cual indica el tipo de operaciones realizadas para encontrar el área de la figura, por ello escribieron después de la expresión el signo “igual a”. Algo interesante de observar es cómo los estudiantes efectuaron la división 67.5/2 y posteriormente sumaron dos veces el resultado obtenido, dado que había dos alas en el avión.

Las respuestas de seis equipos a la pregunta 4 (véase Anexo 1) ¿Y la del estabilizador horizontal? fueron las siguientes, tal como lo muestra la Figura 4.47.

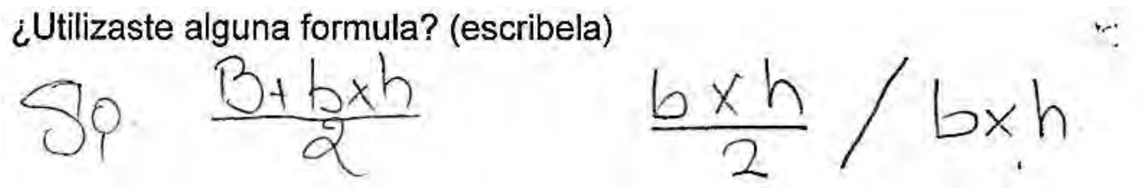


(a) (b)

Figura 4.47. Tipo de procedimiento que propusieron los equipos de estudiantes para responder la pregunta 4.

Se observa en la Figura 4.47 (incisos a y b) que los equipos de estudiantes procedieron a calcular el área del estabilizador de manera diferente. En la figura del inciso (a) lo hicieron a través de la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$ y en la figura del inciso (b) descompusieron el estabilizador en un rectángulo y un triángulo.

Las respuestas de seis equipos a la pregunta 5 (véase Anexo 1) ¿Utilizaste alguna fórmula? fueron las siguientes tal como lo muestra la Figura 4.48.



(a) (b)

Figura 4.48. Respuesta de seis de los siete equipos a la pregunta 5.

Se observa en la Figura 4.48 (incisos a y b) que los equipos de estudiantes utilizaron fórmulas diferentes, ya que eligieron procedimientos distintos para calcular el área del estabilizador del avión.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron el problema de esta sesión. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes:

A1: Para poder calcular el área de las alas y del estabilizador identificamos que eran figuras planas regulares (trapecios) y utilizamos la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$, posteriormente sumamos todas las áreas y obtuvimos como resultado 90.44 m^2 que es el material que se ocupa para hacer las alas y los estabilizadores.

A2: Al obtener el área de cada una de las alas y los estabilizadores, con eso dato se da respuesta a la pregunta planteada en el problema ¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y el estabilizador?

D: ¿Alguien utilizó un procedimiento diferente al anterior?

A3: Si, el área se puede calcular descomponiendo el ala o el estabilizador en un triángulo y un rectángulo y el material a utilizar es el mismo.

D: Debemos entonces considerar que para que se pueda calcular el material necesario para hacer las alas y el estabilizador hay que calcular el área de cada uno de los trapecios, pero identificando cada una de las partes que forman a la fórmula para calcular el área del trapecio que son las figuras de las alas y del estabilizador, en donde se puede calcular el área por medio de la fórmula para calcular el área del trapecio o la descomposición.

> Todo lo que sus compañeros nos presentaron es su proceso de medición para poder determinar el material necesario para hacer las alas y el estabilizador.

Con la participación de la docente se concluyó la sesión. Se observó cómo los estudiantes utilizaron con facilidad la fórmula del trapecio para obtener el área de las figuras. Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema, pero ahora de manera individual. Las soluciones individuales muestran que los estudiantes en general mejoraron su comprensión, dado que ya no se observaron dificultades para identificar que las alas del avión eran trapecios. Pudieron utilizar la fórmula correspondiente al área del trapecio y relacionarla con las medidas proporcionadas.

4.2.7.1 O*bservaciones sesión 7*

A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 7 se detectó que los estudiantes, aún cuando inicialmente tuvieron dificultades de comprensión, de nuevo lograron identificar que se podía calcular el área de las figuras planas regulares por medio de la descomposición en otras figuras planas, así como por medio del uso de fórmulas, con comprensión de las mismas. En este caso, la figura que se utilizó fue el trapecio. La identificación de la figura y los cálculos realizados permitió a los estudiantes dar respuesta a la pregunta ¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y los estabilizadores?

Se observa que los estudiantes utilizaron procedimientos diferentes, uno de ellos fue la descomposición de las alas en un triángulo y un rectángulo y el otro procedimiento utilizado fue la aplicación de la fórmula para calcular el área del trapecio.

En general, con esta actividad, los estudiantes de nuevo tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer figuras geométricas regulares dentro de figuras planas regulares, en particular dentro del trapecio. También, utilizaron lenguaje matemático para denotar algunas características específicas de los trapecios: el área. Los estudiantes, además, profundizaron en este concepto al usarlo para resolver otro problema como determinar el material que se necesitaba para hacer las alas y los estabilizadores del avión. Es decir, aplicaron lo aprendido en otro contexto.

Las conclusiones respecto al desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes en cuanto a la figura del trapecio corresponden al nivel 2 de la Teoría de los Van Hiele, ya que identificaron la figura; utilizaron lenguaje matemático para denotar características específicas de los trapecios, específicamente el área.

4.2.8 Sesión 8

Para desarrollar la sesión 8, los estudiantes trabajaron en equipo y posteriormente discutieron en sesión grupal sus resultados y procedimientos.

Los procedimientos y las respuestas a las preguntas contenidas en la actividad (véase Anexo 1) fueron los siguientes:

Pregunta 1. ¿Cuánto mide la superficie a sembrar?

Los 10 equipos que se formaron contestaron lo mismo, no sin antes haber algunas dificultades. Un ejemplo de las respuestas se muestra en la Figura 4.49, en donde los equipos de estudiantes utilizaron la fórmula del trapecio para encontrar el dato pedido.

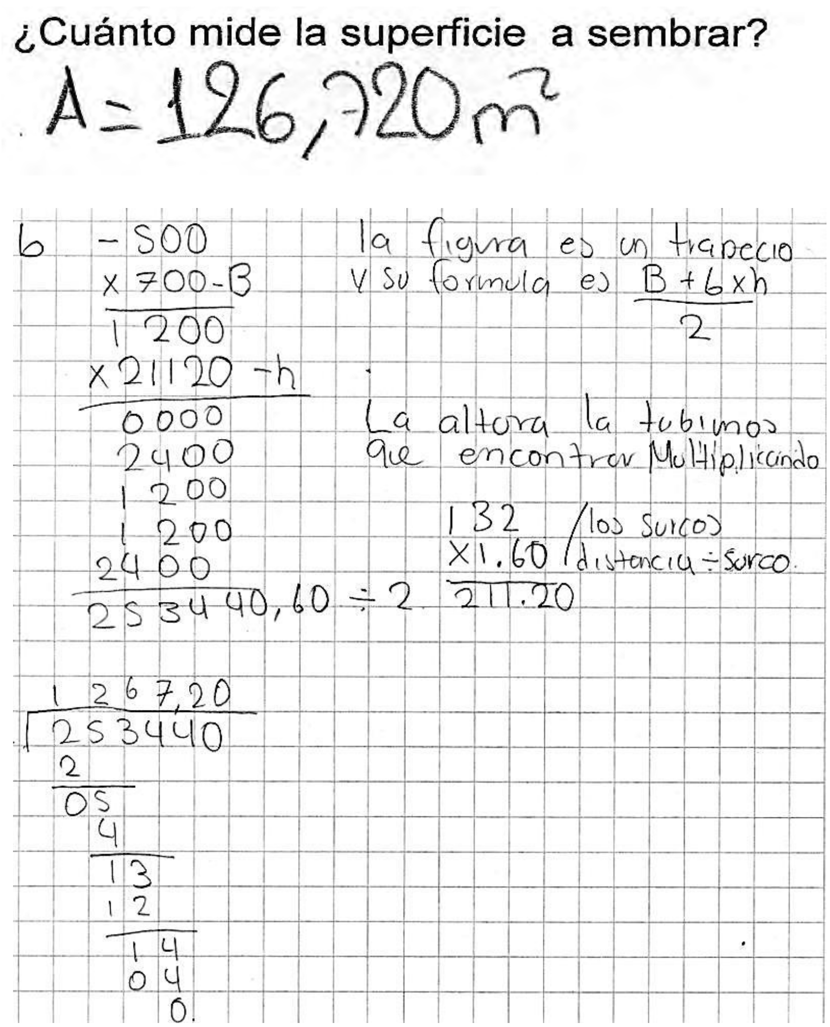


Figura 4.49. Respuesta de los 10 equipos a la primera pregunta, sesión 8.

Se observa en la Figura 4.49 que los alumnos aplicaron la fórmula $A = \frac{B + bxh}{2}$, que es la indicada para calcular el área de la figura o trapecio. Pero sólo escribieron la expresión $\frac{B + b \times h}{2}$, señalando así las operaciones requeridas para obtener el área.

Los alumnos identificaron correctamente los datos: base mayor y menor. Pero no todos los equipos lograron inmediatamente determinar la altura. Fue una cantidad que no se les proporcionó, y que obtuvieron multiplicando el número de surcos por la distancia que hay entre ellos.

Los dos equipos que tuvieron dificultades procedieron de la siguiente manera. Identificaron que la figura era un trapecio, y que su área se calculaba con la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$, encontraron las medidas de la base mayor y la base menor, las cuales estaban señaladas en la figura, pero la altura no estaba indicada.

A: Le falto la medida de la altura.

D: No, no faltó, no les di la medida, ustedes tienen que determinarla.

A: ¿Cómo?

D: Indícame cuál es el lado, que es la altura.

A: Este lado donde dice 132 surcos.

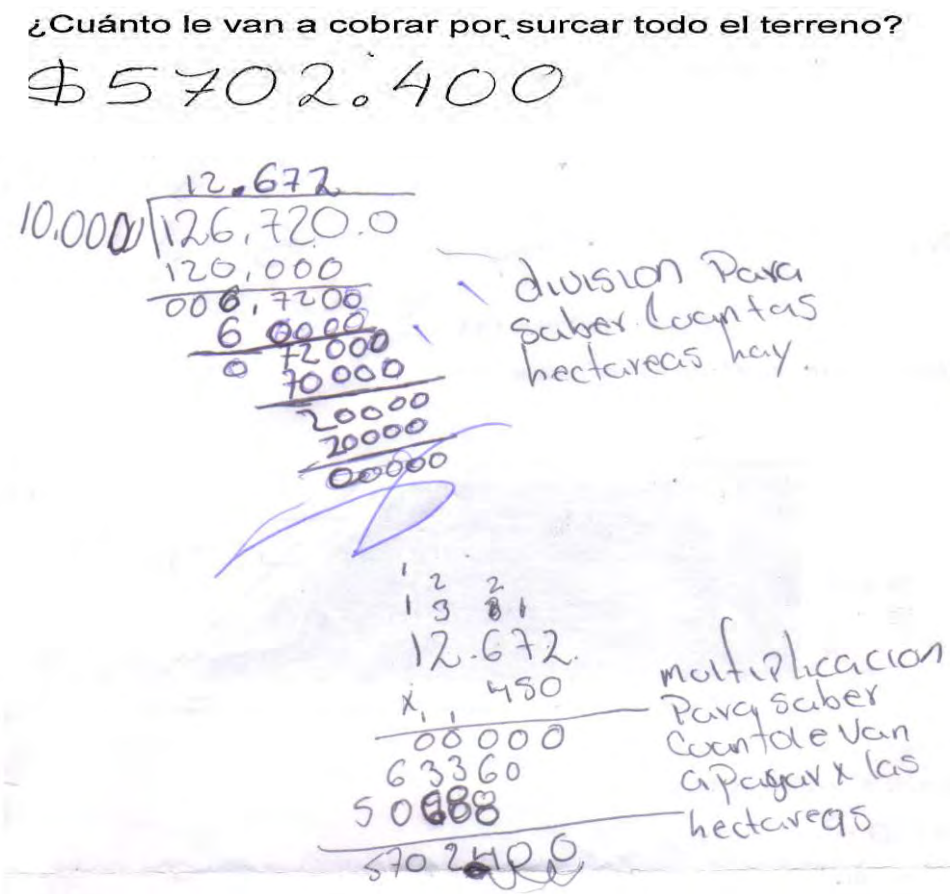
D: Correcto. [*La docente tomó como ejemplo los mosaicos del salón y les dijo lo siguiente*] cada mosaico mide de lado 50cm y aquí en este lado hay 10 mosaicos ¿Cuánto mide ese lado?

A: Pues multiplico 50 cm x 10 y me da lo que mide.

D: Entonces ahora encuentra la altura del trapecio.

A: Hay que multiplicar los 132 surcos por la distancia que hay entre ellos. [*La docente les dejó seguir trabajando*].

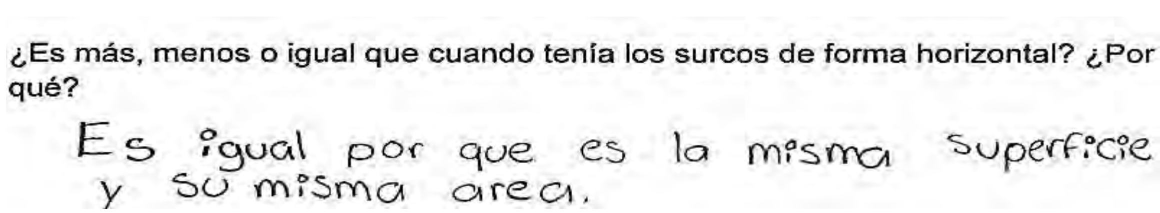
Posterior a este diálogo, los 10 equipos contestaron lo mismo (se ilustra en la figuras 4.49). En seguida, los equipos de estudiantes convirtieron los metros cuadrados a hectáreas para poder calcular el dinero que se tenía que pagar (Figura 4.50).


¿Cuánto le van a cobrar por surcar todo el terreno?

$5702.400

Figura 4.50. Procedimiento de los diez equipos para la segunda pregunta.

Se observa en la Figura 4.50 que los equipos de estudiantes dividieron 126,720 entre 10,000 que son los metros cuadrados de una hectárea. Obtuvieron como resultado 12.672 hectáreas. Posteriormente, las 12.627 hectáreas las multiplicaron por $450 para obtener la cantidad total a pagar: $5,702.4.


¿Es más, menos o igual que cuando tenía los surcos de forma horizontal? ¿Por qué?

Es igual por que es la misma superficie y su misma area.

Figura 4.51. Respuesta de los diez equipos para la tercera y cuarta pregunta.

Los 10 equipos contestaron la pregunta ¿Es más, menos o igual que cuando tenía los surcos de forma horizontal? ¿Por qué? (véase Anexo 1). La forma como contestaron se observa en la Figura 4.51. Los equipos de estudiantes coincidieron que es igual, ya que es la misma superficie, pero no especificaron porqué.

Para dar inicio a la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron el problema de la Sesión 8. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes.

A1: Para poder determinar cuánto mide la superficie a sembrar calculamos el área del terreno, identificamos que es una figura plana regular (trapecio), recordamos la fórmula $A=\frac{(B+b)h}{2}$ para calcular su área pero al momento que sustituimos los valores nos dimos cuenta que la altura es un dato no proporcionado.

A2: Por lo que identificamos los datos proporcionados aparte de la base mayor y la base menor que son el número de surcos y la distancia que hay entre ellos y los multiplicamos para obtenerla y sustituimos los valores en la fórmula y calculamos el área.

A3: Para poder contestar a la pregunta cuánto le van a cobrar por surcar todo el terreno tuvimos que convertir el área del terreno a hectáreas porque el resultado que teníamos fue en m^2 y lo que hicimos fue dividirla entre 10,000 m^2 que son los equivalentes a una hectárea porque el precio que cobra el tractor es por hectárea, entonces al multiplicar las 12.720 hectáreas x \$450 se obtuvimos el costo total a pagar.

A1: Para contestar si es más, menos o igual que cuando tenía los surcos de forma horizontal contestamos que es igual porque el que los surcos estén de forma horizontal o vertical no le quitan o le van más área al terreno.

AG: Pero el tractor si le va a cobrar más porque al hacer los surcos de forma vertical va hacer más surcos que de forma horizontal.

A1: En las instrucciones dice que el tractor cobra por hectárea no por número de surcos que va hacer es por eso que es la misma área y le cobraran lo mismo.

D: Entonces lo importante en este problema es saber que tenemos que calcular el área y la forma como la calcularemos, identificar todos los datos necesarios a utilizar y si no contamos con alguno de ellos encontrarlo a través de los datos que nos proporcionen. Para entonces poder proporcionar las respuestas a las preguntas planteadas.

Como se puede observar en la anterior transcripción, la intervención de los alumnos fue utilizada por la docente para cerrar la discusión grupal. Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual. Las soluciones individuales muestran que los estudiantes en general mejoraron su comprensión, dado que entre otros aspectos ya no tuvieron dificultades para obtener la medida del dato faltante (altura), que les permitió calcular el área del trapecio.

4.2.8.1 O*bservaciones sesión 8*

A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 8, se detectó que los estudiantes lograron identificar la figura plana regular (trapecio). Calcularon el área de la misma a través de la fórmula, lo cual les permitió dar respuesta a la pregunta ¿Cuánto mide la superficie a sembrar?

Se observa que los alumnos calcularon el área total del terreno por medio de la fórmula $A=\frac{(B+b)h}{2}$, sustituyeron en ella los valores de cada una de las literales que la forman y relacionaron el área total del terreno con la cantidad a pagar por surcar el terreno (cuando efectuaron las siguientes operaciones: convertir los metros cuadrados a hectáreas y la multiplicación de 12.720 hectáreas por $450).

Se observó que los alumnos aplicaron los conocimientos adquiridos en sesiones anteriores, por ejemplo, el hecho de que no era sólo obtener el área sino que debían proporcionar la cantidad a pagar por surcar el terreno, actividad que los llevó a desarrollar otras operaciones necesarias, como convertir de metros a hectáreas.

En general, con esta actividad, los estudiantes tuvieron la oportunidad de visualizar y reconocer figuras geométricas como el trapecio. También utilizaron lenguaje matemático para denotar algunas características específicas de los trapecios, tal es el caso del área, así como sus lados: las bases y la altura (logros que corresponden al nivel 2). Los estudiantes, además, profundizaron en este concepto al tener que usarlo para responder la pregunta ¿Cuánto le van a cobrar por surcar todo el terreno? Es decir, transferieron lo aprendido a otro contexto.

4.2.9 Sesión 9

Para desarrollar la sesión 9 (Anexo 1) los estudiantes trabajaron en equipo y posteriormente discutieron en sesión grupal sus avances.

Los equipos de estudiantes contestaron de la siguiente manera (Figura 4.52) a la primera pregunta ¿Qué área ocupa un jardín redondo de 10 m de radio? (véase Anexo 1). Es importante mencionar que algunos de los equipos tuvieron dificultades en esta actividad, las cuales se explican posteriormente.

Los equipos de estudiantes que ya se sabían la fórmula para calcular el área del círculo la recordaron y empezaron a trabajar de la manera siguiente.

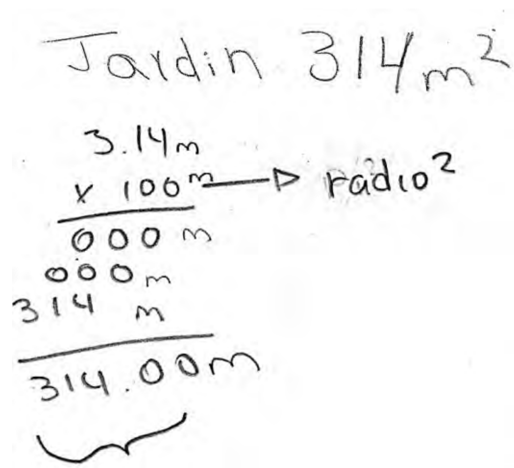


Figura 4.52. Respuesta y tipo de procedimiento que propusieron todos los equipos de estudiantes a la primera pregunta de la sesión 9.

Los equipos de estudiantes, en su proceso de medición para obtener el área del jardín, tomaron el valor de 3.14 para π y lo multiplicaron por 100 *m* que era el cuadrado del radio r^2. Es decir, aplicaron la fórmula para obtener el área del círculo. Aunque no la escribieron en su procedimiento.

Los equipos de estudiantes contestaron, como se muestra en la Figura 4.53, a la pregunta ¿Cuál es el área del andador? (Anexo 1).

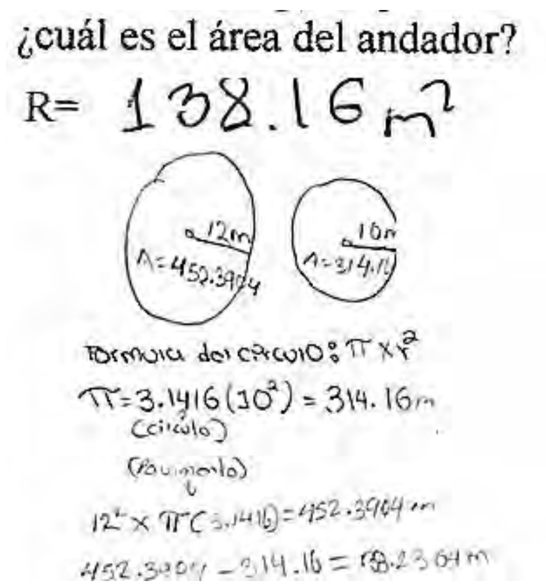


Figura 4.53. Respuesta y tipo de procedimiento que propusieron todos los equipos de estudiantes a la segunda pregunta de la sesión 9.

Los equipos de estudiantes en su proceso de medición descompusieron el jardín en dos círculos para calcular su área, tal como lo muestra la Figura 4.53. Con el círculo grande representaron el área total del jardín incluyendo el área del andador 12^2 x 3.14= 452.39 m^2. Se observa que calcularon el área del círculo que tiene pasto 3.14 x 10^2 = 314.16 m y procedieron a restar los resultados obtenidos para calcular el área del andador: 452.39 m^2-314.16 m^2= 138.23 m^2. En el procedimiento (Figura 4.53) no utilizaron la unidad de medida metro cuadrado, pero en el resultado si la escribieron de forma correcta.

Tres de los equipos de estudiantes, previo a desarrollar procedimientos como los anteriormente mostrados, tuvieron la siguiente dificultad en el desarrollo de la actividad.

> A: Ya sabemos que para poder calcular el área del andador tenemos que calcular el área del círculo de radio 10*m*, y la del círculo completo pero usted no nos dio su radio solo nos dio 2*m*.
>
> D: Vas a dibujarme los círculos que ya identificaste para calcular el área. Los recortas y coloreas de gris bajo y gris fuerte.
>
> D: Acomódalas tal como se muestra la figura en el problema, ahora gira el circulo pequeño y cuando deduzcas algo me hablas.
>
> A: Ya. Cuando la línea que señala el radio de 10*m* se alinea con la 2*m* los sumamos y ese es el radio del círculo grande.
>
> D: Entonces sigan trabajando para que terminen el problema.

Durante la discusión grupal, uno de los equipos pasó a explicar la forma como resolvieron la actividad de la Sesión 9. Su explicación la argumentaron con expresiones como las siguientes:

> A1: Primero que nada descompusimos la figura en dos círculos el de radio 10*m* y el de radio de 12*m* calculamos sus áreas por medio de la fórmula del círculo, pr^2.
>
> A2: Para responder a la pregunta ¿Qué área ocupa un jardín redondo de 10*m* de radio? Sustituimos los datos en la fórmula 3.14 x $(10m)^2$ =314.16 m^2.
>
> A3: Para responder a la pregunta ¿Cuál es el área del andador? Identificamos que el radio es 12*m* y sustituimos los valores en la fórmula 3.14 x $(12m)^2$ = 452.39 y restamos las dos áreas y obtuvimos el área del andador.
>
> D: Entonces lo importante en este problema es saber que tenemos que calcular el área y la forma de como la calcularemos, identificar todos los datos necesarios a utilizar y si no contamos con alguno de ellos encontrarlo a través de los datos que nos proporcionen. Para entonces poder proporcionar las respuestas a las preguntas planteadas.

Como se puede observar en la anterior transcripción, igual que en las sesiones anteriores, la intervención de los alumnos fue utilizada por la docente para cerrar la discusión grupal y el trabajo durante la sesión. Se dejó como tarea a los estudiantes volver a resolver el problema de manera individual y no en equipo. Las soluciones individuales muestran que los estudiantes pudieron determinar el radio del círculo total y del formado por el jardín cubierto de pasto. Los procedimientos individuales fueron similares a los que se observan en la Figura 4.53. Sólo algunos estudiantes incorporaron las unidades de medida al hacer las operaciones.

4.2.9.1 O*bservaciones sesión 9*

A partir del análisis de los trabajos derivados de la Sesión 9, se detectó que los estudiantes ya conocían la fórmula para calcular el área del círculo. Lograron identificar que la figura dada estaba compuesta por dos círculos. Calcularon el área de cada círculo a través de fórmulas y pudieron determinar que al restarlas se obtenía el área del andador de pavimento. Los alumnos obtuvieron el área total del jardín aplicando el procedimiento adquirido en una de las sesiones anteriores (sesión 4), pero en esta sesión fue con una figura diferente, un círculo.

Se puede decir que los estudiantes están en el nivel 2 respecto al cícurlo, ya que identificaron las figuras y utilizaron lenguaje matemático para denotar propiedades específicas de los círculos como el área, y el radio. De acuerdo con los procesos de medición utilizados por los estudiantes es importante mencionar que este problema les permitió transferir lo aprendido a otro contexto, desde el momento que los estudiantes restaron las áreas de los círculos que formaban al jardín redondo.

4.2.10 Instrumento de evaluación

El objetivo del instrumento de evaluación (véase Anexo 2) fue evaluar si los estudiantes identificaban que para calcular el área de figuras planas irregulares hay que seguir un procedimiento de medición basado en la descomposición de la figura dada en figuras conocidas; si observaban que era posible calcular el área de la figura propuesta en este instrumento de evaluación (un jardín) aplicando, con comprensión, las fórmulas conocidas. Interesaba saber si podían determinar el número de costales que se necesitaban para fertilizar el jardín. Es decir, los estudiantes debían aplicar el conocimiento adquirido en las sesiones trabajadas durante la secuencia. Resolver el problema implicaba obtener áreas, sumar y restarlas, dividirlas entre la cantidad de metros cuadrados que se alcanzaban a fertilizar con un costal. Este problema fue un poquito más complejo que los resueltos en las sesiones aplicadas durante la secuencia en la medida en que incluía más figuras y además se debía responder en forma individual y no en equipos, como hasta ahora los estudiantes habían trabajado.

Antes de entregar el instrumento de evaluación, la docente acomodó al grupo para que los 32 estudiantes pudieran contestarlo de forma individual (véase Anexo 2). Los estudiantes procedieron a resolver el problema del instrumento de evaluación, y dieron como respuesta lo siguiente (Figura 4.54).

De un total de 32 estudiantes 25 contestaron lo mismo a la pregunta ¿Cuántos costales se necesitan para fertilizar este jardín?

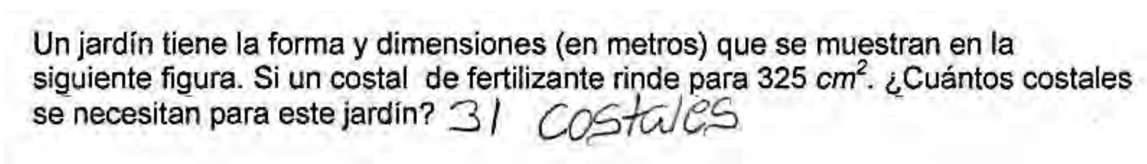
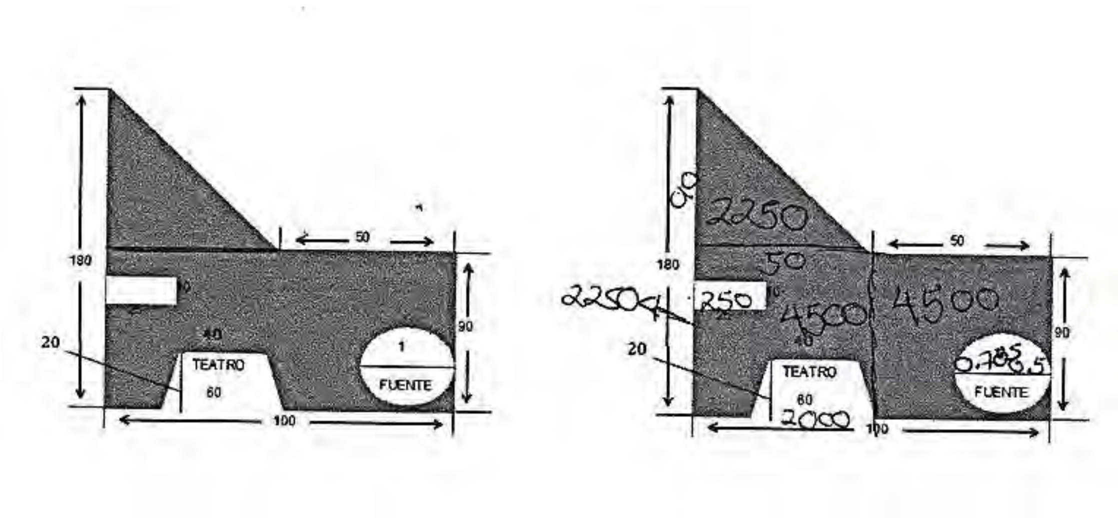

Un jardín tiene la forma y dimensiones (en metros) que se muestran en la siguiente figura. Si un costal de fertilizante rinde para 325 cm^2. ¿Cuántos costales se necesitan para este jardín? 31 costales

Figura 4.54. Respuesta de 25 estudiantes a la primera pregunta del instrumento de evaluación.

Los procedimientos que siguieron los 25 estudiantes para responder la pregunta consistieron en la descomposición del jardín como se muestra en la Figura 4.55.



(a) (b)

Figura 4.55. Tipo de descomposición que utilizaron 25 estudiantes para responder la primera pregunta del instrumento de evaluación.

Ventiun estudiantes descompusieron la figura como se muestra en el inciso a (Figura 4.55), mientras que cuatro lo hicieron como se observa en el inciso b. Los 21 estudiantes dividieron el jardín en un triángulo y un rectángulo y los cuatro estudiantes restantes lo dividieron en un triángulo y dos rectángulos. A pesar de descomponer de manera diferente la figura, obtuvieron el mismo resultado: 31 costales. Uno de los procedimientos representativos, de todo este grupo de estudiantes, se muestra en la Figura 4.56.

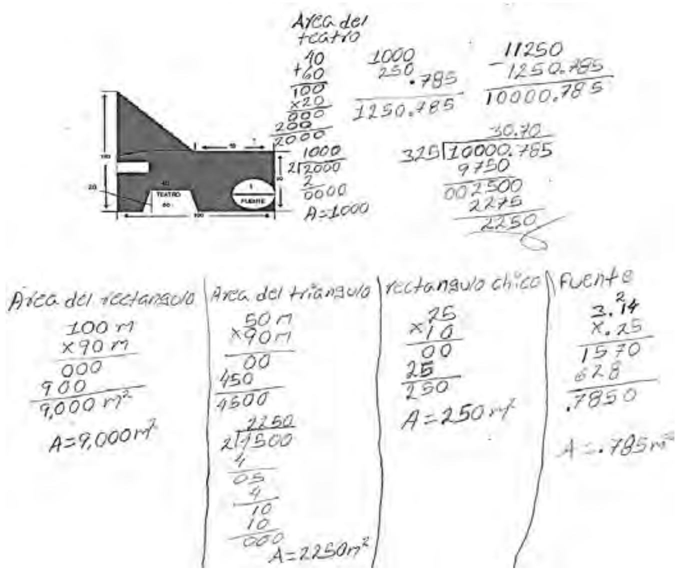


Figura 4.56. Tipo de procedimientos que utilizaron 25 estudiantes para responder la primera pregunta del instrumento de evaluación.

Los equipos de estudiantes calcularon el área del rectángulo y del triángulo, que son las dos figuras planas en las cuales descompusieron el jardín. Posteriormente, calcularon el área del pasillo, de la banca y de la fuente. Sumaron las áreas del rectángulo y el triángulo y le restaron las áreas del pasillo, el teatro y la fuente. Esa área correspondiente al jardín la dividieron entre el número de metros cuadrados que se alcanzaban a cubrir con un costal de fertilizante y obtuvieron el número de costales que se necesitaban para fertilizar el jardín.

21 estudiantes se caracterizaban porque al resolver problemas durante la implementación de la secuencia en el aula, fueron estudiantes que de manera constante externaron sus respuestas, las argumentaron y preguntaron cuando tuvieron dudas. Estos estudiantes buscaron aclarar sus dudas durante cada una de las sesiones y las discusiones grupales. Lo cual probablemente les permitió tener un mejor desempeño en la resolución del problema elegido para evaluación final.

Los siete alumnos restantes tuvieron dificultades, y no llegaron a identificar una respuesta al problema planteado. Sin embargo, tres de los siete usaron el siguiente proceso de medición (Figura 4.57). Al parecer no alcanzaron a terminar de resolver el problema.

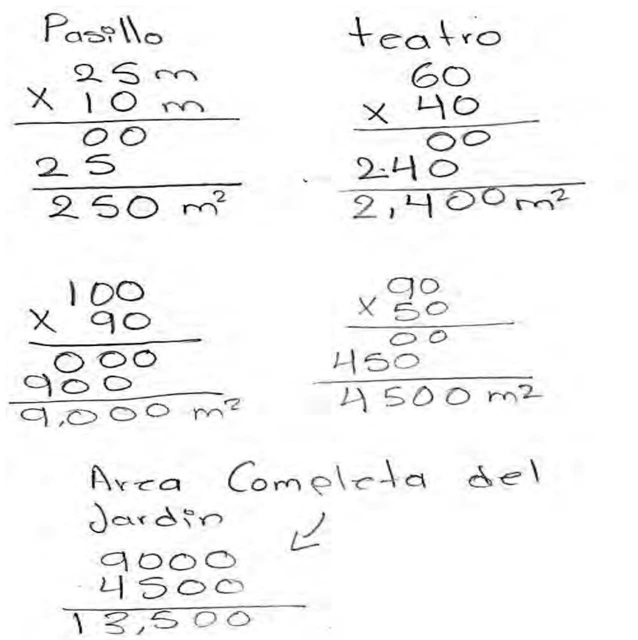


Figura 4.57. Tipo de procedimiento que utilizaron tres de los siete estudiantes restantes para responder la primera pregunta del instrumento de evaluación.

Estos tres estudiantes dividieron el jardin en un triángulo y un rectángulo, calcularon sus áreas y las sumaron; posteriormente, calcularon el área del pasillo y el teatro.

Los cuatro alumnos restantes utilizaron el siguiente proceso de medición (Fig 4.58).

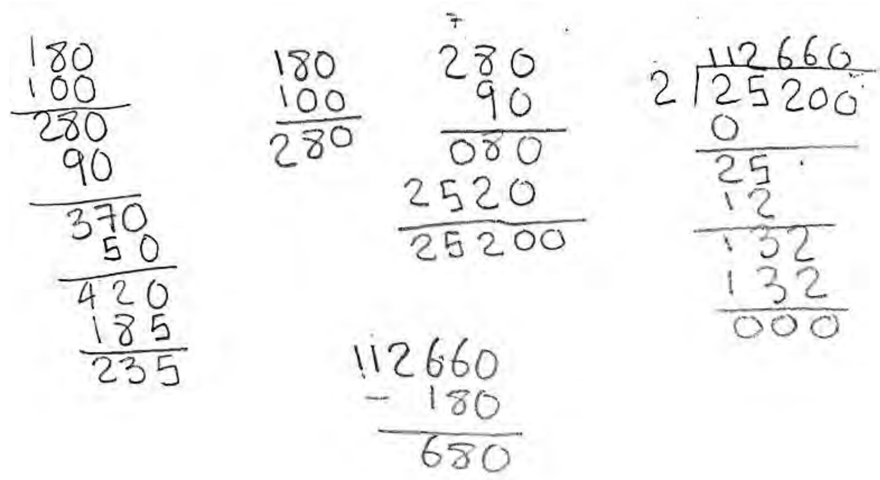


Figura 4.58. Tipo de procedimiento que utilizaron cuatro de los siete estudiantes restantes para responder la primera pregunta del instrumento de evaluación.

Se observa que los estudiantes realizaron operaciones de suma cuando debían haber multiplicado. La multiplicación de 280 x 90 muestra que los estudiantes no tenían claro cuál era una figura plana regular y cuál una figura plana irregular.

4.2.10.1 *Observaciones*

En general, con la implementación de este instrumento se logró observar cómo los estudiantes de manera individual visualizaron figuras planas regulares como el rectángulo y triangulo dentro de la figura plana irregular; cómo utilizaron lenguaje matemático para denotar una de las características específicas de los rectángulos y triángulos: el área. Los procedimientos mostraron cómo los estudiantes calcularon el área de la figura plana irregular por medio de la descomposición y, posteriormente, de la suma o resta de áreas para determinar el área total a fertilizar.

La visualización y reconocimiento de figuras como rectángulos y triángulos en el jardín puede considerarse como correspondiente a un pensamiento matemático en el nivel 1 de la teoría de los Van Hiele. La identificación de una de las características específicas de los rectángulos y triángulos como es el área, permite observar que los estudiantes, además, mostraron avances en cuanto a un desarrollo de pensamiento correspondiente al nivel 2, para estas figuras. Los estudiantes utilizaron lenguaje matemático para denotar el área, trabajaron con las figuras de rectángulos y triángulos, las diferenciaron y las utilizaron como un medio para encontrar la solución al problema. Se puede decir que se les brindó a los estudiantes la oportunidad de transferir su conocimiento y habilidades adquiridas a otro contexto.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones, de acuerdo con los objetivos de la tesis, derivadas del análisis de la implementación de la propuesta didáctica. Se derivan recomendaciones con base en los hallazgos y conclusiones expuestas. Las recomendaciones son útiles para mejorar la propuesta, su implementación y resultados.

5.1 CONCLUSIONES

Con relación al objetivo de la tesis y los objetivos de la propuesta didáctica se menciona lo siguiente.

5.1.1 Aprendizaje de los alumnos

De acuerdo con los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica se logró que los estudiantes pudieran visualizar y reconocer las figuras: rectángulo, triangulo, círculo y trapecio. Recordaron que hay polígonos regulares y figuras planas irregulares. Inicialmente, los estudiantes pudieron calcular el área de estas figuras, pero sin comprender el proceso de medición de áreas y, por lo tanto, la relación entre éste y ciertas fórmulas.

Después de resolver las actividades de la secuencia didáctica, se logró que los estudiantes mejoraran su comprensión respecto a la propiedad del área de las figuras (nivel 2 de los Van Hiele: análisis), y posteriormente la utilizaran para medir el área de otras figuras no regulares.

Los alumnos, tampoco podían, al inicio de la secuencia, calcular el área de figuras planas irregulares. En las sesiones 5 y 10 de la secuencia se observó cómo los estudiantes determinaban un proceso de medición para calcular el área de figuras planas irregulares. Este proceso comprendía la descomposición de las figuras planas irregulares en figuras planas regulares.

Los resultados de cada sesión y la evaluación final permitieron observar debilidades conceptuales y de habilidades de los estudiantes, al inicio, durante y al final de la implementación de la propuesta. Se observó, por ejemplo, que varios estudiantes tuvieron dificultades en todas las actividades para obtener la respuesta final de las actividades, ya que se requería no sólo calcular el área, sino comprender el concepto de área, así como manejar las operaciones aritméticas básicas. También se observó que los estudiantes no manejaban las unidades de medida requeridas al momento de realizar las operaciones, aunque en la respuesta final a veces las utilizaron.

La posibilidad brindada por los problemas para que los estudiantes transfirieran sus conocimientos y habilidades aprendidas de sesión a sesión, permitió observar ciclos de entendimiento en los estudiantes, los cuales se relacionaron con los niveles de los Van Hiele. La actividad individual posterior al trabajo en equipo y grupal permitió que los estudiantes tuvieran la oportunidad de volver a abordar las actividades sin ayuda de sus compañeros. También posibilitó que la docente tuviera más elementos para revisar la comprensión individual de cada estudiante, lo cual no era fácil de observar en los trabajos en equipo.

5.1.2 El ambiente de solución de problemas

Los alumnos, previo a la implementación de esta secuencia, no habían trabajado en un ambiente de resolución de problemas; estaban acostumbrados a trabajar de manera individual, en un contexto donde el maestro siempre explicaba y ellos debían escuchar o bien hacer ejercicios. Se identificó que al propiciarse un ambiente de resolución de problemas se logró la participación e interés de los estudiantes en el proceso de medición para dar solución a los problemas planteados. Por lo tanto, los estudiantes tuvieron la oportunidad de explicar la forma como resolvieron los problemas planteados, de escuchar otras posibles soluciones y de evaluar sus resultados y procedimientos. La comunicación fue fundamental para el desarrollo de su conocimiento.

Otro aspecto que influyó, también, de manera positiva, fue el tipo de problemas que resolvieron los estudiantes, los cuales se relacionaron con su vida cotidiana. Se observó que los estudiantes se interesan más en la resolución de un problema cuando consideran que les va a servir en algún momento de su vida. Por ejemplo, identificaron que el procedimiento utilizado para resolver este problema podrían usarlo para calcular el número de costales de fertilizantes necesarios para fertilizar el cañal de sus papás.

Al interactuar los estudiantes con los demás compañeros, adquirieron mayor seguridad para defender sus procesos de medición utilizados. Además de que lograron generalizar y transferir lo aprendido a otras situaciones.

Al trabajar con la perspectiva de resolución de problemas se encontraron varios obstáculos, entre ellos que la docente no estaba acostumbrada a trabajar con esta práctica. La docente, además de tener un dominio matemático, debe tener herramientas pedagógicas, conocimiento y experiencia en el uso de la perspectiva de resolución de problemas, para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. La afirmación precedente sugiere que se debería ofrecer de manera institucional y sistemática la capacitación docente para tal fin en las escuelas.

5.1.3 La propuesta didáctica

Se observó que si la docente utiliza la perspectiva de resolución de problemas para desarrollar conocimiento en grupos de secundaria de 35 y 40 estudiantes, es difícil obtener todos los logros y objetivos de un programa oficial establecido, debido a que los programas son muy ambiciosos. Sin embargo, es más complicado obtener todos los objetivos con propuestas tradicionales donde el estudiante sólo es receptor en el aula y lo único que se privilegia en la evaluación del conocimiento adquirido es la memorización de conceptos.

Aspectos importantes en esta propuesta como la resolución de problemas en equipos, la interacción de los estudiantes con sus compañeros, la comunicación de sus ideas y el trabajo en grupo permitieron propiciar el desarrollo de conocimiento tanto individual como en equipo y grupal vía la generalización de conceptos matemáticos en el interior del aula, objetivo de esta secuencia didáctica.

Se observó que no es posible abordar en tiempo y forma el programa de la asignatura de matemáticas 1 del tercer bloque si el docente utiliza esta propuesta y se toman en cuenta, en forma aislada entre sí, todos los temas contenidos: Significado y uso de las operaciones, Significado y uso de las literales, Formas geométricas, Medida, Análisis de la información (Relaciones de proporcionalidad), Porcentajes, Representación de la información, Gráficas, Análisis de la información (Nociones de probabilidad). La afirmación precedente sugiere que el docente organice su planeación de tal manera que busque abordar los temas de forma integrada, sin desvincularlos entre sí (por ejemplo, los temas uso de las literales, formas geométrica, y significado y uso de las operaciones se pueden relacionar).

En resumen, los problemas abordados en el aula (contemplados en la propuesta didáctica) y la creación de un ambiente en el aula de resolución de problemas propició que los estudiantes:

- Construyeran, interpretaran, probaran, evaluaran y refinaran sus ideas respecto al concepto de área de un rectángulo, triángulo, trapecio y círculo, así como de algunas figuras no regulares las cuales implicaban procesos de medición y procedimientos aritméticos.
- Resolvieran problemas matemáticos y problemas cercanos de su entorno.
- Argumentaran los procesos de solución y la solución obtenida de un problema frente a todo el grupo.
- Analizaran los diferentes procesos de medición en figuras planas regulares y figuras planas irregulares.

5.2 RECOMENDACIONES

El grupo en el cual se implementó esta secuencia didáctica fue de 33 estudiantes. Se recomienda para su implementación grupos menos numerosos, lo cual permita tener un mejor seguimiento en cuanto al desarrollo de conocimiento, tanto de los equipos como de los estudiantes.

En los planes y programas de secundaria de primer grado en el bloque 3 no se señala el cálculo de área de figuras planas irregulares, pero en pruebas oficiales se pide a los alumnos calcular el área de este tipo de figuras. Se sugiere revisar los planes y programas de estudio de secundaria, y poder anexar el cálculo de área de figuras planas irregulares a los mismos para que estén de acuerdo con los contenidos que se evalúan en dichas pruebas.

Otros contenidos matemáticos que deberían considerarse como parte de esta propuesta didáctica son los conceptos de longitud y volumen, y la relación entre ellos. Estos temas hubieran permitido al estudiante tener mejor comprensión del concepto de área al relacionarlo con los de longitud y volumen. Otro conocimiento importante, no considerado fue el concepto de variación, el cual está asociado con el de área, y la comprensión de las fórmulas en términos de una relación funcional.

Los docentes de matemáticas deberían hacer uso de la resolución de problemas, tomando en cuenta el contexto de los estudiantes con el fin de motivar al alumno y propiciar su interés en el aprendizaje de las matemáticas.

Es importante que los profesores de matemáticas promuevan el trabajo colaborativo en el aula, ya que fomenta la participación de los estudiantes para desarrollar las actividades y lograr una integración social en donde se realicen actividades propiamente matemáticas, pero sobre todo el refinamiento del conocimiento matemático a través de la comunicación de sus formas de pensar y procedimientos.

Un aspecto importante que el docente debe cuidar y tratar de evitar es caer en la implementación de ejercicios rutinarios como único método de enseñanza y aprendizaje, en el momento de detectar las debilidades que posee el alumno en cuanto a la comprensión de los problemas propuestos en el aula y sus procesos de solución.

En términos generales en las academias ya establecidas en las instituciones se deberían abrir espacios para que los maestros compartan sus experiencias. Por ejemplo, respecto a cómo se debería trabajar con la perspectiva de resolución de problemas, qué tipo de ambiente de trabajo sería el ideal y qué tipo de problemas se deben diseñar e implementar. Se debería discutir cómo procurar un ambiente de trabajo en el aula que propicie un ambiente favorable para el aprendizaje en donde uno de los factores importantes sea el establecimiento de una buena relación maestro-alumno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksandrov, A. D., et al (1985). *La matemática; su contenido su método y su significado*. Madrid, España: Alianza.

Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an Economic Problem: A Models and Modeling Perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baldor, J. A. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Patria.

Battista, M. T. (2007). The Development o geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte NC: Information Age Publishing.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Greeno, J., Collins, A. & Resnick, L. (1996). Cognition and Learning. En D. Berliner & R. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology* (pp. 15-46). New York: Macmillan.

Kenney, P. A. & Kouba, V. L. (1997). What Do Students Know about Measurement. En P. A. Kenney & E. A. Silver (Ed.). *Results from the Sixth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp 141-63). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. A. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. A. & Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind -In Which Development Involves Several Interacting and Simultaneously Developing Strands. *Mathematical Thinking and learning*, *6*(2), 205-226.

Lesh, R. A. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating what it Means to Understand Statistics (or other topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lindquist, M. M. & Kouba, V. L. (1989). Measurement. En M. M. Lindsquist (Ed.). *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 35-43). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000/2003). *Principios para la Educación Matemática*. (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: *A synthesis of two models*. En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.). *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Raghavan, K., Sartoris, M. L. & Glaser, R. (1998). Interconnecting Science and Mathematics Concepts. En R. Lehrer, R. y D Chazan (Eds.). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 267-296).

Alvarez M. P. & Palmas, O. A. (1997). *Matemáticas 1*. México: Santillana.

Santos, L. M. (1996). Consideraciones metodológicas en la invesyigación en educación matemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, *28*(3), 533-546.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Editorial Iberoamericana.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co. USA.

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Educación Básica Secundaria. Matemáticas. Programa de Estudios 2006.* México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Simon (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Zambrano, M. A. (2006). El razonamiento geométrico y la teoría de los Van Hiele. *Kaleidoscopio*, *3*(5), 28-33.

ANEXO 1

PROPUESTA DIDÁCTICA

En este Anexo 1 se presenta la propuesta didáctica implementada en el aula. Se agregaron las respuestas que se esperaban por parte de los estudiantes.

Sesión 1

Actividad 1. Con una lluvia de ideas, se aborda el tema de área de figuras planas.

Tipo de preguntas a plantear para la generación de la lluvia de ideas:

Tomando como ejemplo un libro ¿qué parte de él es una figura plana? ¿La figura anteriormente mencionada es una figura plana regular? ¿La paleta de la silla es una figura plana regular o irregular? ¿Podría conocer el área de la paleta de la silla?

¿Qué figuras planas conocen?

R= Cuadrados, rectángulo, triángulo, trapecio, círculo, polígonos regulares e irregulares, etc.

¿Hay alguna clasificación de las figuras planas de acuerdo con el número de lados? Si la hay, ¿cuál es?

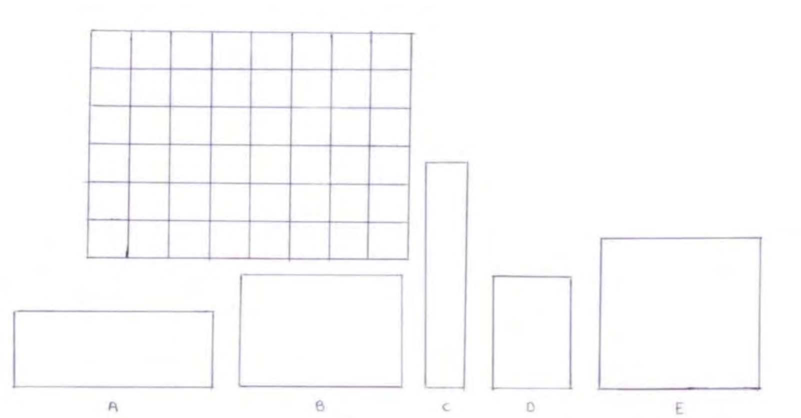
R= Cuadriláteros: Cuadrados, rectángulos, rombos, romboide, trapecio.

Triángulos. Polígonos regulares.

¿Qué podemos medir en las figuras planas?

R= Perímetro, área, su longitud de largo y ancho, la altura.

Actividad 2. Calcula el área de los rectángulos de abajo, y completa los datos que faltan en la siguiente tabla; apóyate de la plantilla de acetato. (Se entregan al estudiante figuras dibujadas en una hoja blanca y una plantilla de acetato cuadriculada como la que se muestra a continuación)



RECTÁNGULO	LARGO (*CM*)	ANCHO (*CM*)	ÁREA (CM^2)
A	5	2	(5)(2)=10 cm^2
B	4	3	(4)(3)=12 cm^2
C	1	6	(1)(6)=6 cm^2
D	2	3	(2)(3)=6 cm^2
E	4	4	(4)(4)=16 cm^2

Contesta las preguntas de acuerdo con los datos de la tabla.

1. ¿Es necesario contar uno a uno los cuadros que forman la figura o hay alguna forma de hacerlo sin necesidad de contarlos?

R= No.

2. ¿Qué datos se necesitan para calcular el área de un rectángulo, usando una unidad de medida?

R= La medida del largo y el ancho.

3. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de los rectángulos?

R= Largo x ancho.

4. La fórmula que propones ¿es igual para todos los rectángulos sin importar su tamaño?

R= Si.

Sesión 2

Calcula el área de las siguientes figuras apoyándote de la plantilla y completa la tabla.

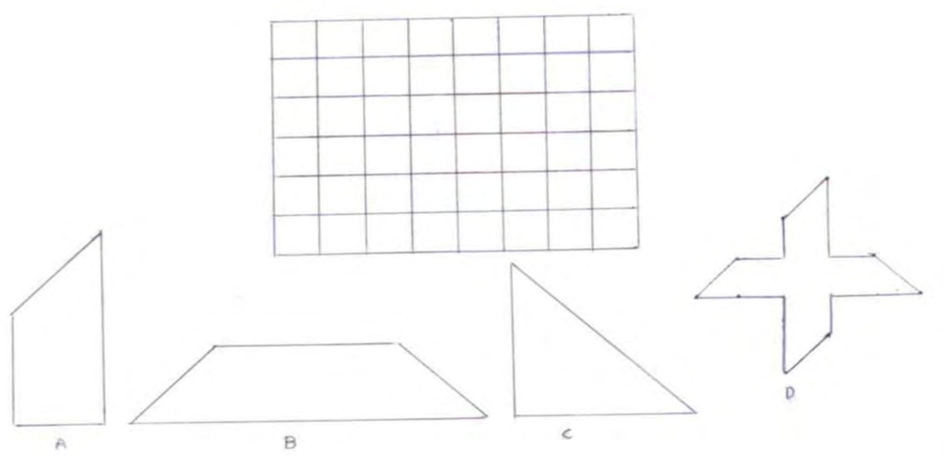


FIGURA	ÁREA (CM^2)
A	8 cm^2
B	12 cm^2
C	8 cm^2
D	7 cm^2

Contesta las siguientes preguntas:

1.- La figura A ¿en qué otras figuras planas puedes descomponerla?

R= En un rectángulo y un triángulo.

2. La figura B.

R= Un rectángulo y dos triángulos.

3.- ¿Cómo calculaste el área de las figuras?

R= Contando los cuadritos que lo forman.

4. ¿Habría un camino más directo para determinar el área de las figuras?

Sesión 3

Actividad 1. Lluvia de ideas.

(En esta lluvia de ideas se utilizaran figuras sin amar para dejar claro cuáles son las caras laterales de una figura armada).

Actividad 2.

La casa de Juan

Juan va a pintar toda su casa de color azul (Figura 1), si con un litro de pintura se pintan 4 m^2.

1.- ¿Cuántos litros de pintura azul necesita para pintarla? R= 34 litros pintura azul.

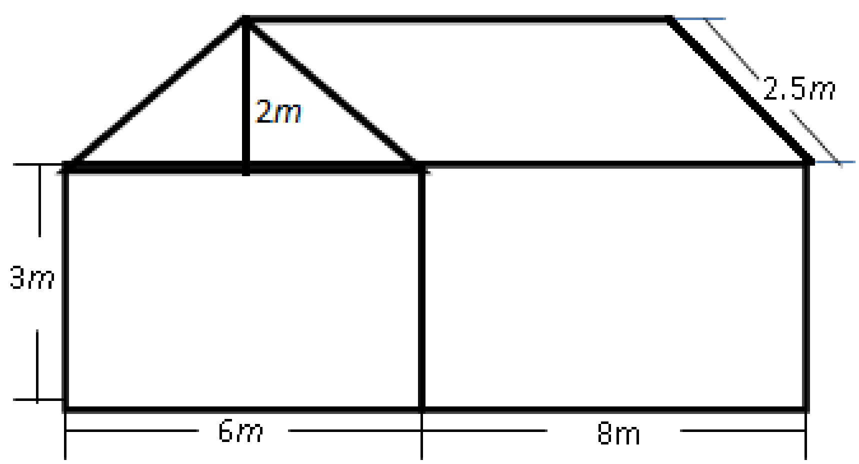
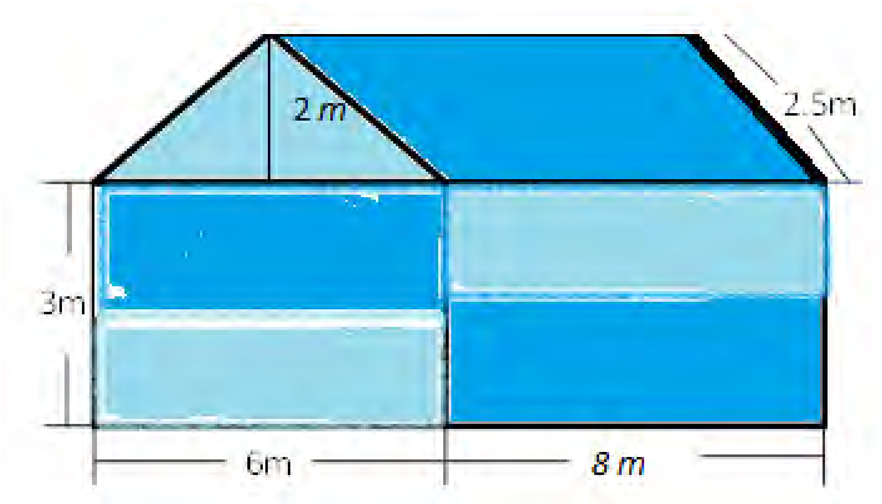


Figura 1. Casa de Juan

A. Pero después de un paseo y observar una casa pintada con dos colores de pintura, decide pintarla así:



2.- ¿Cuántos litros de pintura azul bajo utilizará?

R= 13.5 litros.

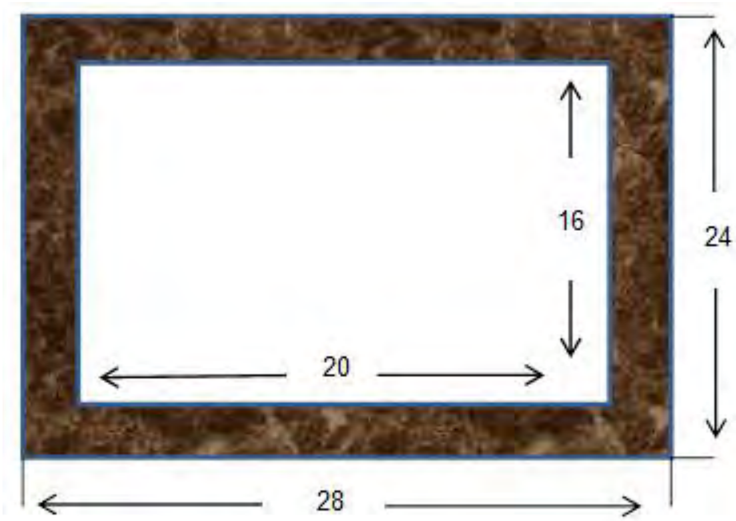
3.- ¿Cuántos litros de pintura azul fuerte utilizará?

R= 20.5 litros.

Sesión 4

El retrato

Las dimensiones exteriores del marco de un retrato (foto) son 28 x 24 *cm*. Sus dimensiones interiores son 20 x 16 *cm*.



1.- ¿Cuánto mide el área del marco?

R= 352 cm^2

2.- ¿Cuál es el área de foto?

R= 20 *cm* x 16 *cm* = 320 cm^2

3.- ¿Cuántos retratos puedo colocar en una pared con las siguientes medidas 3 *m* x 2 *m*?

R= Área de la pared 3 *m* x 2 *m* = 6 m^2 Área del retrato 28 *cm* x 24 *cm* = 672 cm^2

1 m^2 —— 10,000 cm^2

6 m^2—— 60,000 cm^2

60,000 cm^2 / 672 cm^2 = 89.28 ∴ son 89 retratos.

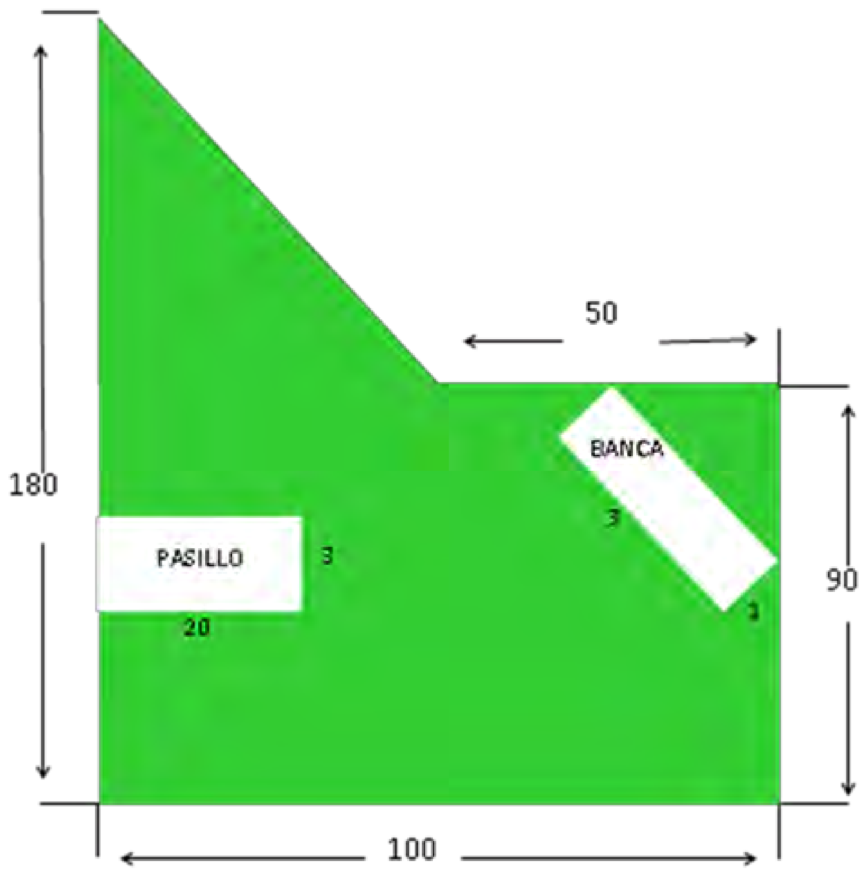
4.- ¿Podrías calcular el área del retrato de otra forma?

Sesión 5

El jardín

Un jardín tiene la forma y dimensiones (en metros) mostradas en la siguiente figura. Si un costal de fertilizante rinde para 325 m^2.

1.- ¿Cuántos costales se necesitan para fertilizar este jardín? R= 35 Costales.



Contesta las preguntas

2.- ¿Cómo determinaste cuántos costales se necesitan para fertilizar el jardín?

R= Claculando el área.

3.- ¿Cómo los calculaste (el número de costales)?

Área del pasillo. Área de la banca.

20 m x 3 m = 60 m^2 3 m x 1 m = 3 m^2

Descomposición en figuras.

Área del triángulo.

Base= 50 m.

Altura= 90 m.

Formula= $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{50m \times 90m}{2} = 2{,}250m^2$

Área del rectángulo.

Largo=100 m.

Ancho=90 m.

Formula

$$A = b \times h$$
$$A = 100m \times 90m = 9000m^2$$

Sumas las áreas del triángulo y el rectángulo.

2,250 m^2 + 9,000 m^2 = 11, 250 m^2

A esta área de 11,250 m^2 se le resta la del pasillo y la de la banca.

A *11,250* m^2 – *63* m^2 = 11,187 m^2

Sesión 6

Calcula el área de la parte sombreada de verde.

1.- ¿Cómo calculaste el área de la mesa?

Se puede calcular por medio de la fórmula del trapecio.

$$A=\frac{(B+b)h}{2}=\frac{(110cm+55cm)55cm}{2}=\frac{9{,}075cm}{2}=4{,}537.5m^2$$

Se puede también calcular con la fórmula del triángulo. Descomponiendola en dos triángulos.

$$A=\frac{b\times h}{2} \qquad A=\frac{b\times h}{2}$$

$$A=\frac{(110cm\times 55cm)}{2} \qquad A=\frac{(55cm\times 55cm)}{2}$$

$$A=\frac{6{,}050cm}{2}=3{,}025cm^2 \qquad A=\frac{3{,}025cm}{2}=1{,}512.5cm^2$$

La suma de estas dos áreas nos da igual que la calculada anteriormente.

$$A=3{,}025cm^2+1{,}512.5cm^2=4{,}537.5cm^2$$

2.- Pudieras calcular el área de la mesa de otra forma.

R= Si, por medio de descomponer la mesa que es un trapecio en dos triángulos o más.

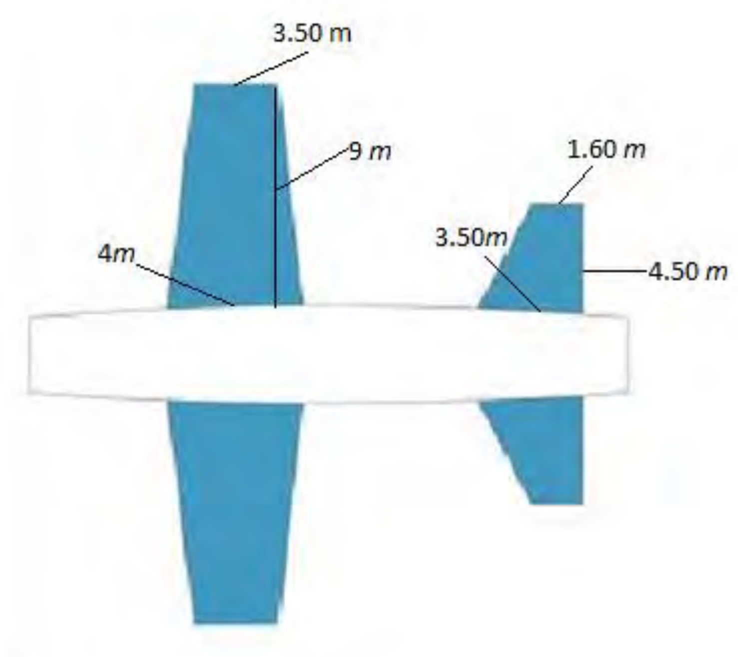
Sesión 7

El avión

Las dimensiones de las alas del avión son B=4 *m*, b=3.50 *m* y la h=9 *m*. Las dimensiones del estabilizador horizontal son B=3.50 *m*, b=1.60 *m* y la h=4.50 *m*.

1.- ¿Cuánto material se necesita para hacer las alas y el estabilizador horizontal (lo que esta sombreado de azul).

R= Alas 67.5 cm^2 Estabilizador 22.95 cm^2



2.- ¿Cómo determinaste el material que se necesita para hacer las alas y la del estabilizador horizontal del avión?

R= Calculando el área de las partes sombreadas de azul.

3.- ¿Cómo calculaste el área de las alas? (Escribe paso a paso como la calculaste)

R=

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

$$A = \frac{(4m + 3.50m)9m}{2}$$

$$A = \frac{67.5m^2}{2} = 33.75m^2$$

$$A = 33.75m^2 \times 2 = 67.5m^2$$

4.- ¿y la del estabilizador horizontal?

R=

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

$$A = \frac{(3.50m + 1.60m)4.50m}{2}$$

$$A = \frac{22.95m^2}{2} = 11.475m^2$$

$$A = 11.475m^2 \times 2 = 22.95m^2$$

5.- ¿Utilizaste alguna formula? (escribela)

R=

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Este mismo problema el alumno lo puede resolver descomponiendo el trapecio en triángulos.

Para las alas.

$$A = \frac{b \times h}{2} \qquad A = \frac{3.50m \times 9m}{2} = 15.75m^2$$

$$A = \frac{b \times h}{2} \qquad A = \frac{4m \times 9m}{2} = 18m^2$$

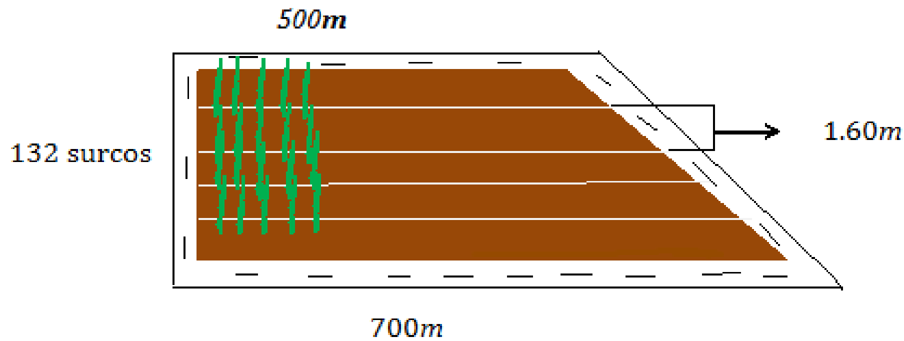
Que sumándolas nos da el área de una de las alas que es 33.75 m^2y se multiplica por 2= 67.5 m^2.

Lo mismo se haría para el estabilizador.

Sesión 8

El cultivo de caña

En un terreno como el que se muestra a continuación:



1.- ¿Cuánto mide la superficie a sembrar?

R= Se determina la altura del trapecio 1.60 *m* x 132 = 211.2 *m*

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$A = \frac{(700\,m + 500\,m)211.2m}{2}$$

$$A = \frac{253{,}440\,m^2}{2} = .126{,}720\,m^2$$

Como se va a pagar por hectárea conviene convertir los metros cuadrados a hectáreas

$$\frac{126{,}720\,m^2}{10{,}000} = 12.67$$ Es decir 12 hectáreas con 67 áreas.

En ese mismo terreno el productor de caña de azúcar decide, después de una cosecha ya no hacer los surcos de forma horizontal, ahora los va hacer de forma vertical.

Los tractores agrícolas por surcar una hectárea cobran $450.

2.- ¿Cuánto le van a cobrar por surcar todo el terreno?

R= $450 x 12.67 hectáreas = $5,701.5

3.- ¿Es más, menos o igual que cuando tenía los surcos de forma horizontal? ¿Por qué?

R= Es igual, porque el terreno sigue siendo el mismo.

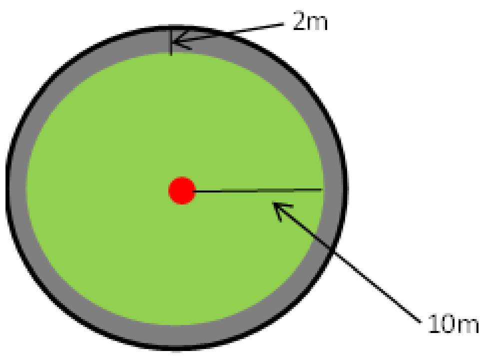
Sesión 9

El andador

1.- ¿Qué área ocupa un jardín redondo de 10 *m* de readio? Si el jardín está rodeado por un andador de pavimento de 2 *m* de ancho, 2.- ¿cuál es el área del andador? R=

1.- 314 cm^2

2.- 138.16 cm^2



$$A = \pi r^2$$
$$A = 3.14(10m)^2 = 314m^2$$
$$A = 3.14(12m)^2 = 452.16m^2$$

Al área total del círculo 452.16 m^2 se le resta el área del jardín 314 m^2 y se obtiene el área del pavimento que es 138.16 m^2.

ANEXO 2

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

En este Anexo 1 se presenta el instrumento de evaluación aplicado a los estudiantes. Se agregaron las respuestas que se esperan por parte de los estudiantes.

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

ESCUELA SEC FED # 12

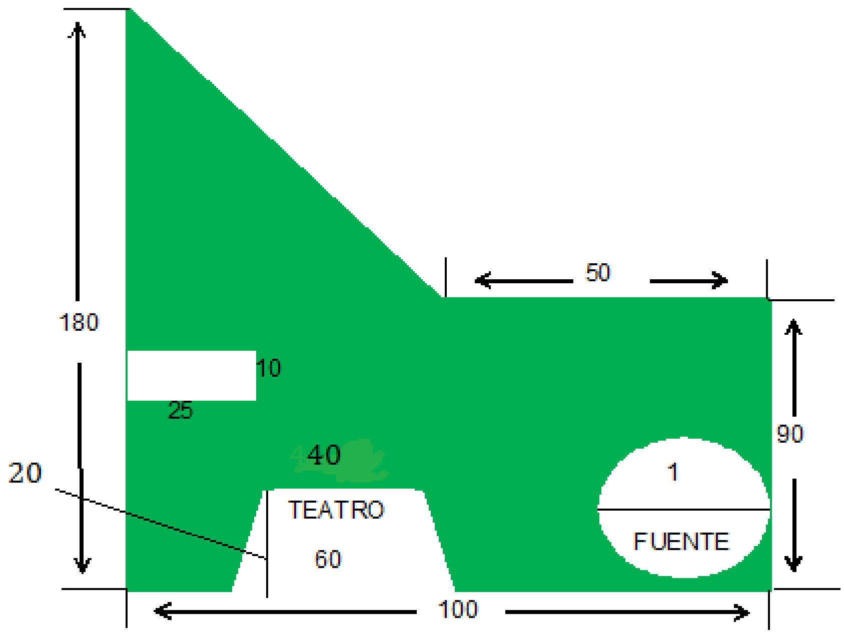
"MOISES SAENZ GARZA"

ALUMNO: ____FECHA:___________

GRADO: ____________ GRUPO: ___________________ CALIF: _____________

INSTRUCCIONES: Lee el siguiente problema y contesta lo que se pide.

Un jardín tiene la forma y dimensiones (en metros) que se muestran en la siguiente figura. Si un costal de fertilizante rinde para 325 cm^2. ¿Cuántos costales se necesitan para este jardín? R= 31 Costales



Área del pasillo.

$$25m \times 10m = 250m^2$$

Área del teatro

$$A = \frac{(60m + 40m)20m}{2}$$

$$A = \frac{2000m^2}{2}$$

$$A = 1000m^2$$

Área de la fuente.

$$A = \pi r^2$$

$$A = 3.14 \times .5^2 = .785m^2$$

Suma de las áreas del pasillo, teatro y fuente.

$$250m^2 + 1000m^2 + .785m^2 = 1250.785m^2$$

Descomposición en figuras.

Área del triángulo.

Base= 50*m*.

Altura= 90*m*.

Formula

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{50m \times 90m}{2} = 2{,}250 m^2$$

Área del rectángulo.

Largo=100*m*.

Ancho=90*m*.

Formula

$$A = b \times h$$

$$A = 100m \times 90m = 9000 m^2$$

Sumas las áreas del triángulo y el rectángulo.

2,250 m^2+9,000 m^2=11,250 m^2

A esta área de 11,250 m^2 se le resta la del pasillo, teatro y fuente.

A *11,250*m^2 – *1250.785*m^2 = *9,999.215*m^2

A 9,999.215m^2 que es el área a cubrir con pasto la tenemos que dividir entre 325m^2 y obtenemos la cantidad de costales de pasto que se necesitan.

9,999.215 m^2 / 325m^2 = 30.76 por lo tanto 31 costales.